ALGEBRA

PRE-UNIVERSITARIA

VOLUMEN II

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Eduardo Espinoza Ramos

IMPRESO EN EL PERÚ
15 - 05 - 2004

1° EDICIÓN
LIMA - PERÚ

RUC	N° 10070440607
Ley de Derechos del Autor	N° 13714
Registro comercial	N° 10716
Escritura Publica	N° 4484

PRÓLOGO

El libro que se presenta tiene como objetivo principal, contribuir con todas las personas que se encuentran preparándose para el ingreso a la universidad, así, también como un texto de consulta para los que empieza su carrera profesional; durante 28 años dedicadas a la enseñanza de la matemática en las universidades, he ganado una amplia experiencia y que ahora me permito aportar en la formación de los estudiantes, tratando de enmendar algunas imprecisiones en los conceptos de los diversos temas abordados y así como un entrenamiento en los ejercicios no en forma mecánica si no haciendo un análisis para la obtención de la solución.

En el presente trabajo la teoría está en forma metódica y con especial cuidado, tratando de no perder el rigor matemático y no caer en el excesivo formulismo que confunden al lector.

Como en toda disciplina de matemática, para poderla dominar se requiere de una buena teoría, acompañado de una constante práctica, es por eso que en la presente obra, en cada uno de los capítulos, la parte teórica se ilustra con ejemplos y diagramas; en los ejercicios y problemas desarrollados se incluyen preguntas tomados en los exámenes de admisión de las diversas universidades así como de los exámenes de los centros preuniversitarios y de los concursos nacionales, que les servirá de guía al estudiante en su preparación, así mismo para su entrenamiento se propone ejercicios y problemas con sus respectivas respuestas, dentro de esta gama de ejercicios y problemas propuestos, muchos de ellos han sido tomado en los exámenes de admisión, así como de los centros preuniversitarios de las diversas universidades, con todo este material que presento, el postulante estará en la capacidad de poder salir airoso del examen de admisión.

El volumen II del presente trabajo, abarca desde las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, progresiones aritméticas y geométricas, operadores matemáticos, matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones, número complejos, lógica, teoría de conjuntos, sistema de números reales, relaciones binarias y funciones reales de variable real.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis colegas de las diversas universidades, quienes con su apoyo moral y sugerencias han hecho posible la realización de esta obra titulada ÁLGEBRA volumen II preuniversitario.

En esta primera edición me comprometo ha estar atento a toda sugerencia u observación del contenido de este trabajo, con la finalidad de ir perfeccionando de tal manera que el estudiante sea el beneficiado.

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de su prójimo

ÍNDICE

CAPÍTULO XIII

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

CAPÍTULO XIV

PROGRESIONES: ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

CAPÍTULO XV

OPERADORES MATEMÁTICOS

CAPÍTULO XVI

MATRICES Y DETERMINANTES

CAPÍTULO XVII

SISTEMAS DE ECUACIONES

CAPÍTULO XVIII

NÚMEROS COMPLEJOS

CAPÍTULO XIX

LÓGICA

CAPÍTULO XX

TEORIA DE CONJUNTOS

CAPÍTULO XXI

SISTEMA DE NÚMEROS REALES

CAPÍTULO XXII

RELACIONES Y FUNCIONES

CAPÍTULO XIII

13. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.-

13.1. ECUACIÓN EXPONENCIAL.-

DEFINICIÓN.- Llamaremos ecuación exponencial, a la ecuación que contienen una incógnita o incógnitas como exponente.

Ejemplos de Ecuaciones Exponenciales.-

① $4^x = 64$ ② $2^{4^{x^2}} = 256$

③ $3^{x+y} = 81$ ④ $2^{4^{x^2+y^2}} = 256$

13.2. TÉCNICAS DE CONVERTIBILIDAD.-

Las ecuaciones exponenciales se transforman en ecuaciones algebraicas aplicando ciertas técnicas que describiremos enseguida.

1ro. Se debe expresar a la ecuación exponencial, de tal manera que las potencias tengas bases iguales, luego se igualan los exponentes de las potencias y se resuelve la ecuación obtenida, es decir:

$$\boxed{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y;\ a > 0 \ \wedge\ a \neq 1}$$

Ejemplo.- La solución de la ecuación $16^{x-2} = 4^{x+1}$, es:

a) 5 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

Desarrollo

Como $16 = 4^2$, entonces a la ecuación dada expresaremos como $4^{2(x-2)} = 4^{x+1}$, donde las bases son iguales, entonces se igualan los exponentes: 2(x – 2) = x + 1, luego

2x – 4 = x + 1 entonces x = 5, la respuesta es **a**

Ejemplo.- Hallar x de tal manera que: $2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x+2} - 2^{x-2} = 336$

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** 5

Desarrollo

Sacando factor común 2^{x-2} del 1er miembro de la ecuación.

$2^{x-2}[2^3 - 2 + 2^4 - 1] = 336 = 2^4.21$, simplificando

$2^{x-2}.21 = 2^4.21$ entonces $2^{x-2} = 2^4$, de donde x – 2 = 4 entonces x = 6

la respuesta es **c**

2do. Para los casos donde existan términos de la forma k^x, se hace un cambio de variable de la forma $k^x = y$, mediante el cual se tiene una ecuación algebraica respecto a y.

Ejemplo.- La solución de $2^x + 4^x = 72$ es:

a) 1 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Desarrollo

Como $4^x = 2^{2x}$ entonces reemplazamos en la ecuación dada

$2^x + 2^{2x} = 72$ lo que es lo mismo $(2^x)^2 + 2^x = 72$

si $y = 2^x \Rightarrow y^2 + y - 72 = 0 \Rightarrow (y+9)(y-8) = 0$, de donde

$y + 9 = 0 \lor y - 8 = 0 \Rightarrow y = -9;\ y = 8$

si $y = 2^x = -9$ absurdo, $\nexists\ x \in R$ tal que $2^x = -9$

si $y = 2^x = 8 = 2^3$ entonces x = 3, la respuesta es **b**

3ro. Se presentan casos en que la ecuación tiene exponentes iguales, es decir:

$$a^x = b^x \Rightarrow a = b,\ a > 0 \wedge b > 0$$

Ejemplo.- La solución de la ecuación $(7n)^x = (24+3n)^x$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 1

Desarrollo

Como los exponentes de la ecuación $(7n)^x = (24+3n)^x$ son iguales, entonces igualamos las bases, es decir: $7n = 24 + 3n$ de donde $4n = 24$ entonces $n = 6$

Luego la respuesta es **c**

4to. Una de las propiedades de mayor utilidad es la siguiente:

$$(x^{x^n})^n = (x^n)^{x^n}$$

que resulta de aplicar la propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$

Ejemplo.- La solución de la ecuación $x^{x^4} = 64$ es:

a) 1 b) $\sqrt[4]{8}$ c) $\sqrt[4]{3}$ d) 4 e) $\sqrt[4]{5}$

Desarrollo

Para aplicar la propiedad 4to, elevamos a la 4ta potencia.

$(x^{x^4})^4 = 64^4$ de donde $(x^4)^{x^4} = (8^2)^4 = 8^8$; entonces

$x^4 = 8$, entonces $x = \sqrt[4]{8}$, la respuesta es **b**

5to. Si $x^{x^{x^{x^{x}}}} = a^{a^{a^{a^{a}}}}$, entonces $x = a$, $\forall\ x \neq 0$

En esta propiedad se aplica la "analogía matemática"

Si $x^{x^{x^{x^{n}}}} = n$, entonces $x = \sqrt[n]{n}$

Ejemplo.- La solución de la ecuación $x^{x^{x^{x^4}}} = 4$ es:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{2}$ c) $\sqrt[4]{4}$ d) $\sqrt[4]{5}$ e) $\sqrt{3}$

Desarrollo

Aplicando la propiedad 5ta se tiene; $x^{x^{x^{x^4}}} = 4$, entonces $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

Luego la respuesta es **a**

6to. Equivalencias usuales

① $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$

② $x^{-a^{-b^{-c^{-1}}}} = (\frac{1}{x})^{(\frac{1}{a})^{(\frac{1}{b})^{(\frac{1}{c})}}}$

③ $2^{-\sqrt{2}} = (\frac{1}{4})^{(\frac{1}{4})^{(\frac{1}{4})}}$

④ $(\frac{1}{\sqrt{3}})^{(\frac{1}{\sqrt{3}})} = (\frac{1}{3\sqrt{3}})^{(\frac{1}{3\sqrt{3}})}$

Ejemplo.- $(64)^{-25^{-8^{-3^{-1}}}} = (\frac{1}{64})^{(\frac{1}{25})^{(\frac{1}{8})^{(\frac{1}{3})}}} = (\frac{1}{64})^{(\frac{1}{25})^{(\frac{1}{2})}} = (\frac{1}{64})^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2\sqrt[5]{2}}$

Ejemplo.- La solución de la ecuación $(x^{3^{3^x}})^{3^{3^2}} = x^{9^9}$ es:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 5

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $(a^n)^m = a^{nm}$

$(x^{3^{3^x}})^{3^{3^2}} = x^{3^{3^x}.3^{3^2}} = x^{3^{3^x+3^2}} = x^{3^{3^x+9}} = x^{9^9}$ (bases iguales)

$3^{3^x+9} = 9^9 \Rightarrow 3^{3^x+9} = 3^{18}$ de donde $3^x + 9 = 18$

$3^x = 9 = 3^2$ de donde $x = 2$, la respuesta es **a**

Ejemplo.- Si $\sqrt[(x+1)^2]{16} - x = 1$, $x > 0$, el valor de x es:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{3}$ e) 3

Desarrollo

La expresión dada escribiremos en la forma:

$\sqrt[(x+1)^2]{16} = x+1$ de donde $16 = (x+1)^{(x+1)^2}$, como $16 = 2^{2^2}$

$$2^{2^2} = (x+1)^{(x+1)^2}$$

(2 → 2, 2 → (x+1))

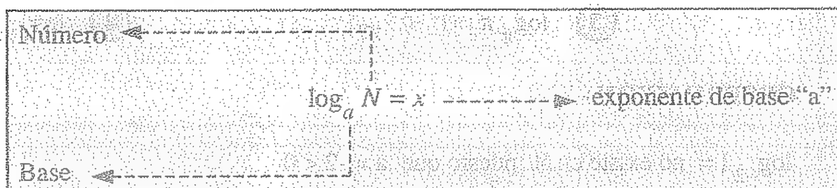
de donde $x + 1 = 2$ entonces $x = 1$

por lo tanto la respuesta es **b**

13.3. EL LOGARITMO Y SUS PROPIEDADES.-

13.3.1. DEFINICIÓN.- Se llama logaritmo de un número real positivo $N > 0$, en una base dada $a > 0$ y $a \neq 1$, al exponente "x" a que debe elevarse la base "a" de manera que se cumpla $a^x = N$.

NOTACIÓN.-



$\log_a N = x$, se lee "x" es el logaritmo de "N" en base "a", de la definición de logaritmo se tiene:

Si $\log_a N = x \iff a^x = N$, $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

Por lo tanto de la definición se concluye

Si $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$
Si $a^x = N \Rightarrow \log_a N = x$

Ejemplo.- Si $\log_3 27 = 3$ se tiene $3^3 = 27$

$\log_3 81 = 4$ se tiene $3^4 = 81$

Si $5^3 = 125$ se tiene $\log_5 125 = 3$

$(\frac{1}{3})^{-1} = 3$ se tiene $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

$(\sqrt{3})^6 = 27$ se tiene $\log_{\sqrt{3}} 27 = 6$

OBSERVACIÓN.- $\forall$ a > 0, a ≠ 1, se tiene:

① $\log_a 1 = 0$ -> $a^0 = 1$ ② $\log_a a = 1$ -> $a^1 = a$

Ejemplo.- ① $\log_{200} 1 = 0$ -> $200^0 = 1$ ② $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ -> $(\frac{1}{3})^0 = 1$

③ $\log_\pi \pi = 1$ -> $\pi^1 = \pi$ ④ $\log_{103} 103 = 1$ -> $(103)^1 = 103$

OBSERVACIÓN.-

$\log_{-2} 1 =$ no existe en R, puesto que a = -2 < 0

$\log_{-7} -7 =$ no existe en R, puesto que a = -7 < 0

13.3.2. IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO.-

Consideremos el siguiente logaritmo

$$x = \log_a N \quad ...(1)$$

por definición $\quad a^x = N$ ... (2)

al reemplazar (1) en (2) se tiene:

$$a^{\log_a N} = N\ ,\ \forall\ N > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$$

Que es la identidad fundamental del logaritmo.

Ejemplos.- ① $7^{\log_7 10} = 10$ ② $5^{\log_5 3} = 3$

③ $(x^2+3)^{\log_{(x^2+3)} 5} = 5\ ,\ x \in R$

④ $(\sqrt{3}-\sqrt{7})^{\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{7})} 5}$ no existe en R, puesto que la base $(\sqrt{3}-\sqrt{7})$ es negativa.

13.3.3. PROPIEDADES SOBRE LOGARITMOS.-

① $\log_a AB = \log_a A + \log_a B\ ,\ A > 0, B > 0, a > 0 \wedge a \neq 1$

Demostración

La demostración se puede hacer mediante la definición o también por la identidad fundamental.

i) Por la definición.

Si $\begin{cases} \log_a A = x \\ \log_a B = y \end{cases}$ entonces $\begin{array}{c} a^x = A \\ a^y = B \\ \hline a^{x+y} = AB \end{array}$, multiplicando miembro a miembro

, por definición de logaritmo

$\log_a AB = x + y$, de donde $\quad \therefore \quad \log_a AB = \log_a A + \log_a B$

ii) Por la identidad fundamental.

$\begin{array}{l} A = a^{\log_a A} \\ B = a^{\log_a B} \\ \hline \end{array}$, multiplicando ambos miembros

$AB = a^{\log_a A + \log_a B}$, por la propiedad fundamental

$a^{\log_a AB} = a^{\log_a A+\log_a B}$, bases iguales, se igualan los exponentes

$\therefore \quad \log_a AB = \log_a A + \log_a B$

EN GENERAL.- Si $a > 0$, $a \neq 1$, $A_1, A_2, ..., A_n > 0$

$\log_a(A_1.A_2...A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + ... + \log_a A_n$

Ejemplo.-

1) $\log_3 21 = \log_3(3)(7) = \log_3 3 + \log_3 7$

2) $\log_5 4x = \log_5 4 + \log_5 x$; si $x > 0$

3) $\log_4(x+3)(x-3) = \log_4(x+3) + \log_4(x-3)$; $x > 3$

(2) $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$, $m, n \in R$, $A > 0 \wedge a > 0$

Demostración

Si $\log_{a^m} A^n = x$, entonces $a^{mx} = A^n$ de donde $A = a^{\frac{m}{n}x}$, luego por definición de logaritmo se tiene:

$\log_a A = \frac{m}{n}x = \frac{m}{n}\log_{a^m} A^n$, puesto que $x = \log_{a^m} A^n$

como $\frac{m}{n}\log_{a^m} A^n = \log_a A$ entonces $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$

OBSERVACIÓN.-

i) Si $\log_a A^n = n\log_a A$, $n \in R$, para $A = a$ se tiene: $\log_a a^n = n$

ii) $\log_a A = \log_{a^n} A^n$, $n \in R$

iii) $\log_a A = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{A}$, $n \in N$, $n \geq 2$

NOTA.- Como $\log_a^n A = (\log_a A)^n$, $n \in R$

Por lo tanto: $\log_a^n A \neq \log_a A^n$

③ $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a A - \log_a B$, $a > 0$, $a \neq 1$, $A > 0$, $B > 0$

Demostración

$\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(AB^{-1})$, por la propiedad del inverso

$= \log_a A + \log_a B^{-1}$, por la propiedad (1) del logaritmo

$= \log_a A - \log_a B$, por la propiedad (2) del logaritmo

$\therefore \quad \log_a(\frac{A}{B}) = \log_a A - \log_a B$

Ejemplo.-

① $\log_3(\frac{9}{7}) = \log_3 9 - \log_3 7 = \log_3 3^2 - \log_3 7 = 2\log_3 3 - \log_3 7 = 2 - \log_3 7$

② Calcular el valor de $E = \log_4 \frac{39}{12} + \log_4 \frac{5}{78} - \log_4 \frac{5}{96}$. En efecto:

$E = \underbrace{\log_4 \frac{39}{12} + \log_4 \frac{5}{78}} - \log_4 \frac{5}{96} = \log_4(\frac{39}{12})(\frac{5}{78}) - \log_4 \frac{5}{96}$, simplificando

$= \log_4 \frac{5}{24} - \log_4 \frac{5}{96} = \log_4(\frac{\frac{5}{24}}{\frac{5}{96}}) = \log_4(\frac{96}{24}) = \log_4 4 = 1$

④ $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$, $y > 0$, $y \neq 1$, $x > 0$ (cambio de base)

Demostración

$x^{\log_x y} = y$, por la propiedad fundamental del logaritmo

$\log_a x^{\log_x y} = \log_a y$, tomando logaritmo en base a.

$\log_x y.\log_a x = \log_a y$, por la propiedad (2) del logaritmo

$$\therefore \quad \log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

OBSERVACIÓN.-

i) Si $\log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y} = \frac{1}{\log_x y}$, entonces $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$ donde x > 0, y > 0, x ≠ 1, y ≠ 1. También es lo mismo escribir: $\log_y x.\log_x y = 1$

ii) $\log_a x.\log_x y = \log_a y$, Se puede generalizar la regla de la cadena

$$\log_a x_1.\log_{x_1} x_2.\log_{x_2} x_3...\log_{x_{n-2}} x_{n-1}.\log_{x_{n-1}} x_n = \log_a x_n$$

iii) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$, x > 0, y > 0, a > 0 ∧ a ≠ 1 (Regla del intercambio).

Ejemplos.-

① $\log_5 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 5} = \frac{\log_4 8}{\log_4 5}$

② $\log_5 8 = \frac{1}{\log_8 5}$

③ $7^{\log_5 9} = 9^{\log_5 7}$

iv) Si $x = e^y \Leftrightarrow y = \log_e x = \ln x$ a este logaritmo se denomina logaritmo natural o neperiano

13.4. ECUACIÓN LOGARÍTMICA.-

13.4.1. DEFINICIÓN.- Llamaremos ecuación logarítmica, a las ecuaciones donde por lo menos, una incógnita está afectada por el operador logarítmico.

Ejemplos.-

① $\log_5(x+5)=\log_5(x-5)$

② $\log(x^5-1)=2$

③ $\log_2(x^3+3x^2+1)=x+5$

④ $2x+\log_3 5=7$ (no es ecuación logarítmica)

13.4.2. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LOGARÍTMICA.-

Para obtener la solución de una ecuación logarítmica

$$\boxed{\log_a P(x)=\log_a Q(x)}$$

indicaremos los criterios siguientes.

1ro. Se debe de analizar la base y las expresiones P(x) y Q(x) que dependen de la incógnita; de tal manera que se garantice la existencia del logaritmo, es decir: se debe de hallar los valores de la incógnita que satisface a la relación.

$$\boxed{P(x)>0 \ \wedge \ Q(x)>0 \ \wedge \ a>0 \ \wedge \ a\neq 1}$$

2do. Los posibles valores de la incógnita se halla de la ecuación

$$\boxed{P(x)=Q(x)}$$

3ro. Las soluciones de la ecuación logarítmica se determina interceptando los valores obtenidos en el 1er y 2do

$$\boxed{C.S.=(1ro)\cap(2do)}$$

Ejemplo.- La solución de la ecuación $\log_x(x-5)=\log_x(7-x)$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 7 e) 8

Desarrollo

Analizando la existencia del logaritmo

$x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x - 5 > 0 \wedge 7 - x > 0$

$x > 5 \wedge x < 7$, de donde $x \in <5,7>$

además $x - 5 = 7 - x \Rightarrow 2x = 12$ de donde $x = 6$

Luego el C.S. $= <5,7> \cap \{6\} = \{6\}$

Por lo tanto la respuesta es **c**

Ejemplo.- La solución de la ecuación $\log_2^2 8x + \log_2^2 16x = 5$ es:

a) $\frac{1}{32}, 4$ b) $\frac{1}{16}, 2$ c) $\frac{1}{32}, \frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{16}, 4$ e) 1

Desarrollo

El logaritmo existe para $x > 0$, luego en la ecuación dada expresamos así:

$$\log_2^2 8x + \log_2^2 16x = 5 \Rightarrow \log_2^2 8x + \log_2^2 2(8x) = 5$$

$\log_2^2 8x + (\log_2 2 + \log_2 8x)^2 = 5$, desarrollando se tiene:

$$\log_2^2 8x + \underbrace{\log_2^2 2}_{1} + 2\underbrace{\log_2 2}_{1}.\log_2 8x + \log_2^2 8x = 5$$

$\log_2^2 8x + 1 + 2\log_2 8x + \log_2^2 8x = 5$, simplificando

$2\log_2^2 8x + 2\log_2 8x - 4 = 0$, de donde $\log_2^2 8x + \log_2 8x - 2 = 0$, factorizando se tiene:

$$(\log_2 8x + 2)(\log_2 8x - 1) = 0 \Rightarrow \log_2 8x + 2 = 0 \vee \log_2 8x - 1 = 0$$

$$\text{como } \begin{cases} \log_2 8x + 2 = 0 \\ \log_2 8x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 8x = -2 \\ \log_2 8x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 2^{-2} \\ 8x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{32} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Luego el $C.S. = \{\frac{1}{32}, \frac{1}{4}\}$. Por lo tanto la respuesta es **c**

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación logarítmica $\dfrac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $\log_a a=1$, $\dfrac{n}{m}\log_a A=\log_{a^m} A^n$

$1=\log_2 2$ y $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})=\dfrac{2}{2}\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})$

$=\log_{\sqrt{2}^2}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})^2=\log_2(2x-2\sqrt{x^2-9})$

reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$\dfrac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=\dfrac{\log_2 2+\log_2(x-4)}{\log_2(2x-2\sqrt{x^2-9})}=1$, de donde

$\log_2 2+\log_2(x-4)=\log_2(2x-2\sqrt{x^2-9})$

$\log_2(2x-8)=\log_2(2x-2\sqrt{x^2-9}) \Rightarrow 2x-8=2x-2\sqrt{x^2-9}$

$\sqrt{x^2-9}=4 \Rightarrow x^2-9=16 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5$, por lo tanto la respuesta es **d**

13.5. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) En la siguiente ecuación $16^{\sqrt{x}}-256=(60)4^{\sqrt{x}}$, el valor de x es:

a) 3 b) 4 c) -4 d) 9 e) 1

Desarrollo

A la ecuación dada escribiremos en la forma: $16^{\sqrt{x}}-(60)4^{\sqrt{x}}-256=0$ ... (1)

como $16^{\sqrt{x}}=4^{2\sqrt{x}}=(4^{\sqrt{x}})^2$ que reemplazando en (1) se tiene:

$$(4^{\sqrt{x}})^2-(60)4^{\sqrt{x}}-256=0 \quad \text{... (2)}$$

ahora de acuerdo 13.2 de la 2da parte hacemos el cambio $4^{\sqrt{x}}=y>0$, que al reemplazar en (2) se tiene: $y^2-60y-256=0$, factorizando mediante el aspa

$y^2-60y-256$

y	-64 →	-64y
y	4 →	4y
	→	-60y

Luego $(y-64)(y+4)=0 \Rightarrow y-64=0 \vee y+4=0$ de donde

$$\begin{cases} y=64 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{\sqrt{x}}=64=4^3 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \\ 4^{\sqrt{x}}=-4;\ 4^{\sqrt{x}} \text{ es positivo} \Rightarrow 4^{\sqrt{x}}=-4,\ \nexists\ x\in R \end{cases}$$

por lo tanto la respuesta es **d**

(2) Si $(2\sqrt[3]{7})^x=3136$, entonces el valor de x^2+1 es:

a) 32 b) 29 c) 76 d) 23 e) 37

Desarrollo

Poniendo a la ecuación dada en bases iguales

$$(2\sqrt[3]{7})^x=(\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{7})^x=(\sqrt[3]{56})^x=56^{\frac{x}{3}};\quad 3136=(56)^2$$

ahora reemplazamos en la ecuación dada

$$(2\sqrt[3]{7})^x=(56)^{\frac{x}{3}}=3136=(56)^2 \Rightarrow (56)^{\frac{x}{3}}=(56)^2 \text{ de donde}$$

$\frac{x}{3}=2$ entonces $x=6$, luego el valor de $x^2+1=6^2+1=37$

por lo tanto la respuesta es **c**

(3) Si $25^x+9^x=2(15^x)$, determinar el valor $E=\frac{5^{-7x+1}+3^{-7x+2}}{7(5^{-7x-1})}$

a) 10 b) $\frac{2}{5}$ c) 5 d) 8 e) 15

Desarrollo

Como $25^x=(5^x)^2$, $9^x=(3^x)^2$, $15^x=3^x.5^x$

Al reemplazar en la ecuación dada se tiene:

$25^x+9^x=\underbrace{(5^x)^2+(3^x)^2}=2(15^x)=\underbrace{2(3^x)(5^x)}$ igualando

$(5^x)^2-2(5^x)(3^x)+(3^x)^2=0$, es un trinomio cuadrado perfecto

$(5^x-3^x)^2=0$ entonces $5^x-3^x=0$ de donde $5^x=3^x$

$(\frac{5}{3})^x=1$ entonces $x=0$, reemplazando en E

$E=\frac{5+3^2}{7(5^{-1})}=\frac{14}{7(5^{-1})}=\frac{2}{5^{-1}}=2(5)=10$, por lo tanto la respuesta es **a**

(4) Hallar 4^x sabiendo que: $3^{5-x}.5^{2x-4}=15^{11-3x}$

a) 32 b) 64 c) 16 d) 72 e) 8

Desarrollo

Como $15^{11-3x}=3^{11-3x}.5^{11-3x}$, reemplazando en la ecuación dada,

$3^{5-x}.5^{2x-4}=3^{11-3x}.5^{11-3x}$, a esta ecuación escribimos así:

$\frac{3^{5-x}}{3^{11-3x}}=\frac{5^{11-3x}}{5^{2x-4}}$, aplicando la propiedad $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$3^{(5-x)-(11-3x)}=5^{(11-3x)-(2x-4)}$, simplificando $3^{2x-6}=5^{15-5x}$ esta igualdad se cumple solo cuando los exponentes son iguales a cero, es decir:

$\begin{cases}2x-6=0\\15-5x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\x=3\end{cases}$. Luego $4^x=4^3=64$, la respuesta es **b**

(5) Si $x^{x^6}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, el valor de x^8 es:

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

Desarrollo

Como $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=[\sqrt[4]{2}^2]^{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}^{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}^{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{2}^{(\sqrt{2})^3}=(\sqrt[4]{2})^{[(\sqrt[4]{2})^2]^3}=\sqrt[4]{2}^{\sqrt[4]{2}^6}$

Por lo tanto a la ecuación dada escribimos así:

$x^{x^6}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}^{\sqrt[4]{2}^6} \Rightarrow x^{x^6}=\sqrt[4]{2}^{\sqrt[4]{2}^6}$ de donde $x=\sqrt[4]{2}$

como $x=\sqrt[4]{2} \Rightarrow x^4=2 \Rightarrow x^8=4$. Luego la respuesta es **a**

(6) Calcular el valor de $E=\sqrt[3]{\sqrt{(2-\sqrt{3})^x}.[1+(2+\sqrt{3})^x]}$, para el valor de x que verifica a la ecuación $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=727$, $x\neq 0$.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Sea $z^2=(2+\sqrt{3})^x$, racionalizando $z^2=\frac{4-3}{(2-\sqrt{3})^x}=\frac{1}{(2-\sqrt{3})^x}$ de donde $(2-\sqrt{3})^x=\frac{1}{z^2}$, ahora reemplazando en la ecuación $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=727$, obteniéndose

$$z^2+\frac{1}{z^2}=727 \Rightarrow z^2+2+\frac{1}{z^2}=729 \Rightarrow (z+\frac{1}{z})^2=729 \text{ de donde } z+\frac{1}{z}=27$$

$$E=\sqrt[3]{\sqrt{(2-\sqrt{3})^x}[1+(2+\sqrt{3})^x]}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{z^2}}[1+z^2]}=\sqrt[3]{\frac{1}{z}[1+z^2]}$$

$$=\sqrt[3]{z+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{27}=3$$, la respuesta es **b**

(7) Consideremos la ecuación $2^x+2^{x+1}+2^{x-2}-10=0$, entonces podemos afirmar que:

a) x es un número par

b) x es un número entre 3 y 6

c) x es un número impar

d) x es un número real entre 1 y 2

e) x no es un número real

Desarrollo

De la ecuación $2^{x+1}+2^x+2^{x-2}=10$, sacamos factor común 2^{x-2}

$2^{x-2}[2^3+2^2+1]=10 \Rightarrow 13.2^{x-2}=10$, de donde

$2^{x-2}=\frac{10}{13}$ entonces $\frac{1}{2}<\frac{10}{13}<1 \Rightarrow 2^{-1}<2^{x-2}<2^0 \wedge x \in R$

por lo tanto $-1<x-2<0 \Rightarrow 1<x<2$. Luego la respuesta es **d**

(8) Encontrar el valor de $\frac{1}{x^2}$ tal que $5^{x^2-x}.2^{x^2}.20^{-x}=\frac{1}{10}$

a) $-\frac{1}{2}$ b) -1 c) ∞ d) 1 e) $\frac{1}{2}$

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $a^{n+m}=a^n.a^m$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$$5^{x^2-x}.2^{x^2}.20^{-x}=\frac{1}{10} \Rightarrow 5^{x^2}.5^{-x}.2^{x^2}.20^{-x}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{5^{x^2}}{5^x}.\frac{2^{x^2}}{20^x}=\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{10^{x^2}}{100^x}=\frac{1}{10}, \text{ de donde } \frac{10^{x^2}}{10^{2x}}=\frac{1}{10} \Rightarrow 10^{x^2-2x}=10^{-1}$$

como las bases son iguales se igualan los exponentes $x^2-2x=-1$

de donde $x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

el valor de $\frac{1}{x^2}=1$, la respuesta es **d**

⑨ Calcular el valor de $E=\sqrt{5x+13}$, para el valor de x que satisface la ecuación $\sqrt{a^{x-1}}.\sqrt[3]{a^{2x+1}}.\sqrt[4]{a^{2-3x}}=1$, donde $a\neq 0$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Desarrollo

Aplicando la propiedad $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

$a^{\frac{x-1}{2}}.a^{\frac{2x+1}{3}}.a^{\frac{2-3x}{4}}=1$, aplicando la propiedad $a^n.a^m=a^{n+m}$

$a^{\frac{x-1}{2}+\frac{2x+1}{3}+\frac{2-3x}{4}}=1=a^0$, como las bases son iguales entonces igualamos los exponentes

$\frac{x-1}{2}+\frac{2x+1}{3}+\frac{2-3x}{4}=0$, de donde el m.c.m.(2,3,4) = 12

$\frac{6(x-1)+4(2x+1)+3(2-3x)}{12}=0 \Rightarrow 6x-6+8x+4+6-9x=0$

$5x=-4$ de donde $x=-\frac{4}{5}$

$E=\sqrt{5x+13}=\sqrt{5(-\frac{4}{5})+13}=\sqrt{-4+13}=\sqrt{9}=3$, por lo tanto la respuesta es **b**

(10) Hallar el valor de $E = x^4 + x^2 + 3$, para el valor de x que verifica a la ecuación $x^x = 8^{\sqrt{2}}$

a) 45 b) 55 c) 65 d) 75 e) 85

Desarrollo

A la ecuación dada expresamos en la forma: $x^x = 8^{\sqrt{2}} = (\sqrt{8}^2)^{\sqrt{2}} = \sqrt{8}^{2\sqrt{2}} = \sqrt{8}^{\sqrt{8}}$

como $x^x = \sqrt{8}^{\sqrt{8}} \Rightarrow x = \sqrt{8} \Rightarrow x^2 = 8$

$E = x^4 + x^2 + 3 = 8^2 + 8 + 3 = 64 + 8 + 3 = 75$, por lo tanto la respuesta es **d**

(11) La solución de la ecuación $16^{8^x} = 2^{32^7}$ es:

a) 13 b) 12 c) 11 d) 9 e) 7

Desarrollo

Expresamos a la ecuación en base 2.

$16^{8^x} = (2^4)^{8^x} = 2^{4.8^x} = 2^{32^7}$, ahora igualamos exponentes

$4.8^x = 32^7$, nuevamente ponemos en la misma base

$2^2.2^{3x} = (2^5)^7 \Rightarrow 2^{3x+2} = 2^{35}$, igualando exponentes

$3x + 2 = 35 \Rightarrow 3x = 33$ de donde $x = 11$, por lo tanto la respuesta es **c**

(12) Hallar el valor de $E = \frac{x^2+3}{4}$, para valor de x verifica la ecuación $\frac{6^{2x-2}}{144^{x-1}} = \frac{1}{16}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

$\frac{6^{2x-2}}{144^{x-1}} = \frac{6^{2x-2}}{12^{2(x-1)}} = \frac{6^{2x-2}}{12^{2x-2}} = \frac{1}{16}$, de donde $(\frac{6}{12})^{2x-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{2x-2} = (\frac{1}{2})^4$

como las bases son iguales, entonces igualamos los exponentes.

$2x-2=4 \Rightarrow 2x=6$ de donde $x=3$

$E=\frac{x^2+3}{4}=\frac{9+3}{4}=\frac{12}{4}=3$, la respuesta es **b**

(13) Hallar el valor de $E=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ para el valor de x que verifica la ecuación $x^{2x-1}=2$

a) 20 b) 15 c) 10 d) 5 e) 1

Desarrollo

Al segundo miembro transformamos, tratando de darle la forma del primer miembro.

$x^{2x-1}=(\frac{1}{2})^{-1}=(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{4})^{2(\frac{1}{4})-1}$ es decir

$x^{2x-1}=(\frac{1}{4})^{2(\frac{1}{4})-1}$, comparando se tiene $x=\frac{1}{4}$

Luego $E=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=16+4=20$, la respuesta es **a**

(14) Hallar el valor de $E=\sqrt[x-1]{x^2-9}$, para el valor de x que verifica la ecuación $2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=56$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Desarrollo

Aplicando la propiedad $a^{n+m}=a^n.a^m$

$2^x.2^2+2^x.2+2^x=56$, sacando factor común 2^x

$2^x(2^2+2+1)=56 \Rightarrow 7.2^x=56 \Rightarrow 2^x=\frac{56}{7}=8 \Rightarrow 2^x=8=2^3$ de donde $x=3$

$E=\sqrt[3-1]{9-9}=\sqrt{0}=0$, la respuesta es **e**

(15) Hallar el valor de $E=\dfrac{x^2+6}{x}$, para el valor x que verifique a la ecuación $4^{x+2}+4^{x+4}+4^{x+5}=81$

a) -5 b) 3 c) 1 d) -2 e) -3

Desarrollo

Sacando el factor común 4^{x+2} del 1er miembro

$4^{x+2}(1+4^2+4^3)=81$ de donde $4^{x+2}.81=81$, simplificando

$4^{x+2}=1=4^0 \Rightarrow x+2=0$ de donde $x=-2$

$E=\dfrac{x^2+6}{x}=\dfrac{4+6}{-2}=-5$, la respuesta es **a**

(16) Hallar el valor de $E=x^2+x+3$, para el valor de x que verifica a la ecuación $\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{x^2+1}}{16}}=x(x-2)+1$

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

Desarrollo

La ecuación dada escribimos en la forma siguiente

$\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{x^2+1}}{16}}=x^2-2x+1=(x-1)^2$, elevando al exponente x se tiene:

$\dfrac{(x-1)^{x^2+1}}{16}=(x-1)^{2x}$ de donde $\dfrac{(x-1)^{x^2+1}}{(x-1)^{2x}}=16$, de donde

$(x-1)^{x^2-2x+1}=16 \Rightarrow (x-1)^{(x-1)^2}=2^4$

$$(x-1)^{(x-1)^2}=2^{2^2}$$

(with arrows: $(x-1) \to 2$, $2 \to 2$), comparando $x-1=2 \Rightarrow x=3$

$E=x^2+x+3=9+3+3=15$; la respuesta es **c**

(17) Resolver la ecuación: $2.3^{2x+1}-13.6^x+6.2^{2x}=0$, y dar como respuesta la suma de los cubos de las soluciones.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $a^{n+m}=a^n.a^m$, $(ab)^n=a^n.b^n$

$2.3^{2x}.3-13.(2.3)^x+6.2^{2x}=0$, de donde se tiene:

$6(3^x)^2-13.2^x.3^x+6(2^x)^2=0$, haciendo $A=2^x$, $B=3^x$

$6B^2-13AB+6A^2=0$, factorizando se tiene:

$(3B-2A)(2B-3A)=0 \Rightarrow 3B-2A=0 \vee 2B-3A=0$

$$\begin{cases}3B=2A\\2B=3A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3.3^x=2.2^x\\2.3^x=3.2^x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3^{x+1}=2^{x+1}\\3^{x-1}=2^{x-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+1=0\\x-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=-1\\x=1\end{matrix}$$

La suma de los cubos de las raíces: $(-1)^3+1^3=-1+1=0$

Por lo tanto la respuesta es **b**

(18) Al resolver: $x^x=\frac{1}{\sqrt[9]{3}}$. Hallar $x^{-1}+x^{-2}$

a) 760 b) 699 c) 756 d) 720 e) 701

Desarrollo

$$x^x=\frac{1}{\sqrt[9]{3}}=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{9}}=(\frac{1}{3})^{\frac{3}{3}.\frac{1}{9}}=(\frac{1}{27})^{\frac{1}{27}}$$

como $x^x=(\frac{1}{27})^{\frac{1}{27}}$ por la propiedad 4to de 13.2 se tiene $x=\frac{1}{27}$ entonces

$x^{-1}+x^{-2}=27+27^2=27+729=756$ por lo tanto la respuesta es **c**

(19) Hallar el valor de la incógnita x si $9^x + 3^x = 90$

a) 5 b) 3 c) 2 d) 4 e) 1

Desarrollo

Se conoce que: $9^x = (3.3)^x = 3^x.3^x = (3^x)^2$

Luego a la ecuación dada expresamos en la forma

$(3^x)^2 + 3^x - 90 = 0$, factorizando por el aspa

$$(3^x)^2 + 3^x - 90$$

$3^x \quad 10 \to 10.3^x$

$3^x \quad -9 \to -9.3^x$

3^x

$(3^x + 10)(3^x - 9) = 0 \Rightarrow 3^x + 10 = 0 \vee 3^x - 9 = 0$

Si: $3^x = -10$, como $3^x > 0$ entonces $\nexists\ x \in R$ que verifique

Si: $3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$, luego la respuesta es c

(20) Si $\underbrace{(2^{2x} + 2^{2x} + ... + 2^{2x})}_{1778 \text{ sumandos}} - \underbrace{(4^x + 4^x + ... + 4^x)}_{1776 \text{ sumandos}} = 128$. El valor de $E = (x - 1)x$ es:

a) 10 b) 6 c) 4 d) 2 e) 1

Desarrollo

$$\underbrace{(2^{2x} + 2^{2x} + ... + 2^{2x})}_{\underbrace{(4^x + 4^x + ... + 4^x)}_{1778 \text{ sumandos}}} - \underbrace{(4^x + 4^x + ... + 4^x)}_{1776 \text{ sumandos}} = 128$$

$\underbrace{1778(4^x) - 1776(4^x)} = 128 \Rightarrow 2.4^x = 128 \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3$ de donde $x = 3$

Luego $E = (x - 1)x = (3 - 1)(3) = 6$, la respuesta es b

(21) Si $x^{x^{x+x^{x}}} = 2^{64}$, Hallar el valor de x.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4

Desarrollo

$$x^{x^{x+x^{x}}} = (x^{x^{x}})^{x^{x^{x}}} = 2^{64} = 2^{4(16)} = (2^{4})^{16} = 16^{16}$$

como $(x^{x^{x}})^{x^{x^{x}}} = 16^{16}$ de donde a bases iguales le corresponde igual exponente entonces $x^{x^{x}} = 16 = 2^{4} = 2^{2^{2}}$

Luego $x^{x^{x}} = 2^{2^{2}}$ de donde x = 2, la respuesta es **b**

(22) Resolver la ecuación: $3^{16x+1} + 9^{8x-1} = 252$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{9}$

Desarrollo

$$3^{16x+1} + 9^{8x-1} = 3^{16x+1} + 3^{2(8x-1)} = 3^{16x+1} + 3^{16x-2} = 252$$

$3^{16x}(3+3^{-2}) = 28(9)$ de donde $\frac{28}{9}.3^{16x} = 28(9)$

$3^{16x} = 81 = 3^{4}$ entonces 16x = 4

$x = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$, por lo tanto la respuesta es **b**

(23) Hallar x^{-1} en: $8^{\sqrt{3}^{x}} = \sqrt[3]{2}^{9^{x}}$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

Desarrollo

$8^{\sqrt{3}^x} = (2^3)^{\sqrt{3}^x} = 2^{3.3^{\frac{x}{2}}} = 2^{3^{\frac{x}{2}+1}}$

$\sqrt[3]{2^{9^x}} = (2^{\frac{1}{3}})^{3^{2x}} = 2^{3^{2x-1}}$, reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2^{3^{\frac{x}{2}+1}} = 2^{3^{2x-1}} \Rightarrow \frac{x}{2}+1 = 2x-1 \Rightarrow 2x - \frac{x}{2} = 2$

$3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ de donde $x^{-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ la respuesta es **c**

(24) Calcular el valor de x de tal manera que $(5x)^x = 5^{5^5}$

a) 425 b) 525 c) 625 d) 725 e) 750

Desarrollo

Aplicando el caso 4to de (13.2) se tiene.

Elevando a la quinta miembro a miembro $[(5x)^x]^5 = (5^{5^5})^5 = 5^{5.5^5} = (5^5)^{(5^5)}$

$(5x)^{(5x)} = (5^5)^{(5^5)}$ entonces $5x = 5^5 \Rightarrow x = 5^4 = 625$

por lo tanto la respuesta es **c**

(25) La solución de la ecuación $\sqrt[x]{\frac{2}{x-1}} = (x-1)^{(x-2)}$ es:

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{2}-1$ c) $1-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) 1

Desarrollo

En la ecuación dada elevamos a la "x" es decir:

$(\sqrt[x]{\frac{2}{x-1}})^x = [(x-1)^{(x-2)}]^x$ de donde $\frac{2}{x-1} = (x-1)^{(x-2)x}$

$2 = (x-1).(x-1)^{x^2-2x} = (x-1)^{x^2-2x+1} = (x-1)^{(x-1)^2}$

Luego $(x-1)^{(x-1)^2}=2=\sqrt{2}^{(\sqrt{2})^2}$, de donde se tiene:

$(x-1)^{(x-1)^2}=(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow x-1=\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{2}+1$

por lo tanto la respuesta es **a**

(26) Si los números reales a y b, con a > 0, verifican la ecuación $a^{2b}+a^b-6=0$, entonces se cumple.

a) $\log_2 a=b$ b) $\log_a(-3)=b$ c) $\log_a 2=b$

d) $\log_2 2=-b$ e) $b^2=a$

Desarrollo

A la ecuación $a^{2b}+a^b-6=0$, factorizamos mediante el aspa

$a^{2b}+a^b-6$

$a^b \quad 3 \rightarrow 3a^b$

$a^b \quad -2 \rightarrow -2a^b$

a^b

$(a^b+3)(a^b-2)=0 \Rightarrow a^b-2=0 \lor a^b+3=0$; si $a^b=-3$ (absurdo)

$a^b-2=0 \Rightarrow a^b=2$ de donde $b=\log_a 2$, por lo tanto la respuesta es **c**

(27) Si $\log_a b=3$ y $\log_a 4a=2$, el valor de b es:

a) $2\sqrt[3]{2}$ b) 2 c) $4\sqrt[3]{2}$ d) $2\sqrt[5]{2}$ e) $2\sqrt[5]{8}$

Desarrollo

Por definición de logaritmo se tiene: $\log_a b=3$ entonces $b=a^3$ ... (1)

$\log_b 4a = 2$ entonces $4a = b^2$ de donde $\boxed{a = \frac{b^2}{4}}$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1)

$b = a^3 = (\frac{b^2}{4})^3 \Rightarrow b = \frac{b^6}{64} \Rightarrow b^5 = 64$; como $b \neq 0$ (base)

$b = 2\sqrt[5]{2}$, por lo tanto la respuesta es $\boxed{d}$

(28) Hallar el valor de: $\log_2(\frac{x}{z})$, si $\log_x(\frac{1}{9}) = 2$; $\log_{64} 2 = z$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{2}$

Desarrollo

Aplicando la definición de logaritmo se tiene: $\log_x \frac{1}{9} = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$

Como $x > 0$ entonces $x = \frac{1}{3}$

$\log_{64} 2 = z \Rightarrow 64^z = 2 \Rightarrow 2^{6z} = 2^1 \Rightarrow 6z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{6}$

calculando $\frac{x}{z} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{3} = 2$, por lo tanto $\log_2(\frac{x}{z}) = \log_2 2 = 1$, la respuesta es $\boxed{b}$

(29) Si $10^x = 18$, $10^y = 12$, entonces el valor de $\log_{10} 6$ es:

a) $\frac{2y - x}{3}$ b) $\frac{x - y}{3}$ c) $\frac{y - x}{3}$ d) $\frac{2x - y}{3}$ e) $\frac{x + y}{3}$

Desarrollo

Por definición de logaritmo se tiene:

$\begin{cases} 10^x = 18 \\ 10^y = 12 \end{cases}$ entonces $\begin{matrix} \log_{10} 10^x = \log_{10} 18 \\ \log_{10} 10^y = \log_{10} 12 \end{matrix}$ por propiedad

$$\begin{cases} x\log_{10}10 = \log_{10}18 \\ y\log_{10}10 = \log_{10}12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_{10}18 \\ y = \log_{10}12 \end{cases}$$ por la propiedad $\log_a a = 1$

como $x + y = \log_{10}18 + \log_{10}12 = \log_{10}(18)(12) = \log_{10}6^3 = 3\log_{10}6$

de donde $3\log_{10}6 = x + y \Rightarrow \log_{10}6 = \frac{x+y}{3}$, por lo tanto la respuesta es **e**

(30) Dada la siguiente ecuación: x log 4 + log (log 3) = log (log 81) el valor de x es:

a) 0 b) 1 c) 4 d) 3 e) 2

Desarrollo

Aplicando la propiedad $\log A^n = n\log A$ en la ecuación

x log 4 + log (log 3) = log (log 81) donde $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$

$\log 81 = \log 3^4 = 4\log 3$

2x log 2 + log (log 3) = log (4 log 3) = log 4 + log (log 3)

$2x\log 2 = \log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$

como 2x log 2 = 2 log 2 de donde x = 1, la respuesta es **b**

(31) Si log 2 = x, log 3 = y, el valor de la expresión $\log(\frac{8}{27}) - 3\log 60$ en términos de x e y es:

a) -3(2y + x) b) 3(2y + x) c) -3(2y – 1)

d) -3(2y + 1) e) -3(2y – x)

Desarrollo

Simplificando la expresión $\log(\frac{8}{27}) - 3\log 60$ de tal manera que quede en términos de log 2 y log 3

$$\log(\frac{8}{27})-3\log 60=\log(\frac{2}{3})^3-3\log(6)(10)\ =3\log\frac{2}{3}-3[\log 6+\log 10]$$

$$=3\log\frac{2}{3}-3[\log(2)(3)+1]=3\log 2-3\log 3-3\log 2-3\log 3-3$$

$= -6 \log 3 - 3 = -3\ (2 \log 3 + 1) = -3\ (2y + 1)$, la respuesta es **d**

(32) Si $6^{\log_2 3}+10^{\log x}=3^{\log_2 6}+\log_{\sqrt{x}} x$, el valor de x es:

a) 4 b) 5 c) 2 d) 1 e) 3

Desarrollo

Aplicando las propiedades:

$A^{\log_a B}=B^{\log_a A}$; $\log_{\sqrt{x}} x=\log_x x^2=2\log_x x=2$; $10^{\log x}=x$

$6^{\log_2 3}+10^{\log x}=3^{\log_2 6}+\log_{\sqrt{x}} x$, de donde $3^{\log_2 6}+10^{\log x}=3^{\log_2 6}+2$

simplificando se tiene $10^{\log x}=2$ de donde x = 2, la respuesta es **c**

(33) Si "a" y "b" son las raíces de la ecuación: $100x^2+10x+1=0$, entonces log 2a + log 5b valdría.

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Desarrollo

Como log 2a + log 5b = log (2a)(5b) = log (10ab) ... (1)

Teniendo en cuenta que a y b son las raíces de $100x^2+10x+1=0$ aplicamos la relación entre las raíces y los coeficientes es decir: $ab=\frac{1}{100}$ luego $10ab=\frac{1}{10}$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) o sea: $\log 2a+\log 5b=\log(10ab)=\log\frac{1}{10}=-1$

por lo tanto la respuesta es **b**

(34) Si $\log_3 5 = x$, el valor de $\log_{45} 243$ es:

a) $\frac{6}{x+4}$ b) $\frac{4}{x+3}$ c) $\frac{5}{x+2}$ d) $\frac{4}{x+5}$ e) $\frac{5}{x+3}$

Desarrollo

Aplicando la definición de logaritmo $\log_3 5 = x$ entonces $3^x = 5$

$\log_{45} 243 = y$ entonces $45^y = 243$ pero $(3^2.5)^y = (3^2.3^x)^y = 243 = 3^5$, de donde

$(3^2.3^x)^y = 3^5 \Rightarrow (3^{2+x})^y = 3^5$ entonces $3^{2y+xy} = 3^5$, como las bases son iguales, igualamos los exponentes $2y + xy = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{x+2}$

pero $y = \log_{45} 243 = \frac{5}{x+2}$, la respuesta es **c**

(35) Si $\log_{16} 12 = \frac{1}{2a}$, calcular $E = \log_{12} 48$

a) $\frac{1}{a}$ b) 2a c) a + 1 d) a − 1 e) 2a + 1

Desarrollo

$$\log_{16} 12 = \log_{4^2} 12 = \frac{1}{2}\log_4 12 = \frac{1}{2a} \Rightarrow \boxed{\log_4 12 = \frac{1}{a}}$$

además $\log_b N.\log_N b = 1 \Rightarrow \log_b N = \frac{1}{\log_N b}$

$$E = \log_{12} 48 = \log_{12}(12)(4) = \log_{12} 12 + \log_{12} 4 = 1 + \log_{12} 4 = 1 + \frac{1}{\log_4 12} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a}} = 1 + a$$

como E = 1 + a, la respuesta es **c**

(36) Simplificar la expresión $E=\log_{16}75-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}$

a) $\log 3$ b) $\log 2$ c) 1 d) 2 e) 4

Desarrollo

Aplicando las propiedades de logaritmo

$$E=\log(\frac{75}{16})-2\log(\frac{5}{9})+\log(\frac{32}{243})=\log(\frac{75}{16})+\log(\frac{32}{243})-\log(\frac{25}{81})$$

$$=\log(\frac{(\frac{32}{243})(\frac{75}{16})}{\frac{25}{81}})=\log(\frac{81.32.75}{25.243.16})=\log(\frac{3^4.2^5.3.5^2}{5^2.3^5.2^4})$$

$$=\log(\frac{3^5.2^5.5^2}{3^5.2^4.5^2})=\log 2$$, la respuesta es **b**

(37) Sabiendo que: $\log_b^2 a+1=x\log_b a$; a > 1 $\wedge$ b > 1. Calcular el valor de $E=\frac{x^3-3x}{\log_b^3 a+\log_a^3 b}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Al despejar x de la ecuación $\log_b^2 a+1=x\log_b a$, se tiene:

$$x=\frac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}=\frac{\log_b^2 a}{\log_b a}+\frac{1}{\log_b a}=\log_b a+\log_a b$$

como $x=\log_b a+\log_a b$, elevamos al cubo

$$x^3=\log_b^3 a+3\log_b^2 a.\log_a b+3\log_b a.\log_a^2 b+\log_a^3 b$$

$$x^3 = \log_b^3 a + \log_a^3 b + 3\underbrace{\log_b a.\log_a b}_{1}\underbrace{(\log_b a + \log_a b)}_{x}$$

$x^3 = \log_b^3 a + \log_a^3 b + 3x$, de donde se tiene: $x^3 - 3x = \log_b^3 a + \log_a^3 b$, ahora calculamos

$$E = \frac{x^3 - 3x}{\log_b^3 a + \log_a^3 b} = \frac{\log_b^3 a + \log_a^3 b}{\log_b^3 a + \log_a^3 b} = 1$$, la respuesta es **a**

(38) Si $\log_b a$ y $\log_b c$ son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a,b,c > 0; b ≠ 1, el valor de $E = (b^2 - 4ac)\log^2_{\frac{a}{c}} b$ es:

a) ab b) ac c) bc d) a^2 e) b^2

Desarrollo

Aplicando la relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se tiene, como $\log_b a$ y $\log_b c$ son las raíces de la ecuación entonces

$$\boxed{\log_b a + \log_b c = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\log_b a.\log_b c = \frac{c}{a}}$$

por la identidad de Legendre tenemos que:

$$\underbrace{(\log_b a + \log_b c)^2}_{(\frac{b}{a})^2} - \underbrace{(\log_b a - \log_b c)^2}_{\log_b^2 \frac{a}{c}} = 4\underbrace{\log_b a.\log_b c}_{\frac{c}{a}}$$

$(\frac{b}{a})^2 - \log_b^2(\frac{a}{c}) = 4\frac{c}{a}$ de donde $\log_b^2(\frac{a}{c}) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$ entonces

$$a^2\log_b^2\frac{a}{c}=b^2-4ac \Rightarrow a^2=(b^2-4ac)\frac{1}{\log_b^2\frac{a}{c}}$$

$a^2=(b^2-4ac)\log_{\frac{a}{c}}^2 b=E$ entonces como $E=a^2$ la respuesta es **d**

(39) Si $\log_b a^a=2$ y $\log_a b^b=4$, el valor de $E=\log_4 ab$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 2

Desarrollo

Aplicando la definición de logaritmo se tiene:

$$\begin{cases}\log_b a^a=2\\ \log_a b^b=4\end{cases} \text{ entonces } \begin{cases}a^a=b^2\\ b^b=a^4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^{ab}=b^{2b}\\ b^{2b}=a^8\end{cases} \Rightarrow a^{ab}=a^8$$

como $a^{ab}=a^8$, las bases son iguales, se igualan los exponentes **ab = 8**

ahora reemplazamos en la expresión.

$E=\log_4 ab=\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$ como $E=\frac{3}{2}$, la respuesta es **b**

(40) Si $\log 2=a$, $\log 3=b$, el valor de $E=\log_6 60$ es:

a) $\frac{a+b+1}{a+b}$ b) $\frac{a+b+1}{a-b}$ c) $\frac{a-b+1}{a+b}$

d) $\frac{a-b}{a+b}$ e) ab

Desarrollo

$$E=\log_6 60=\log_6(6)(10)=\log_6 6+\log_6 10=1+\underbrace{\log_6 10}_{\text{cambio de base}}$$

$$E = 1+\log_6 10 = 1+\frac{\log 10}{\log 6} = 1+\frac{1}{\log 6} = 1+\frac{1}{\log(2)(3)}$$ de donde $E = 1+\frac{1}{\log 2+\log 3}$ ... (1)

pero $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$E = 1+\frac{1}{\log 2+\log 3} = 1+\frac{1}{a+b} = \frac{a+b+1}{a+b}$$, la respuesta es **a**

(41) Al efectuar la operación $E = \frac{1}{\log_2(105)+1}+\frac{1}{\log_3(70)+1}+\frac{1}{\log_5(42)+1}+\frac{1}{\log_7(30)+1}$ se obtiene:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $\log_a a = 1$, $\log_a A+\log_a B = \log_a AB$

$$E = \frac{1}{\log_2(105)+1}+\frac{1}{\log_3(70)+1}+\frac{1}{\log_5(42)+1}+\frac{1}{\log_7(30)+1}$$

$$= \frac{1}{\log_2(105)+\log_2 2}+\frac{1}{\log_3(70)+\log_3 3}+\frac{1}{\log_5(42)+\log_5 5}+\frac{1}{\log_7(30)+\log_7 7}$$

$$= \frac{1}{\log_2 210}+\frac{1}{\log_3 210}+\frac{1}{\log_5 210}+\frac{1}{\log_7 210} = \log_{210} 2+\log_{210} 3+\log_{210} 5+\log_{210} 7$$

$= \log_{210}(2)(3)(5)(7) = \log_{210} 210 = 1$, la respuesta es **a**

(42) El valor de $E = \log_{\sqrt{a}} a.\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{a}$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$, $\log_a A^n = n\log_a A$

$$\log_{\sqrt{a}} a = \log_a a^2 = 2\log_a a = 2(1) = 2$$

$$\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\log_a a = \frac{3}{2}\log_a a = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$$

ahora reemplazamos en la expresión dada:

$E = \log_{\sqrt{a}} a . \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{a} = 2(\frac{3}{2}) = 3$, la respuesta es **b**

(43) Al simplificar la expresión $E = \frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$, se obtiene.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Desarrollo

Aplicando cambio de base: $\log_2 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 2}$

$$E = \frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2} = \frac{1+\frac{1}{\log_3 2}}{1-\frac{1}{\log_3 2}} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$$

$= \frac{1+\log_3 2}{\log_3 2 - 1} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2} = -\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2} = 0$, la respuesta es **a**

(44) La simplificación de $E = [\,^{\log_3 2}\sqrt[3]{4}.\,^{\log_2 3}\sqrt[3]{9}\,]^{\log_6 5}$ es:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

Desarrollo

Transformando a los radicales en uno solo

$$E = [{}^{\log_3}\sqrt[2]{4}.{}^{\log_2}\sqrt[3]{9}]^{\log_6 5} = [{}^{\log_3 2.\log_2}\sqrt[3]{4^{\log_2 3}.9^{\log_3 2}}]^{\log_6 5}$$

$$= [{}^{\log_2}\sqrt[2]{2^{2\log_2 3}.3^{2\log_3 2}}]^{\log_6 5} = [\sqrt[1]{2^{\log_2 9}.3^{\log_3 4}}]^{\log_6 5}$$

$$= [2^{\log_2 9}.3^{\log_3 4}]^{\log_6 5} = [9.4]^{\log_6 5} = (36)^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 25} = 25$$

(por la propiedad $2^{\log_2 9} = 9$, $3^{\log_3 4} = 4$)

por lo tanto la respuesta es **e**

(45) Si $a^2 + b^2 = 1$, la simplificación de $E = \dfrac{\log(a+b+1) - \log(a-b+1)}{\log a - \log(b+1)}$ es:

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 3

Desarrollo

Como $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - b^2 = (1+b)(1-b)$

Ahora tomamos logaritmo ha ambos miembros

$\log a^2 = \log(1+b)(1-b) \Rightarrow 2\log a = \log(1+b) + \log(1-b)$ ... (1)

a la expresión dada, multiplicamos y dividimos por 2

$$E = \frac{2\log(a+b+1) - 2\log(a-b+1)}{2\log a - 2\log(b+1)} \quad ...(2)$$

reemplazando (1) en (2) se tiene:

$$E = \frac{2\log(a+b+1) - 2\log(a-b+1)}{\log(1+b) + \log(1-b) - 2\log(b+1)} = \frac{\log(a+b+1)^2 - \log(a-b+1)^2}{\log(1-b) - \log(1+b)}$$

$$E = \frac{\log\left(\dfrac{(a+b+1)^2}{(a-b+1)^2}\right)}{\log\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)} \quad ...(3)$$

$$\begin{cases} (a+b+1)^2 = \underbrace{a^2+b^2}_{1}+1+2ab+2a+2b = 2(ab+a+b+1) \\ (a-b+1)^2 = \underbrace{a^2+b^2}_{1}+1-2b+2a-2ab = 2(1-b+a-ab) \end{cases} \quad \text{... (4)}$$

ahora reemplazamos (4) en (3), es decir:

$$E = \frac{\log(\frac{(a+b+1)^2}{(a-b+1)^2})}{\log(\frac{1-b}{1+b})} = \frac{\log(\frac{2(ab+a+b+1)}{2(1-b+a-ab)})}{\log(\frac{1-b}{1+b})} = \frac{\log(\frac{(a+1)(1+b)}{(a+1)(1-b)})}{\log(\frac{1-b}{1+b})}$$

$$= \frac{\log(\frac{1+b}{1-b})}{\log(\frac{1-b}{1+b})} = -\frac{\log(\frac{1-b}{1+b})}{\log(\frac{1-b}{1+b})} = -1,$$ como E = -1, la respuesta es **b**

(46) Si $a,b,c \in R^+ - \{1\}$ el valor de $E = \log_{a^b}(a^{\log b}).\log_{c^{\log b}}(c^{b^2})$

a) c b) a c) b d) a + b e) a − b

Desarrollo

Aplicando la propiedad $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$

$$\log_{a^b}(a^{\log b}) = \frac{\log b}{b}.\log_a a = \frac{\log b}{b}$$

$$\log_{c^{\log b}}(c^{b^2}) = \frac{b^2}{\log b}\log_c c = \frac{b^2}{\log b}$$

$$E = \log_{a^b}(a^{\log b}).\log_{c^{\log b}}(c^{b^2}) = \frac{\log b}{b}.\frac{b^2}{\log b} = b,$$ por lo tanto la respuesta es **c**

(47) La simplificación de $E = \dfrac{2^{2+\log_7 5} + 5^{\log_7 14}}{5^{\log_7 2}}$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$$E = \frac{2^{2+\log_7 5} + 5^{\log_7 14}}{5^{\log_7 2}} = \frac{2^2.2^{\log_7 5} + 5^{\log_7 (2)(7)}}{5^{\log_7 2}} = \frac{4.2^{\log_7 5} + 5^{\log_7 2 + \log_7 7}}{5^{\log_7 2}}$$

$$= \frac{4.5^{\log_7 2} + 5^{\log_7 (2)+1}}{5^{\log_7 2}} = \frac{4.5^{\log_7 2} + 5.5^{\log_7 2}}{5^{\log_7 2}} = \frac{(4+5)5^{\log_7 2}}{5^{\log_7 2}} = 4+5 = 9$$

Por lo tanto la respuesta es **e**

(48) Hallar $M = \sqrt[3]{(a^2-b)^{\log_2 25}}$ si $\log_{(a^2+b)} 2(a^4+b^2-4) = 2$

a) 25 b) -2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

$$\log_{(a^2+b)} 2(a^4+b^2-4) = \frac{\log_{10} 2(a^4+b^2-4)}{\log_{10}(a^2+b)} = \frac{\log 2(a^4+b^2-4)}{\log(a^2+b)} = 2$$

de donde $\log 2(a^4+b^2-4) = 2\log(a^2+b) = \log(a^2+b)^2$

$\log 2(a^4+b^2-4) = \log(a^2+b)^2$, levantando el logaritmo

$2(a^4+b^2-4) = (a^2+b)^2 = a^4+2a^2b+b^2$, simplificando

$a^4+b^2-2a^2b = 8 \Rightarrow (a^2-b)^2 = 2^3 \Rightarrow a^2-b = 2^{\frac{3}{2}}$

$$M = \sqrt[3]{(a^2-b)^{\log_2 25}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}\log_2 25}} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = 2^{\log_2 \sqrt{25}} = 2^{\log_2 5} = 5$$

por lo tanto la respuesta es **e**

(49) Calcular $E=\log_a b+\log_b c$ si $\log_b a+\log_c b=\log_c a$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Aplicando la propiedad de la regla de la cadena: $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y} \Rightarrow \log_y x.\log_x y=1$

$$\log_b a+\log_c b=\log_c a \Rightarrow \frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_b c}=\log_c a$$

$\dfrac{\log_b c+\log_a b}{\log_a b.\log_b c}=\log_c a$, de donde $\log_b c+\log_a b=\log_a b.\log_b c.\log_c a=\log_a a=1$

como $E=\log_a b+\log_b c=1$, entonces la respuesta es **a**

(50) Si $x=\log_a(bc)$; $y=\log_b(ac)$; $z=\log_c(ab)$, con a,b,c > 0; la simplificación de $E=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}$ es:

a) ab b) ac c) 1 d) 2 e) abc

Desarrollo

Aplicando la propiedad de la regla de la cadena: $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}$

$$1+x=1+\log_a(bc)=\log_a a+\log_a bc=\log_a(abc)$$

$$1+x=\log_a(abc)=\frac{1}{\log_{abc} a} \Rightarrow \frac{1}{1+x}=\log_{abc} a \quad \ldots (1)$$

$$1+y=1+\log_b ac=\log_b b+\log_b ac=\log_b abc$$

$$1+y=\log_b abc=\frac{1}{\log_{abc} b} \Rightarrow \frac{1}{1+y}=\log_{abc} b \quad \ldots (2)$$

$1+z=1+\log_c ab=\log_c c+\log_c ab=\log_c abc$

$1+z=\log_c abc=\dfrac{1}{\log_{abc} c} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{1+z}=\log_{abc} c$ ... (3)

ahora reemplazamos (1), (2) y (3) en la expresión dada

$$E=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\log_{abc} a+\log_{abc} b+\log_{abc} c=\log_{abc} abc=1$$

por lo tanto la respuesta es **c**

(51) Si: $6^{\log_2 3}+10^{\log x}=3^{\log_2 6}+\log_{\sqrt{x}} x$, el valor de x es:

a) 4 b) 5 c) 2 d) 1 e) 3

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $\log_a b=\log_{a^n} b^n$, $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ y además $x>0$

Como $6^{\log_2 3}=3^{\log_2 6}$ y $10^{\log x}=x$, $\log_{\sqrt{x}} x=\log_x x^2=2$

Al reemplazar en la ecuación dada se tiene:

$3^{\log_2 6}+x=3^{\log_2 6}+2$ simplificando se tiene $x=2$, la respuesta es **c**

(52) La raíz de la ecuación: $3\log x-\log 32=2\log\dfrac{x}{2}$ es:

a) 10 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2

Desarrollo

La ecuación está definida para $x>0$

Ahora aplicamos las propiedades: $n\log A=\log A^n$, $\log A-\log B=\log\dfrac{A}{B}$

$3\log x - \log 32 = 2\log\frac{x}{2}$ de donde $\log x^3 - \log 32 = \log(\frac{x}{2})^2$

$\log x^3 - \log\frac{x^2}{4} = \log 32 \Rightarrow \log\frac{x^3}{\frac{x^2}{4}} = \log 32$, simplificando

log 4x = log 32 de donde 4x = 32 entonces $x = \frac{32}{4} = 8$

como x = 8, la respuesta es **b**

(53) Calcular el valor de "x" si $81^{\log_9 2x} = x^3$

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

Desarrollo

$81^{\log_9 2x} = x^3$, aplicando la propiedad $81 = 9^2$

$9^{2\log_9 2x} = x^3$, aplicando la propiedad $2\log_9 2x = \log_9 (2x)^2$

$9^{\log_9 (2x)^2} = x^3$, aplicando la propiedad $a^{\log_a b} = b$

$(2x)^2 = x^3$, simplificando se tiene: $4x^2 = x^3$, como x > 0 entonces x = 4

Por lo tanto la respuesta es **c**

(54) Hallar el producto de los valores de x si: $(\log_x 7)(\log_{\frac{x}{7}} 7) + \log_{\frac{x}{2401}} 7 = 0$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 8

Desarrollo

Aplicando la propiedad de la regla de la cadena: $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$

$$\log_{\frac{x}{7}} 7 = \frac{1}{\log_7 \frac{x}{7}} = \frac{1}{\log_7 x - \log_7 7} = \frac{1}{\log_7 x - 1}$$

$$\log_{\frac{x}{2401}} 7 = \frac{1}{\log_7(\frac{x}{2401})} = \frac{1}{\log_7 x - \log_7 2401} = \frac{1}{\log_7 x - \log_7 7^4} = \frac{1}{\log_7 x - 4}$$

$$(\log_x 7)(\log_{\frac{x}{7}} 7) + \log_{\frac{x}{2401}} 7 = \frac{1}{\log_7 x}.\frac{1}{\log_7 x - 1} + \frac{1}{\log_7 x - 4} = 0$$

$\dfrac{1}{\log_7 x(\log_7 x - 1)} + \dfrac{1}{\log_7 x - 4} = 0$, efectuando la operación

$\log_7 x - 4 + \log_7 x(\log_7 x - 1) = 0$, efectuando $\log_7 x - 4 + \log_7^2 x - \log_7 x = 0$

simplificando se tiene: $\log_7^2 x = 4 \Rightarrow \log_7 x = \pm 2$

$\begin{cases} \log_7 x = 2 \\ \log_7 x = -2 \end{cases}$, de donde $\begin{cases} x_1 = 7^2 \\ x_2 = 7^{-2} \end{cases}$ son sus raíces

el producto es: $x_1.x_2 = 7^2.7^{-2} = 7^0 = 1$, la respuesta es **a**

(55) Calcular la suma de las raíces de la ecuación: $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

La ecuación dada se puede escribir así:

$\log(35 - x^3) = 3\log(5 - x)$, aplicando la propiedad $n \log A = \log A^n$

$\log(35 - x^3) = \log(5 - x)^3$, levantando el logaritmo

$35-x^3=(5-x)^3$, desarrollando el cubo $35-x^3=125-75x+15x^2-x^3$

simplificando y transponiendo términos $x^2-5x+6=0$, factorizando

$(x-3)(x-2)=0 \Rightarrow x-3=0 \vee x-2=0$ de donde

$x_1=3$, $x_2=2$ que son las raíces, entonces la suma: $x_1+x_2=3+2=5$

Por lo tanto la respuesta es **c**

(56) Hallar la suma de las raíces de la ecuación $\sqrt{\log_2 x}=\log_2\sqrt{x}$

a) 19 b) 17 c) 15 d) 13 e) 11

Desarrollo

$\sqrt{\log_2 x}=\log_2\sqrt{x}$, elevando al cuadrado

$\log_2 x=\log_2^2\sqrt{x}=\log_2^2 x^{\frac{1}{2}}$, aplicando la propiedad: $n\log A=\log A^n$

$\log_2 x=(\frac{1}{2}\log_2 x)^2=\frac{1}{4}\log_2^2 x$, transponiendo y factorizando

$\log_2^2 x-4\log_2 x=0$, sacando un factor común

$\log_2 x(\log_2 x-4)=0 \Rightarrow \log_2 x=0 \vee \log_2 x-4=0$

$\begin{cases}\log_2 x=0\\ \log_2 x=4\end{cases}$ de donde $\begin{cases}x_1=2^0=1\\ x_2=2^4=16\end{cases}$ son las raíces

la suma de las raíces: $x_1+x_2=1+16=17$, la respuesta es **b**

(57) Si $\log_x(12)-3\log_{x^2}4+\log_x 6=4$, calcular el valor de $E=x^4-3x^2+10$

a) 2 b) 4 c) 8 d) 10 e) 12

Desarrollo

$\log_x 12 - 3\log_{x^2} 4 + \log_x 6 = 4$, aplicando la propiedad $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$

$3\log_{x^2} 4 = 3\log_{x^2} 2^2 = 3(\frac{2}{2})\log_x 2 = 3\log_x 2 = \log_x 8$

$\log_x 12 - \log_x 8 + \log_x 6 = 4$, aplicando la propiedad de suma y resta.

$\log_x \frac{(12)(6)}{8} = 4$, simplificando $\log_x 9 = 4$ y por la definición de logaritmo.

$x^4 = 9 \Rightarrow x^4 - 9 = 0$, factorizando $(x^2-3)(x^2+3) = 0$, como $x^2+3>0$

simplificando se tiene $x^2 - 3 = 0$ de donde $x^2 = 3$

luego $E = x^4 - 3x^2 + 10 = 9 - 9 + 10 = 10$, la respuesta es **d**

(58) Hallar la suma de los cuadrados de x que son soluciones de la ecuación $2^{\log_x 9} + \frac{36}{3^{\log_x 4}} = 13$

a) 15 b) 13 c) 11 d) 9 e) 7

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$2^{\log_x 9} = 9^{\log_x 2} = 3^{2\log_x 2} = 3^{\log_x 4}$, reemplazando en la ecuación

$2^{\log_x 9} + \frac{36}{2^{\log_x 9}} = 13$, si $z = 2^{\log_x 9}$, la ecuación resulta

$z + \frac{36}{z} = 13$ de donde $z^2 - 13z + 36 = 0$, factorizando

$(z-9)(z-4) = 0$ entonces $z - 9 = 0 \lor z - 4 = 0$

$\begin{cases} z=9 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\log_x 9}=9 \\ 2^{\log_x 9}=4 \end{cases}$ entonces $\begin{cases} 9^{\log_x 2}=9 \\ 2^{\log_x 9}=2^2 \end{cases}$ bases iguales se igualan los exponentes

$\begin{cases} \log_x 2=1 \\ \log_x 9=2 \end{cases}$ de donde $\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2^2=9=3^2 \Rightarrow x_2=3 \end{array}$

nos piden: $x_1^2+x_2^2=4+9=13$, la respuesta es **b**

(59) Hallar la suma del conjunto solución de la ecuación $\log_2(x-2)+\log_2(3x+5)=2$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{7}{3}$

Desarrollo

La ecuación dada está definida si $x-2>0 \wedge 3x+5>0$

$\log_2(x-2)+\log_2(3x+5)=2$, aplicando la propiedad $\log_a A+\log_a B=\log_a AB$

$\log_2(x-2)(3x+5)=2$, por la definición de logaritmo

$(x-2)(3x+5)=2^2=4$, efectuando el producto $3x^2-x-14=0$, factorizando se tiene:

$(3x-7)(x+2)=0$ de donde $3x-7=0 \vee x+2=0$

$x=\frac{7}{3} \vee x=-2$, como la ecuación está definida para $x>2 \wedge x>-\frac{5}{3}$ entonces $x=-2$ no se considera, de donde la única soluciones es $x=\frac{7}{3}$, la respuesta es **e**

(60) Calcular el valor de $E=x^2-4x+2$, si $\log_2(x-3)-\log_3(x-3)=0$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Desarrollo

Mediante el cambio de base poner a la ecuación dada en logaritmos de una misma base

$\log_2(x-3)=\dfrac{\log_3(x-3)}{\log_3 2}$, reemplazando en la ecuación dada

$$\log_2(x-3)-\log_3(x-3)=\frac{\log_3(x-3)}{\log_3 2}-\log_3(x-3)=0$$

$\log_3(x-3)-\log_3(x-3)\log_3 2=0$, factorizando

$\log_3(x-3)(1-\log_3 2)=0$, como $\log_3 2\neq 1$, simplificamos

$\log_3(x-3)=0 \Rightarrow x-3=3^0=1 \Rightarrow \boxed{x=4}$

Luego $E=x^2-4x+2=16-16+2=2$, la respuesta es $\boxed{a}$

(61) Calcular el producto de los valores de x que satisfacen a la ecuación $7^{\log_x(x^2-10x+25)}=11^{2\log_x\sqrt{x}-1}$

a) 6 b) 12 c) 24 d) 30 e) 36

Desarrollo

La ecuación dada esta definida si $x^2-10x+25>0 \ \wedge \ x>0$

$7^{\log_x(x^2-10x+25)}=11^{2\log_x\sqrt{x}-1}$, aplicando la propiedad $n\log_a A=\log_a A^n$

$7^{\log_x(x^2-10x+25)}=11^{\log_x(\sqrt{x})^2-1}=11^{\log_x x-1}$, por la propiedad $\log_a a=1$

$7^{\log_x(x^2-10x+25)}=11^{1-1}=11^0=1$, calculando en base 7

$7^{\log_x(x^2-10x+25)}=7^0$, bases iguales se igualan exponentes.

$\log_x(x^2-10x+25)=0$, por definición de logaritmo

$x^2-10x+25=x^0, \ \forall \ x>0 \ \wedge \ x\neq 1$

$x^2-10x+25=1, \ \forall \ x>0 \ \wedge \ x\neq 1$

$x^2-10x+24=0$, $\forall$ $x>0$ $\wedge$ $x\neq 1$, factorizando

$(x-6)(x-4)=0$ de donde $x-6=0$ $\vee$ $x-4=0$

$x_1=6$, $x_2=4$ son los valores de x que satisfacen a la ecuación, pero nos piden el producto: $x_1.x_2=(6)(4)=24$, por lo tanto la respuesta es **c**

(62) En la siguiente ecuación $\log(x+9)-\frac{1}{2}\log(3x-8)=2-2\log 5$, un valor de x es:

a) 15 b) 10 c) 12 d) 9 e) 11

Desarrollo

$\log(x+9)-\frac{1}{2}\log(3x-8)=2-2\log 5$, aplicando propiedades de logaritmo

$\log(x+9)-\log\sqrt{3x-8}=\log 100-\log 25$, aplicar $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}$

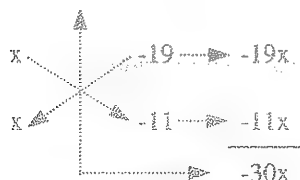
$\log(\frac{x+9}{\sqrt{3x-8}})=\log\frac{100}{25}$, levantando el logaritmo se tiene:

$\frac{x+9}{\sqrt{3x-8}}=\frac{100}{25}=4$, elevando al cuadrado

$\frac{(x+9)^2}{3x-8}=16$ entonces $(x+9)^2=16(3x-8)$, desarrollando

$x^2+18x+81=48x-128$, simplificando

$x^2-30x+209=0$, factorizando por el aspa



$(x-19)(x-11)=0$ de donde $x-19=0 \vee x-11=0$

$x=19 \vee x=11$ por lo tanto uno de estos valores coincide con las alternativas $x=11$

Por lo tanto la respuesta es **e**

(63) Hallar el valor de x de tal manera que: $2(5^{\log_7 x})+3(x^{\log_7 5})=125$

a) 39 b) 49 c) 59 d) 29 e) 19

Desarrollo

Se conoce que: $x^{\log_7 5}=5^{\log_7 x}$, reemplazando en la ecuación dada

$2(5^{\log_7 x})+3(x^{\log_7 5})=125 \Rightarrow 2(5^{\log_7 x})+3(5^{\log_7 x})=125$, simplificando

$5.5^{\log_7 x}=125 \Rightarrow 5^{\log_7 x}=25=5^2$, bases iguales se igualan los exponentes:

$\log_7 x=2 \Rightarrow x=7^2=49$ como $x=49$, la respuesta es **b**

(64) Hallar el producto de los valores de x que satisfacen a la ecuación $\log_3 x-2\log_{x^2} 9=1$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Se conoce que $\log_{x^2} 9=\log_{x^2} 3^2=\frac{2}{2}\log_x 3=\log_x 3$

$\log_3 x-2\log_{x^2} 9=\log_3 x-2\log_x 3=1$, aplicando $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$

entonces $\log_3 x-\frac{2}{\log_3 x}=1 \Rightarrow \log_3^2 x-\log_3 x-2=0$, factorizando

$(\log_3 x-2)(\log_3 x+1)=0 \Rightarrow \log_3 x-2=0 \vee \log_3 x+1=0$

$$\begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3^2 = 9 \\ x_2 = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ son las raíces}$$

Luego $x_1 . x_2 = 9(\frac{1}{3}) = 3$, la respuesta es **b**

(65) La solución de la ecuación $(\log_2 x)(\log_{\sqrt{x}} 8)\log_{(x^2+15)} 2 = 1$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Como $\log_{\sqrt{x}} 8 = \log_x 64 = \log_x 2^6 = 6\log_x 2$

$(\log_2 x)(\log_{\sqrt{x}} 8)\log_{(x^2+15)} 2 = 1$, reemplazando $\log_{\sqrt{x}} 8 = 6\log_x 2$

$(\log_2 x)(6\log_x 2)\log_{(x^2+15)} 2 = 1$, de donde se tiene

$$6\underbrace{\log_2 x . \log_x 2}_{1} . \log_{x^2+15} 2 = 1 \Rightarrow 6\log_{x^2+15} 2 = 1$$

$\log_{(x^2+15)} 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow (x^2+15)^{\frac{1}{6}} = 2$, elevando a la sexta

$x^2 + 15 = 64 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$, por lo tanto la respuesta es **d**

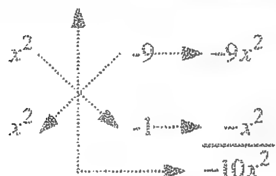
(66) Dos raíces positivas de la ecuación $x^{100^{\log 2}} - 10x^{10^{\log 2}} + 9 = 0$, son:

a) no existen b) 2; 2 c) 2; 4 d) 10; 100 e) 1; 3

Desarrollo

Se conoce $100^{\log 2} = 10^{\log 4} = 4$ y $10^{\log 2} = 2$, que reemplazando en la ecuación dada se obtiene:

$x^4-10x^2+9=0$, ahora factorizando por el aspa



$(x^2-9)(x^2-1)=0$, de donde $x^2-9=0 \lor x^2-1=0$

$\begin{cases} x^2=9 \\ x^2=1 \end{cases}$ entonces $\begin{cases} x=\pm 3 \\ x=\pm 1 \end{cases}$, entonces las raíces de la ecuación son $\{-3,-1,1,3\}$ de donde las raíces positivas son el 1 y 3 la respuesta es **e**

(67) Hallar el producto de las raíces de la ecuación $x^{\log_5 x}-(\frac{5}{\sqrt[12]{x}})^{12}=0$

a) 5 b) $\frac{1}{5}$ c) 3 d) $\frac{1}{3}$ e) 1

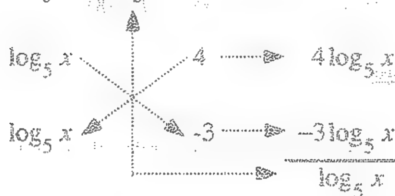
Desarrollo

Observamos que la ecuación esta definida para $x > 0$, entonces $x^{\log_5 x}=(\frac{5}{\sqrt[12]{x}})^{12}=\frac{5^{12}}{x}$, tomando logaritmo en base 5.

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 \frac{5^{12}}{x}$ donde $x > 0$, aplicando propiedad

$(\log_5 x)(\log_5 x)=\log_5 5^{12}-\log_5 x=12\log_5 5-\log_5 x=12-\log_5 x$

$\log_5^2 x+\log_5 x-12=0$, $x > 0$, factorizando



$(\log_5 x+4)(\log_5 x-3)=0$ de donde $\log_5 x+4=0 \vee \log_5 x-3=0$

$\begin{cases}\log_5 x=-4\\ \log_5 x=3\end{cases}$ entonces $\begin{cases}x_1=5^{-4}=\dfrac{1}{625}\\ x_2=5^3=125\end{cases}$, son las raíces

Luego el producto es $x_1.x_2=125(\frac{1}{625})=\frac{1}{5}$, la respuesta es **b**

(68) Resolver la ecuación: $81^{\log_3 x}-4.9^{\log_3 x}+4=0$

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 3 e) $\sqrt{3}$

Desarrollo

Como $81^{\log_3 x}=9^{2\log_3 x}=(9^{\log_3 x})^2$ por la propiedad $a^{nm}=(a^m)^n$

Ahora reemplazamos en la ecuación dada

$(9^{\log_3 x})^2-2(2)(9^{\log_3 x})+2^2=0$, es un cuadrado perfecto

$(9^{\log_3 x}-2)^2=0 \Rightarrow 9^{\log_3 x}-2=0$ de donde

$9^{\log_3 x}=2 \Rightarrow 3^{2\log_3 x}=2 \Rightarrow 3^{\log_3 x^2}=2$ por la propiedad $a^{\log_a b}=b$

$x^2=2$ de donde $x=\sqrt{2}$, la respuesta es **c**

(69) Hallar el producto de los valores de x, si: $x^{\ln x}=\left(\dfrac{e^3}{x}\right)^4$

a) e^{-5} b) e^{-4} c) e^{-3} d) e^{-2} e) e^{-1}

Desarrollo

$x^{\ln x}=\left(\dfrac{e^3}{x}\right)^4$, tomando logaritmo, ambos miembros

$\ln(x^{\ln x}) = \ln(\frac{e^3}{x})^4$, aplicando la propiedad $\ln A^x = x\ln A$

$\ln x.\ln x = 4\ln\frac{e^3}{x} = 4(\ln e^3 - \ln x) = 12 - 4\ln x$

$\ln^2 x + 4\ln x - 12 = 0$, factorizando por el aspa

ln x ↘ 6 → 6 ln x
ln x ↗ -2 → -2 ln x
4 ln x

$(\ln x + 6)(\ln x - 2) = 0$ de donde $\ln x + 6 = 0 \vee \ln x - 2 = 0$

$\begin{cases}\ln x = -6\\ \ln x = 2\end{cases}$ entonces $\begin{cases}x_1 = e^{-6}\\ x_2 = e^2\end{cases}$ son las raíces

el producto es: $x_1.x_2 = e^{-6}.e^2 = e^{-4}$, la respuesta es **b)**

(70) Hallar la suma de los valores de x que verifican la ecuación $(\frac{1}{\log_x 2} + 1)(\log_2 x - 1) = 0$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{7}{2}$ e) 3

Desarrollo

$(\frac{1}{\log_x 2} + 1)(\log_2 x - 1) = 0$, aplicando la propiedad: $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$

$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 0$ de donde $\log_2 x + 1 = 0 \vee \log_2 x - 1 = 0$

$\begin{cases}\log_2 x = -1\\ \log_2 x = 1\end{cases}$ entonces $\begin{cases}x_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}\\ x_2 = 2^1 = 2\end{cases}$

Luego $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$, la respuesta es **c**

(71) Calcular el valor de $E = x^2 - 3x + 7$, si el valor de x satisface la ecuación $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 72$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

$x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 72$, aplicamos la propiedad $\log 10^x = x$, $x\log 5 = \log 5^x$

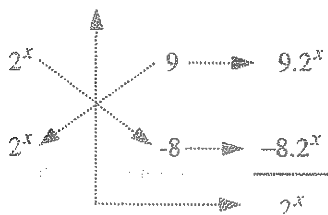
$\log 10^x + \log(1+2^x) = \log 5^x + \log 72$, por la propiedad $\log A + \log B = \log AB$

$\log(10^x(1+2^x)) = \log(5^x.72)$, levantando logaritmo

$10^x(1+2^x) = 5^x.72 \Rightarrow \frac{10^x}{5^x}(1+2^x) = 72$, simplificando

$2^x(1+2^x) = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0$, factorizando

$(2^x)^2 + 2^x - 72$



$(2^x + 9)(2^x - 8) = 0$ de donde $2^x + 9 = 0 \lor 2^x - 8 = 0$

$2^x = -9$ (absurdo) $(\rightarrow / \leftarrow)$

$2^x = 8 = 2^3$ de donde x = 3, que verifica a la ecuación

$E = x^2 - 3x + 7 = 9 - 9 + 7 = 7$, la respuesta es **d**

(72) Calcular $E=\sqrt[4]{x}$, donde x verifica la ecuación. $\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_9 x=10$

a) 1 b) 3 c) 9 d) 81 e) 241

Desarrollo

Poniendo a todos los logaritmos en la base 3

$\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{(\frac{1}{3})^{-1}} x^{-1}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$ ... (1)

$\log_{\sqrt{3}} x=\log_3 x^2=2\log_3 x$, por propiedad ... (2)

$\log_9 x=\log_3 \sqrt{x}=\frac{1}{2}\log_3 x$, por propiedad ... (3)

reemplazando (1), (2), (3) en la ecuación dada

$\log_3 x-\log_3 x+2\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x=10$, simplificando

$(2+\frac{1}{2})\log_3 x=10 \Rightarrow \frac{5}{2}\log_3 x=10 \Rightarrow \log_3 x=4$

como $\log_3 x=4$ entonces $x=3^4=81$

$E=\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$, la respuesta es [b]

(73) Hallar el producto de los valores de x que verifican a la ecuación:

$\log 8^{\log x}-\log x^x=\log 2^{\log_{\frac{1}{10}}\frac{1}{x}}$

a) 4 b) 2 c) log 4 e) log 2 e) 1

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $\log A^x=x\log A$, $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{x}=\log_a x$

$$\log 8^{\log x} - \log x^{x} = \log 2^{\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{x}}$$

$$\log x . \log 8 - x \log x = \log 2^{\log_{10} x} = \log 2^{\log x} = \log x . \log 2$$

$$\log x (\log 8 - x - \log 2) = 0 \Rightarrow \log x (\log \frac{8}{2} - x) = 0 \Rightarrow \log x (\log 4 - x) = 0$$

de donde $\log x = 0 \vee \log 4 - x = 0$

$$\begin{cases} \log x = 0 \\ x = \log 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 10^0 = 1 \\ x_2 = \log 4 \end{matrix} \quad \text{son las raíces}$$

luego $x_1 . x_2 = 1 . \log 4 = \log 4$, la respuesta es **c**

74 **Calcular la suma de las raíces de la ecuación** $\log_x 3 . \log_{\frac{x}{81}} 3 = \log_{\frac{x}{729}} 3$

a) 36 b) 18 c) 46 d) 26 e) 16

Desarrollo

Mediante la fórmula de cambio de base, transformar los logaritmos en base 3.

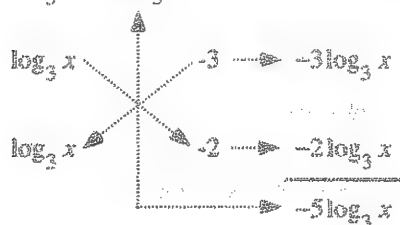
$$\log_x 3 . \log_{\frac{x}{81}} 3 = \log_{\frac{x}{729}} 3 \Rightarrow \frac{\log_3 3}{\log_3 x} . \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{81}} = \frac{1}{\log_3 \frac{x}{729}}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} . \frac{1}{\log_3 x - \log_3 81} = \frac{1}{\log_3 x - \log_3 729}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} . \frac{1}{\log_3 x - \log_3 3^4} = \frac{1}{\log_3 x - \log_3 3^6}, \text{ de donde}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} . \frac{1}{(\log_3 x - 4)} = \frac{1}{\log_3 x - 6}$$ de donde $\log_3 x - 6 = \log_3 x (\log_3 x - 4)$, efectuando

$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$, factorizando



$(\log_3 x - 3)(\log_3 x - 2) = 0$ de donde $\log_3 x - 3 = 0 \vee \log_3 x - 2 = 0$

$\begin{cases} \log_3 x = 3 \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3^3 = 27 \\ x_2 = 3^2 = 9 \end{cases}$ son las raíces

calculando la suma $x_1 + x_2 = 27 + 9 = 36$, la respuesta es **a**

(75) Hallar $E = 2x - 1$ si $x \neq 0$ y satisface a la ecuación $\log_3(x+3) = \log_9(x+1) + 1$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

<u>**Desarrollo**</u>

Poniendo los logaritmos en una misma base.

$\log_3(x+3) = \log_{3^2}(x+3)^2 = \log_9(x+3)^2$

$\log_9(x+1) + 1 = \log_9(x+1) + \log_9 9 = \log_9 9(x+1)$

ahora reemplazando en la ecuación dada

$\log_3(x+3) = \log_9(x+1) + 1 \Rightarrow \log_9(x+3)^2 = \log_9 9(x+1)$

levantando el logaritmo se tiene:

$(x+3)^2 = 9(x+1) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9x + 9$ simplificando

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0$

como $x \neq 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$E = 2x - 1 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$, la respuesta es **c**

(76) Calcular el valor de "a" sabiendo que la ecuación $\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} = 2\log 5 + \log 40$, tiene dos raíces cuyo producto es −15.

a) 98 b) 78 c) 68 d) 59 e) 48

Desarrollo

Aplicando propiedades de logaritmo se tiene:

$$\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} = 2\log 5 + \log 40 = \log 25 + \log 40 = \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x-2)} = 3 \Rightarrow \log(x^3 - a) = 3\log(x-2) = \log(x-2)^3$$

$\log(x^3 - a) = \log(x-2)^3$, levantando logaritmo se tiene:

$x^3 - a = (x-2)^3 \Rightarrow x^3 - a = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, simplificando $6x^2 - 12x + 8 - a = 0$

si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación de 2do grado por la relación de las raíces y coeficientes se tiene: $x_1 . x_2 = \frac{8-a}{6} = -15 \Rightarrow 8 - a = -90 \Rightarrow a = 98$

por lo tanto la respuesta es **a**

(77) Hallar la suma de las raíces de la ecuación $10^{\log_{a^2}(x^2-3x+5)} = 3^{\log_{a^2} 10}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$10^{\log_{a^2}(x^2-3x+5)} = 3^{\log_{a^2}10} = 10^{\log_{a^2}3}$, bases iguales

$\log_{a^2}(x^2-3x+5) = \log_{a^2}3$, levantando el logaritmo

$x^2-3x+5=3$ de donde $x^2-3x+2=0$, factorizando

$(x-2)(x-1)=0$ entonces $x-2=0 \lor x-1=0$

Luego $x_1=2$, $x_2=1$, cuya suma es $x_1+x_2=1+2=3$

Por lo tanto la respuesta es **b**

(78) La solución de la ecuación $\dfrac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Desarrollo

$$\frac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1 \Rightarrow 1+\log_2(x-4)=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})$$

$\log_2 2+\log_2(x-4)=\log_2(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})^2$, por propiedad

$\log_2 2(x-4)=\log_2(x+3+x-3-2\sqrt{x^2-9})$, simplificando

$\log_2 2(x-4)=\log_2(2x-2\sqrt{x^2-9})$, levantando el logaritmo

$2(x-4)=2x-2\sqrt{x^2-9} \Rightarrow 4=\sqrt{x^2-9}$ elevando al cuadrado

$16=x^2-9 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$ que se tiene $x=5$

porque es la solución de la ecuación original, por lo tanto la respuesta es **d**

(79) Calcular el valor de $E = x^2 + x + 5$ si el valor de x verifica a la ecuación $2^{\log_2(2x-3)} + 3^{\log_3(3x-4)} + 4^{\log_4(4x-2)} = 9$

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

Desarrollo

$2^{\log_2(2x-3)} + 3^{\log_3(3x-4)} + 4^{\log_4(4x-2)} = 9$, aplicando la propiedad $a^{\log_a b} = b$

$2x - 3 + 3x - 4 + 4x - 2 = 9$, simplificando se tiene $9x = 18$ de donde $x = 2$

Luego $E = x^2 + x + 5 = 4 + 2 + 5 = 11$, la respuesta es **d**

(80) Resolver la ecuación $\log_5 x^{\log_3 \sqrt{5}} = 2\log_2 3^{\log_x 2}$, para $0 < x < 1$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{7}$

Desarrollo

$\log_5 x^{\log_3 \sqrt{5}} = 2\log_2 3^{\log_x 2}$, aplicando la propiedad: $x^{\log_b a} = a^{\log_b x}$

$\log_5 \sqrt{5}^{\log_3 x} = 2\log_2 2^{\log_x 3}$, por la propiedad $n\log_a A = \log_a A^n$

$\log_5 5^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \log_2 2^{2\log_x 3}$, como $\log_a a = 1$ entonces

$\frac{1}{2}\log_3 x = 2\log_x 3$ por la propiedad $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$

$\frac{1}{2}\log_3 x = \frac{2}{\log_3 x}$, operando se tiene: $\log_3^2 x = 4$ de donde $\log_3 x = \pm 2$

para $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$ (descartado porque $0 < x < 1$)

$\log_3 x = -2 \;\Rightarrow\; x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ es la única solución

por lo tanto la respuesta es **c**

13.6. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Si $(2\sqrt[3]{7})^x = 3136$, entonces el valor de: $x^2 + 1$ es:

a) 32 b) 29 c) 76 d) 23 e) 37

② Si $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$, entonces x tiene el valor de

a) 74, 6 b) -74, 6 c) 8 d) 5 e) 1

③ Resolver: $x^{x^3} = 3$

a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[3]{3}$

④ El valor de x que satisface la ecuación $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ es:

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{4}$

⑤ Calcular $\frac{a^6 + 13}{7}$, sabiendo que $\frac{1}{a}$ es solución de la ecuación $4^x + \frac{5}{2} - \frac{9}{2^{2x}} = 0$

a) 7 b) 8 c) 2 d) 11 e) 5

⑥ Los valores de x que satisfacen la ecuación $x^{\sqrt{2x-1}} = (\sqrt{x})^x$ tiene como producto.

a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 12

⑦ Determinar el valor de $(2b)^{2x} - (2b)^{-2x}$ si se sabe que: $(2b)^{8x} + (2b)^{-8} = 7$ y $0 < b < \frac{1}{2}$

a) 3 b) -2 c) -1 d) 2 e) 1

(8) Calcular $E = x^2 - 2x + 5$, donde x satisface a la ecuación $(7^{8^x})^{4^x} = 7^{4^5}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

(9) Si x verifica a la ecuación $5^{-x+1} + 5^{-x} = 750.5^{-2x}$ calcular el valor de $E = \sqrt{2x+1}$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

(10) Calcular la suma de las soluciones de la ecuación $x^{3x-1} - x^{2x-1} - x^x + 1 = 0$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{7}{2}$

(11) Calcular el valor de "x" en la ecuación $\frac{3^{2x+2} + 3^{2x-1}}{3^{x-2} + 3^{x+1}} = 729$

a) 3 b) 5 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$ e) 2

(12) Calcular el valor de $E = (x-1)^{x+1}$, donde el valor de x satisface la ecuación $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(13) La raíz de la ecuación $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(14) Calcular el valor de $E = \sqrt{x^2 + 7}$ si x es raíz de la ecuación $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(15) Calcular el valor de $E = \sqrt{4x - 7}$ si x satisface la ecuación $\sqrt[6]{\frac{7^{14} + 7^x}{7^{x^2} + 7^2}} = 7$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

(16) La solución de la ecuación $(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^{4^{x}}=6^{8^{13}}$ es:

a) 10 b) 20 c) 15 d) 25 e) 5

(17) Calcular el valor de $E=\sqrt{x^{2}+9}$ donde x satisface la ecuación $5^{x+1}-5^{x}+5^{x+2}-5^{x-2}=18600$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(18) La solución de la ecuación $2^{2x+3}-3^{2x+1}=3^{2x+2}$ es:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

(19) La solución de la ecuación $4^{x}+4^{x+1}+4^{x+2}+4^{x+3}=1360$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(20) La solución de la ecuación $2^{8^{x-2}}=4^{4^{x+1}}$ es:

a) 1 b) 3 c) 6 d) 9 e) 11

(21) Hallar el valor de x en: $x^{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{64}$

(22) Calcular el valor de $E=x^{2}+x^{-2}$, donde x satisface la ecuación $x^{2x^{2}-2x}=x+1$

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}$

(23) Calcular la suma de las raíces de la ecuación $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^{x-10}=(2\sqrt{2})^{2}-(\sqrt{4+\sqrt{15}})^{x-10}$

a) 20 b) 12 c) 18 d) 15 e) 10

(24) Calcular el producto de las raíces de la ecuación $2(3^{\frac{2}{5}x+1}) - 13(6^{\frac{x}{5}}) + 6(2^{\frac{2}{5}x}) = 0$

a) 25 b) -25 c) 15 d) -8 e) 4

(25) Calcular el valor de $E = x^3 - 5x$, donde x satisface la ecuación $x^{(x-1)^2} = 2x+1$, es:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(26) La solución de la ecuación $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 3159$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(27) Calcular el valor de $E = \sqrt{2x^2 - 2}$, donde x satisface la ecuación $4^{x+1} - 6x = 2.9^{x+1}$

a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) 6 d) $\sqrt{6}$ e) 1

(28) Calcular el valor de $E = 9x^2 - 6x + 4$, donde x satisface la ecuación $\sqrt[x]{x^{x+1}} = 9$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(29) La solución de la ecuación $32^{5^{x+2}} = \sqrt[5^x]{2^{5^{12-x}}}$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(30) Calcular "x" de la ecuación $\sqrt[x-1]{\dfrac{x^{3x-20} - x^x}{x^x - x}} = x$

a) 19 b) 17 c) 15 d) 13 e) 11

(31) El valor de x en la ecuación $128^{7^{2x-9}} = \sqrt[5^x]{2^{5^{3x-8}}}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(32) Calcular la suma de las raíces de la ecuación $2^{2x} + 128 = 3.2^{x+3}$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(33) La solución de la ecuación $x^{x^{-x^{-2}}}=2$ es:

a) 2 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 3 d) 4 e) 5

(34) Hallar la solución de la ecuación $x^{x^5+x^7}+35=7x^{x^5}+5x^{x^7}$ es:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[5]{5}$ e) 2

(35) Calcular el valor de $E=\sqrt[x]{x^4}+\sqrt[4]{x^{x^2}}$, donde el valor de x satisface la ecuación $1+x^{x+1}=9$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(36) Calcular el valor de $E=x^2$, donde x es la raíz de la ecuación $2^{x+3}-2^{x+2}+2^{x+1}-2^x=50^x$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 4 d) $\frac{1}{4}$ e) 3

(37) Calcular el valor de E = x + 1, donde x es la raíz de la ecuación $27^{9^{x+1}}=\sqrt[3]{3}$

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) 5

(38) El valor de x que verifica la ecuación $(\sqrt{x}+1)^{(\sqrt{x}+1)^{(\sqrt{x}+1)^2}}=2$ es:

a) $(\sqrt{2}+1)^2$ b) $(\sqrt{2}-1)^2$ c) $\sqrt{2}$ d) 1 e) 3

(39) Calcular la raíz de la ecuación: $\sqrt{5}^{x-2}\cdot\sqrt[4]{125}^{x}=\sqrt[3]{125}^{x+2}\cdot\sqrt[16]{625}^{x+4}$

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{22}{5}$ d) $\frac{23}{5}$ e) $\frac{17}{5}$

(40) La solución de la ecuación $x^{x^{x^2-2}}=4$ es:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

41 El valor de x que verifica a la ecuación $\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{4^x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es:

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

42 Calcular el valor de $E = \sqrt[3x+1]{x^{x-2}}$, donde el valor de x satisface a la ecuación $x^{x^{\sqrt[4]{x}+0.25}} = \left(2^{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

43 La solución de la ecuación $\sqrt[x]{\frac{2}{x+1}} = (x+1)^{x+2}$ es:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $\sqrt{2}-1$ d) $3\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

44 Que valor debe tomar "n" en la ecuación $\sqrt[n^{2n}]{x^{n^{-n}}\sqrt[n^{-n}]{x^{n^{-n}}\sqrt{x^{\sqrt{2}-n^{-2n}}}}} = x^{2\sqrt{2}}$

a) 0.5 b) 0.25 c) 2 d) 4 e) 5

45 El valor de x que verifica a la ecuación $[(x^x)^{x^{-x}}]^x = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ es:

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

46 Determinar el valor de "a" en $\sqrt[x+1]{\frac{a^{x+1}+3^{2x+2}}{3^{4x+4}+a^{x+1}}} = \frac{1}{3}$

a) 7 b) 17 c) 27 d) 37 e) 47

47 Calcular el cociente de las soluciones de la ecuación $4^x - \frac{65}{8}(2^x)+1=0$

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) 5

(48) El valor de x que verifica a la ecuación $3^{x+2}+3^{2x}-2.3^{x+1}-(\sqrt{3^x})^4=81$, es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

(49) La relación que deben cumplir "x" e "y" para que se verifique la siguiente ecuación $\dfrac{\sqrt[y]{x^{x(y+1)}\, y^{y^2-x}}}{\sqrt[y]{x^x . y^{[illegible]}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, es:

a) y = 2x b) x = 2y c) y = 3x d) x = 3y e) x = y

(50) Calcular el valor de $E=\sqrt[4]{x}$, si se cumple $x^{-81^{81^x}}=81$

a) 1 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

(51) Hallar el valor de "b" de tal manera que: $\begin{cases}(\log_8 b)x-y=2\\ x-\log_b 8=3\end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(52) La solución de la ecuación $8^{27^{x-1}}=\sqrt[3]{2^{9^{x+3}}}$ es:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(53) Calcular x en: $3^{x+1}+3^{x-2}-\dfrac{15}{3^{x-1}}=\dfrac{247}{3^{x-2}}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(54) Dada la ecuación $x^{2x-1}=2$, hallar $\sqrt{x^{-1}}$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

(55) Al efectuar $E=(\log_3 2)(\log_2\sqrt{5})(\log_{\sqrt{5}} 9)$ se obtiene:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

56 Si $\log_{14} 28 = a+1$, calcular $E = \log_{49} 16$

a) $2a+1$ b) $1+a$ c) $\frac{2a}{1-a}$ d) $1-a$ e) $5a+2$

57 Si $\log_a b = 2$ y $\log_b c = 3$ el valor de $E = \log_{a^3}(b^2c^4)$ es:

a) $\frac{28}{3}$ b) $\frac{3}{28}$ c) $\frac{3}{11}$ d) $\frac{15}{7}$ e) $\frac{13}{6}$

58 Halle $E = (\log_9 3)(\log_{\sqrt[3]{2}} 3)(\log_{27} 5)(\log_{25} 4)$

a) 2 b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

59 Si $x = 2^{\log_3 a}$, el valor de $E = (3^{\log_a x} + x^{\log_a 3})^{0.5}$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

60 El valor de $E = \log_{0.25} 2\sqrt[3]{2} + 5^{\log_5 7}$ es:

a) $5\frac{1}{2}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $6\frac{1}{3}$ d) $6\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{3}$

61 Si $3^x = a$ y $9^x = b$ ¿cuál es el valor de $E = \log_b a$? $(x \neq 0)$

a) 3x b) $\frac{x}{2}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) -3

62 Si $\log_c a + \log_c b = 1$, si a, b, c > 0 y c ≠ 1, definimos $x_n = \log_c ac^{n-1} + \log_c bc^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, calcular el valor de $E = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n^2}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

63 Calcular "x" en: $\log x = \frac{1}{2}\log 64 - \frac{1}{3}\log 125 + 1$, y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(64) Calcular el valor de $E=\log_3(\log_6(\log_6 12+\log_6 3)+\log_6 108)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(65) El valor de $E=(^{\log_3 \sqrt[2]{4}}.^{\log_2 \sqrt[3]{9}})^{\log_6 5}$ es:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(66) Si $\log_x \frac{1}{2}=\sqrt{2}$ y $\log_{\frac{1}{2}} y=\sqrt{8}$ calcular $E=\log_y x$

a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{8}$

(67) Si $\log_2 b=3$ y $\log_b 4a=2$, calcular el valor de "b"

a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt[3]{2}$ d) $2\sqrt[5]{2}$ e) $2\sqrt[5]{8}$

(68) Si $a=\log_8 225$ y $b=\log_2 15$, entonces "a" en función de "b" es:

a) b b) 2b c) $\frac{b}{3}$ d) $\frac{2b}{3}$ e) $\frac{3b}{2}$

(69) El valor de la expresión $E=\sqrt{\dfrac{2^{2+\log_7 5}+5^{\log_7 14}}{5^{\log_7 2}}}$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(70) El valor de $E=\log_{\frac{1}{4}}(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log_{100}\log_{\sqrt[5]{7}}49+\log_{\sqrt[3]{2}}(\log_{\sqrt{5}}25)$ es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) 2

(71) Simplificar la expresión $E=2^{\log_3 8^{\log_4 3}}$

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{3}$ c) 6 d) $\sqrt{2}$ e) 7

(72) Si: $\log_3 x = k\log_6 x$; $\log_2 3 = B$, el valor de k es:

a) $1+B$ b) $\frac{B}{1+B}$ c) $\frac{1+B}{B}$ d) $\frac{1}{1+B}$ e) $\frac{B}{2}$

(73) El valor del producto de los factores $(\log_x 100)(\log x)(\log_{x+1}(x+1))$ es:

a) 2 b) 10 c) 1 d) 5 e) 8

(74) Al calcular el logaritmo de $a^m\sqrt[n]{a}$ en la base $a^n\sqrt[m]{a}$ m donde m, n > 0, a > 0 y a ≠ 1 obtenemos.

a) $\frac{n}{m}$ b) mn c) $\frac{m}{n}$ d) m e) n

(75) Si $\log_{xy} x = 5$, el valor de $E = \log_{xy}\frac{\sqrt[5]{x\sqrt{y}}}{\sqrt[3]{y}}$ es:

a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{29}{15}$ c) $\frac{19}{15}$ d) $\frac{13}{15}$ e) 1

(76) Si $\log_2 y = 3$ y $\log_8(\frac{x^2y^5}{2}) = 6$, halle: $\frac{|x|}{y}$

a) 2 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

(77) Si log 2 = x, log 3 = y, el valor de $E = \log_{\sqrt[3]{150}}\sqrt[5]{2.4}$ es:

a) $\frac{5x-5y+10}{3x+9y-3}$ b) $\frac{3x+9y-3}{5x-5y+10}$ c) $\frac{9x+3y-3}{5x+5y-10}$

d) $\frac{3y+9x-3}{5y-3x+10}$ e) x + y

(78) Si $\log_a bc = x^n$, $\log_b ac = y^n$, $\log_c ab = z^n$, para todo $n \in N$, calcular el valor de $E = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{y^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}}}$

a) 2n b) n c) n^2 d) $\frac{1}{n}$ e) $\frac{n}{2}$

(79) Si $x = \log_2 8$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 4$, calcular $\log_{3x}(x+y)$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

(80) Calcular x + y si $x = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2 = \log_y 0.25$

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

(81) Hallar la suma de las soluciones de la ecuación $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1$

a) -3 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

(82) Si $(\frac{1}{\log_x 3} + 2)(\log_3 x - 2) = 0$, hallar la suma de los valores de x

a) $\frac{80}{9}$ b) 8 c) $\frac{82}{9}$ d) $\frac{83}{9}$ e) 9

(83) Dado $\log_3(x-1) - 18\log_{x-1} 3 = 3$, hallar el mayor valor de x.

a) 344 b) 82 c) 487 d) 730 e) 244

(84) Hallar el mayor valor de x que satisface a la ecuación $\ln 27^{\ln x^2} - \ln 3^{\ln x^2} = \log_{\frac{1}{e}} x^{-x}$

a) $\frac{1}{2}$ b) ln 3 c) ln 2 d) 4 ln 3 e) 1

(85) Hallar el producto de los valores de x si $\log_{5x} 625 + \log_x \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = 0$

a) $5^{\frac{9}{2}}$ b) $5^{\frac{5}{2}}$ c) 1 d) $5^{\frac{7}{2}}$ e) $5^{\frac{3}{2}}$

(86) La solución de la ecuación $\log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_9 x = 10$ es:

a) 81 b) 71 c) 61 d) 51 e) 41

(87) La ecuación $\log_x 5 . \log_{\frac{x}{5}} 5 + \log_{\frac{x}{625}} 5 = 0$ tiene como solución a:

a) $125; \frac{1}{125}$ b) $5, \frac{1}{5}$ c) $25, \frac{1}{25}$ d) 1, 2 e) $2, \frac{1}{2}$

(88) Consideremos la ecuación $\frac{\log(\sqrt{x^3}+37)}{\log(\sqrt{x}+1)} = 3$, hallar las soluciones reales.

a) 16 b) 9 c) 16 y 9

d) 4 y 3 e) no tiene solución real

(89) Hallar la solución de la ecuación $\log_5(x^{\log_5 x}) = 4$ e indique la mayor solución.

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(90) Dada la ecuación: $\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6$, determinar la suma de sus raíces.

a) $\log_3 280$ b) $\log_3 280 + 3$ c) $\log_3 280 - 3$

d) 3 e) 2

(91) Hallar el valor de x que satisface la ecuación $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3) = \log_{27} 81 + \log_2(\frac{\sqrt[3]{4}}{2})$

a) 1 b) $\frac{5}{2}$ c) $1; \frac{5}{2}$ d) 1, 5 d) 5

92) El producto de soluciones de la ecuación $6+5\log_2 x = \dfrac{1}{\log_x^2 2}$ es:

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

93) Hallar el valor de x en: $\dfrac{\log\sqrt{x^2+2x-3}}{\log\sqrt[3]{x^3-1}} = \dfrac{3}{2}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) 2 d) 3 e) $\sqrt{3}$

94) Hallar el número de soluciones de la ecuación $\log_{\sqrt{x-7}}\sqrt{x^2+x} = 2$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

95) Cuantas soluciones reales tiene la ecuación $\log|x| + x^2 + 4 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

96) Calcular la suma de solucione de: $\log_5(5^{\frac{1}{x}}+125) = \log_5 30 + \dfrac{1}{2x}$

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{5}{4}$ d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{4}{5}$

97) Si $\log_5(\log_4(\log_3(\log_2 x))) = 1$, hallar x

a) 2^{512} b) 3^{512} c) $5^{3^{1024}}$ d) 5^{49} e) $2^{3^{1024}}$

98) Resolver la siguiente ecuación $\log_4(2x^2+15x+26) = 3$. La suma de las soluciones es:

a) $-\dfrac{15}{2}$ b) $\dfrac{17}{2}$ c) 2 d) $\dfrac{13}{2}$ e) $-\dfrac{13}{2}$

99) Hallar $M = \sqrt[3]{|a^2-b|^{\log_2 25}}$ si $\log_{a^2+b} 2(a^4+b^2-4) = 2$

a) 25 b) -2 c) 3 d) 4 e) 5

100 ¿Para que valores de "a" la ecuación $\log(x^2+2ax)-\log(8x-6a-3)=0$ ofrecerá solución real única?

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

101 La suma de las soluciones de $1+2\log|x|-\log(x+2)=0$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{10}$

102 El producto de la ecuación $\log_4^2 x-3\log_8 x=8$, es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$

103 Hallar la suma de las raíces de la ecuación $\log_5^2(\frac{x}{125})+\log_5^2(25x)=\log_5 x^6+7$

a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

104 El valor de x que satisface la ecuación $\log_5(x-1)+\log_5(x-3)=3\log_5 2$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

105 Halle $\log_{64} x^2$, luego de resolver la ecuación siguiente: $\log_x(5-x)+\frac{1}{\log_{x+2} x}=\log_x 6$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{2}$

106 Calcular $\log_2 x$, si $\log_a 64.\log_x a=\log_b c.\log_x b.\log_c x^6$, si $1<ab<c$

a) -1 b) 1 c) 3 d) 5 e) 6

107 Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $25^{\log_x 3}=(x^2-5x+15)^{\log_x 5}$. Calcular $E=\frac{x_1.x_2}{1+x_1+x_2}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

108 Hallar el producto de las soluciones de la ecuación: $\ln x^{\ln x} + \ln\sqrt[3]{e^4} = \ln x^{2e}$

a) e^{-e} b) e c) e^e d) e^{2e} e) $5e$

109 Hallar el producto de las raíces de la ecuación $\log_x 3 + \log_{10x} 27 + \log_{\frac{x}{10}} \frac{1}{9} = 0$

a) $\sqrt{10}$ b) $10\sqrt{10}$ c) $100\sqrt{10}$ d) 100 e) 10

110 Considerar la ecuación: $x^{\log x} - \frac{10^6}{x} = 0$, calcular el producto de sus raíces.

a) 10 b) 10^2 c) 10^{-2} d) 10^3 e) 10^{-1}

111 Resolver la ecuación: $\log_x 2.\log_{\sqrt{2}} x^3.\log_2 8 = x$

a) 4 b) 9 c) 10 d) 18 e) 20

112 Hallar la suma de las soluciones de la ecuación $\log_{3x}(\frac{3}{x}) + \log_3^2 x = 1$

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{13}{4}$ c) 4 d) $\frac{28}{9}$ e) $\frac{37}{9}$

113 Halle el producto de los valores de x que satisfacen a la ecuación $|\log_3 x + 1|^2 + 3\log_3 x = 1$

a) 3^{-5} b) 2^{-3} c) 2^{-5} d) 3^5 e) 1

114 El valor de x que verifica a la ecuación $\log x^3 - \log 16 = \log \frac{x^2}{2}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

115 Resolver la ecuación $\log_5 x^{\log_5 x} - \log_5 x - 12 = 0$ y proporcione el producto de los valores de x

a) 5^2 b) 5 c) 1 d) 5^{-1} e) 5^{-2}

116 Uno de los resultados que se obtiene al resolver la ecuación $\frac{\ln(35-x^2)}{\ln(5-x)}=3$, es:

a) -1 b) 1 c) -2 d) 2 e) -3

117 Si $\log_2 4+\log_2 4^2+...+\log_2 4^n=\log_2 4^5$, el valor de n es:

a) 4 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

118 Si $\log_4 y=2$ y $\log_4(\frac{x^2y^3}{16})=5$, el valor de $|x|$ es:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) 4

119 Halle las raíces de la siguiente ecuación: $\log_2(\log_4(\log_{16}(x^2)))=1$

a) $x_1=16^4$, $x_2=16^4$ b) $x_1=16^8$, $x_2=16^{-8}$ c) $x_1=16^{16}$, $x_2=-16^{16}$

d) $x_1=4^{16}$, $x_2=-4^{16}$ e) $x_1=2^{16}$; $x_2=-2^{16}$

120 Si se verifica que: $\log_{\frac{11}{10}}(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)})^{-n}=n$, calcule $\log(n^2+10n)$

a) 3 log 2 b) 2 log 2 c) 3 + log 2 d) 2 + log 2 e) 2 + log3

121 Al resolver la ecuación: $\log_2(x^2+7)-\log_4(3x+1)=\log_8(x^2-9)^3-\log_4(x-1)$ se obtiene un polinomio que es divisible por:

a) x^2-25 b) $x^4+6x^3-4x^2-22x-13$ c) $x^4-6x^3+4x^2+22x+13$

d) $x^4-6x^3-4x^2+22x+13$ e) x^3-125

(122) El valor de b que satisface la igualdad $\log_b \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2}$ es:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) 5 e) 25

(123) Si x es un número real y $\sqrt[x^2-1]{\log_a(x^{\frac{1}{x^x}})} = x^{\frac{2}{x^x}}$ donde $a = x^{(\frac{1}{x})^x}$ entonces el valor de x es

a) $-\sqrt{3}$ b) 3 c) 9 d) $3\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$

(124) Resolver para x: $\log(2x-1)^n + \log(x-1)^{10\log n} = n$

a) n; $-\frac{5}{2}$ b) 3 c) n; -3 d) -5 e) n; 1

(125) Consideremos $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 64$, $b_4 = 4096$, $b_5 = 2^{20}$, $b_6 = 2^{30}$ si $\log_{b_1} x + \log_{b_2} x + \log_{b_3} x + \log_{b_4} x + \log_{b_5} x = \frac{55}{6}$, calcular el valor de x

a) 16 b) 64 c) 128 d) 32 e) 512

(126) El valor de x diferente de 1 que verifica: $\log x^2 = (\log x)^2$ es:

a) 10 b) 2 c) 100 d) 0.1 e) 0.01

(127) Hallar el valor de x que verifica a la ecuación $\log_b(x^2 - 2\sqrt{a}x + 2a)^{\log_a b} = 1$

a) $\sqrt{a}$ b) a c) $2\sqrt{a}$ d) 3a e) 2

(128) Hallar la suma de las raíces de la ecuación $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(129) Hallar la suma de las raíces de la ecuación $\log_2(x^2 - 3x + 6) - \log_2(x-1) = 2$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

130. La solución de la ecuación $\log\sqrt{7x+4}+\log\sqrt{2x+3}=1+\log(1.5)$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

131. La solución de la ecuación $\log_3(-x^2-8x-14).\log_{(x^2+4x+4)}9=1$ es:

a) -4 b) -2 c) 2 d) 4 e) 6

132. Hallar la solución de: $\log\sqrt{\frac{7x}{3}+5}+\frac{1}{2}\log(\frac{2x}{3}+7)=1+\log\frac{9}{2}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

133. La suma de las raíces de la ecuación $\log(\frac{x^3}{27}+8)-\log_9(\frac{x}{3}+2)=\log_9 7$ es:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

134. La solución de la ecuación $2\log(\sqrt{5x+\frac{5x}{24}}+\sqrt{\frac{5x}{24}})=\log 30-\log 2$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

135. La solución de la ecuación $8+\log_3(4^{\log_3 3x})=\log_3(36^{\log_3 3x})$ es:

a) 6 b) 12 c) 18 d) 27 e) 21

136. La solución de la ecuación $\log_7(x-2)+\log_7(x-5)=2\log_7 2$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

137. El producto de las raíces de la ecuación $\frac{\log_2 x+6}{\log_{\sqrt{x}} 2+2}=4$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

138 La suma de las raíces de la ecuación $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$ es:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 13 e) 17

139 La suma de las raíces de la ecuación $\dfrac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$ es:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 4 e) 6

140 Calcular el valor de x, que satisface a la ecuación $\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2 = 4$

a) -5 b) -3 c) -1 d) 1 e) 2

141 La solución de la ecuación $\sqrt{1+\log_5 x} + \sqrt{4\log_{25} x - 2} = 4$ es:

a) 125 b) 75 c) 45 d) 25 e) 5

142 La solución de la ecuación $x + \log_6(3^x - 2) = x\log_6 2 + \log_6 63$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

143 Si z es una solución de la ecuación $\log_4[\log_3(\log_2 z)] = 0$ entonces el valor de $z^2 + 2z + 1$ es:

a) 70 b) 72 c) 80 d) 81 e) 84

144 La suma de las soluciones de $\log(25-x^2) - \log(x+1)^2 = 0$ es:

a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

145 La suma de las soluciones de $\log_2^3 x + 4\log_2^2 x + 3\log_2 x = 0$ es:

a) $\dfrac{7}{8}$ b) $\dfrac{9}{8}$ c) $\dfrac{11}{8}$ d) $\dfrac{13}{8}$ e) $\dfrac{15}{8}$

146 Hallar el producto de las raíces de: $3\log(5-x) = \log(35-x^3)$

a) 2 b) 3 c) 6 d) 5 e) 8

147 Si $\log_2(\log_3(\log_{10} x)) = 1$, hallar: $\log x$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 9 e) 6

148 Hallar x si: $\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 = 6$

a) 4 b) 2 c) 3 d) 5 e) 1

149 Si: $2^{\log_2(2x+3)} + 5^{\log_5(x+7)} = 7^{\log_7(2x+18)}$, entonces $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ es:

a) 2 b) 4 c) 9 d) 8 e) 6

150 Hallar el valor de $E = \sqrt{x}$, donde x es la solución de la ecuación $\log_2 x - 8\log_{x^2} 2 = 3$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 3 e) 5

151 Si $\sqrt{x+ab} - \sqrt{x-ab} = ab$; $\log y = \sqrt{x+ab} + \sqrt{x-ab}$, calcular el valor de y.

a) 10 b) 100 c) ab d) $\dfrac{a}{b}$ e) a + b

152 La solución de la ecuación $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 72$ es:

a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) 4

153 Hallar la suma de las soluciones de la ecuación $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024$

a) $\dfrac{25}{8}$ b) $\dfrac{35}{8}$ c) $\dfrac{45}{8}$ d) $\dfrac{55}{8}$ e) $\dfrac{65}{8}$

154 Calcular el valor de $E = \sqrt[8]{x}$, donde x verifica a la ecuación: $5\log_2 x - 3\log_4 x = 56$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

155 Calcular una raíz de la ecuación: $\log^2 x + x^{\log_x \log x} = 6$

a) 10 b) 10^2 c) 10^3 d) 10^4 e) 10^5

(156) Resolver la ecuación: $\log_5 x^{\log_5 x} - \log_5^2 x - 12 = 0$ y proporcione el producto de los valores de x

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(157) Resolver $\log_2 x - 8\log_{x^2} 2 - 5^{\log_5 3} = 0$ y dar el producto de las raíces.

a) $\frac{17}{3}$ b) $\frac{12}{2}$ c) $\frac{16}{8}$ d) $\frac{33}{2}$ e) $\frac{47}{2}$

(158) El valor de x que verifica a la ecuación $\log_{2x}(x+\frac{1}{x}) = \log_{\frac{1}{x}}(x+\frac{1}{x})$ es:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{3}$

(159) El valor de x que verifica a la ecuación $\log(2x-1)^{2003} + \log(x-1)^{10^{\log 2003}} = 2003$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(160) A partir de la ecuación: $(\log_x a + \log_x x^2)(\log_a a^2 + \log_a x) = \log_a a^{10}$ donde $a > 0$, $a \neq 1$. Hallar un valor de x.

a) $\sqrt[4]{a}$ b) a c) $\sqrt{a}$ d) 2 e) 3

(161) El producto de los valores de x que verifican a la ecuación $\frac{100^{\log x}+1}{10^{\log_{100} x^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 1 e) 0

(162) La solución de la ecuación $\log_2 x + \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x^2 = 7.5$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(163) La solución de la ecuación $\log\sqrt{x+14} + \log\sqrt{x+7} - \log(1.2) = 1$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

164 El valor de x en la ecuación $\dfrac{\log(\sqrt{x^3}+19)}{\log(\sqrt{x}+1)}=3$ es:

a) 4 b) $\dfrac{1}{4}$ c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) 7

165 Determinar el menor valor de x que satisface a la ecuación $\log(x^{\log x})+\log x^2-4\log_2 4=0$

a) 0.01 b) 0.001 c) 0.0001 d) 0.00001 e) 100

166 Hallar el valor de x en: $\log_x 15+2\log_{x^2} 50-\log_x 6=3$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

167 Hallar el valor de x que verifica a la ecuación $\dfrac{2\log 2+\log(x-3)}{\log(7x+1)+\log(x-6)+\log 3}=\dfrac{1}{2}$

a) 1 b) 3 c) 6 d) 9 e) 11

168 El valor de x que verifica a la ecuación $\log(x+8)^4-\log(x-1)^4=4$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

169 La suma de las raíces de la ecuación $\log 8^{\log x}-\log 2^{\log x}=\log_x x$ es:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

170 El valor de x que verifica a la ecuación $\log_3(-x^2-8x+4)=\log_9(x^2+4x+4)$

a) -8 b) -6 c) -4 d) -2 e) 2

13.7. RESPUESTAS.-

1	e	2	d	3	e	4	b	5	d	6	c	7	c	8	c
9	a	10	c	11	b	12	a	13	c	14	d	15	c	16	b
17	c	18	a	19	b	20	d	21	d	22	c	23	a	24	b
25	d	26	b	27	d	28	d	29	b	30	a	31	d	32	d
33	b	34	d	35	c	36	d	37	a	38	b	39	c	40	a
41	b	42	d	43	c	44	a	45	b	46	c	47	b	48	a
49	c	50	b	51	b	52	e	53	b	54	a	55	b	56	c
57	a	58	c	59	a	60	c	61	b	62	a	63	c	64	a
65	e	66	a	67	d	68	d	69	b	70	d	71	a	72	b
73	a	74	c	75	b	76	e	77	d	78	d	79	a	80	c
81	a	82	c	83	d	84	d	85	d	86	a	87	c	88	b
89	e	90	c	91	c	92	d	93	a	94	e	95	c	96	b
97	e	98	a	99	e	100	b	101	e	102	d	103	b	104	c
105	b	106	b	107	a	108	d	109	c	110	e	111	d	112	e
113	a	114	d	115	b	116	d	117	c	118	d	119	b	120	d.
121	b	122	c	123	e	124	b	125	d	126	c	127	a	128	c
129	d	130	c	131	a	132	e	133	b	134	b	135	d	136	c
137	d	138	c	139	b	140	d	141	a	142	b	143	d	144	a
145	d	146	c	147	d	148	a	149	c	150	b	151	b	152	c
153	e	154	b	155	b	156	c	157	c	158	a	159	b	160	c
161	d	162	d	163	b	164	b	165	a	166	c	167	c	168	d
169	a	170	c												

CAPÍTULO XIV

14. PROGRESIONES: ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.-

14.1. INTRODUCCIÓN.-

Al igual que los números naturales que están ordenados, también a los conjuntos de elementos cualquiera se le puede ordenar, en forma similar; cuando a los elementos de un conjunto se le hace corresponder los números naturales, el elemento al que corresponde el número 1, es el primero, al que corresponde el número 2 es el segundo, etc.

Esta ordenación que se produce entre los elementos de un conjunto obedece únicamente al número natural que corresponde a cada elemento del conjunto.

Cuando a los elementos de un conjunto se le pone en correspondencia con los números naturales 1,2,3,4,...; de tal manera que a cada elemento del conjunto le asigna un número natural correspondiente, el conjunto se convierte en una sucesión.

14.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos sucesión a un conjunto de números que aparecen ordenados mediante una ley o regla de formación.

Ejemplos.- ① 2,4,6,8,10,...

② $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},...$

En general, a toda sucesión numérica escribiremos así:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ...$$

Primer término ⟶ a_1 ; a_k ⟵ k – esimo término

Al número a_1 le llamaremos primer término de la sucesión.

Al número a_2 le llamaremos segundo término de la sucesión.

Al número a_3 le llamaremos tercer término de la sucesión, etc.

Las sucesiones pueden ser finitas e infinitas.

Una sucesión es finita cuando tiene un número limitado de términos y una sucesión es infinita cuando tiene un número ilimitado de términos.

Ahora estudiaremos 2 tipos especiales de progresiones; Progresiones Aritméticas (P.A.) y Progresiones Geométricas (P.G.)

14.3. PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A.).-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos progresión aritmética a una sucesión de números de tal manera que cualquier término diferente del primero se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante, llamada razón o diferencia de la progresión, a las progresiones aritméticas, también se les conoce como progresiones por diferencia.

b) **SIMBOLOGÍA.-**

a_1 = primer término

a_n = término n – ésimo (o último término)

n = número de términos

r = razón de la progresión aritmética

S = suma de los términos de la P.A.

c) **REPRESENTACIÓN DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.-**

$\div a_1 . a_2 . a_3 ... a_n$, donde

$\div$ = inicio de la progresión aritmética

. = separación de términos.

Por definición de progresión aritmética se tiene:

$a_n = a_{n-1} + r$, de donde resulta que: $\boxed{r = a_n - a_{n-1}}$

Es decir que la razón se obtiene restando de un término cualquiera su inmediato anterior.

14.4. CLASES DE PROGRESIÓN ARITMÉTICA.-

La razón r de una progresión aritmética, puede ser cualquier número real diferente de cero, y de acuerdo al valor de r las progresiones aritméticas son de dos clases.

Si $r > 0$, la progresión aritmética (P.A.) es creciente.

Si $r < 0$, la progresión aritmética (P.A.) es decreciente.

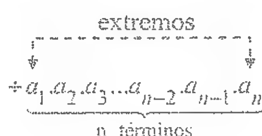
Ejemplos.-

(1) La progresión aritmética ÷ 3.8.13.18...., es creciente puesto que $r = 8 - 3 = 5 > 0$.

(2) La progresión aritmética ÷ 7.4.1.-2...., es decreciente puesto que $r = 4 - 7 = -3 < 0$

La progresión aritmética se llama limitada cuando tiene un número finito de términos, llamándose al primero y al último términos extremos.

Ejemplo.-



La progresión aritmética se llama ilimitada cuando tiene infinitos términos.

Ejemplo.- $\div a_1 . a_2 . a_3 ... a_n ...$

14.5. PROPIEDADES DE LA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.-

(1) La diferencia entre dos términos consecutivos es constante e igual a la razón r, es decir:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} = ... = a_n - a_{n-1}$$

Ejemplo.- $\div 8 . 11 . 14 . 17 .....$, $r = 3$ (con diferencias 3, 3, 3)

(2) En una progresión aritmética (P.A), un término cualquiera es igual al primer término más tantas veces la razón como términos le proceden, es decir:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

En efecto: Consideremos la progresión aritmética (P.A.)

$$\underbrace{\div a_1 . a_2 . a_3 ... a_{n-1} . a_n}_{n \text{ términos}}$$

por definición se tiene:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$

.

.

.

$a_{n-1} = a_{n-2} + r = a_1 + (n-2)r$

$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$

$$\boxed{\therefore \ a_n = a_1 + (n-1)r} \quad ... (1)$$

Se observa que la fórmula (1) está en función de 4 variables, a_n, a_1, n, r y que se puede hallar una de ellas conociendo los otros tres valores.

De la ecuación (1) despejamos:

Al primer término: $a_1 = a_n - (n-1)r$

La razón: $r = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$

El número de términos: $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$

Ejemplo.- Hallar el término que ocupa el lugar 18 de la siguiente progresión aritmética ÷ 16.12.8.4...

Desarrollo

Por dato se tiene: $r = 12 - 16 = -4$; $n = 18$; $a_1 = 16$

Aplicando la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{18} = 16 + (18-1)(-4) = 16 + 17(-4) = 16 - 68 = -52$ $\therefore\ a_{18} = -52$

③ En una progresión aritmética (P.A), la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos; es decir:

$$\boxed{a_x + a_y = a_1 + a_n}$$

En efecto: Consideremos una progresión aritmética de razón r.

$$\div \underbrace{a_1 . a_2 . a_3 ...... a_x}_{k\text{-términos}} ... \underbrace{a_y ...... a_n}_{k\text{-términos}}$$

Luego por definición se tiene:

$$a_x = a_1 + (k-1)r \quad ...(1)$$

$$a_n = a_y + (k-1)r \quad ...(2)$$

ahora restamos (1) y (2) obteniéndose

$a_x - a_n = a_1 - a_y$, de donde se tiene: $\boxed{a_x + a_y = a_1 + a_n}$

④ Si una progresión aritmética tiene un número impar de términos se cumple que el término central es igual a la semisuma de los términos extremos, es decir $\boxed{a_c = \dfrac{a_1 + a_n}{2}}$

En efecto: Consideremos una progresión aritmética de razón r.

$$\div a_1 . a_2 . a_3 ..... a_c \;\; .... a_n$$
$$\underbrace{\quad}_{\text{k-términos}} \;\; \underbrace{\quad}_{\text{k-términos}}$$

aplicando la propiedad (2) de la progresión aritmética

$$a_c = a_1 + kr \qquad ...(1)$$

$$a_n = a_c + kr \qquad ...(2)$$

ahora restando (1) y (2) se tiene: $a_c - a_n = a_1 - a_c$, de donde se tiene:

$2a_c = a_1 + a_n$ por lo tanto $\boxed{a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}}$

(5) La suma de los términos de una progresión aritmética (P.A) limitada es igual a la semisuma de los términos extremos multiplicando por el número de términos:

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2} . n}$$

En efecto: Consideremos una progresión aritmética

$$\underbrace{\div a_1 . a_2 . a_3 .... a_{n-2} . a_{n-1} . a_n}_{\text{n - términos}}$$

La suma de los términos de esta progresión aritmética es:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad ...(1)$$

reordenando la expresión

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1 \qquad ...(2)$$

ahora sumamos (1) y (2) se tiene:

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)}_{\text{n - veces de paréntesis}} \qquad ...(3)$$

En cada uno de los paréntesis por ser la suma de dos términos equidistantes valen $(a_1 + a_n)$, por tanto en (3) se tiene:

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n\text{ - veces}}$$

Luego $2S = (a_1 + a_n)n$, de donde se tiene: $\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2}.n}$

OBSERVACIÓN.- Generalmente el último término $a_n = a_1 + (n-1)r$ no se dá como dato, luego al reemplazar en la suma se obtiene:

$$S = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2}.n \qquad \boxed{\therefore \quad S = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}.n}$$

En la suma $S = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$, cuando n es impar se tiene: $\boxed{S = na_c}$

14.6. MEDIOS ARITMÉTICOS O MEDIOS DIFERENCIALES.-

Llamaremos medios aritméticos, a los términos de una progresión aritmética comprendido entre sus extremos.

$$\overbrace{\div a_1.\underbrace{a_2.a_3 \dots\dots\dots a_{n-2}.a_{n-1}}_{m\text{ – medios aritméticos}}.a_n}^{n\text{ – términos}}$$

de donde n = m + 2

Ejemplo.- $\div 3.\underbrace{7.11.15.19.23}_{}.27$

Medios aritméticos o diferenciales

14.7. INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS O DIFERENCIALES ENTRE DOS NÚMEROS DADOS.-

La interpolación de medios aritméticos consiste en formar una progresión aritmética comprendidos los extremos y el número de medio a interpolar, es decir:

Consideremos una progresión aritmética (P.A)

$$\div a \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{m\text{ - términos}} b$$

de acuerdo con la propiedad del término a_n se tiene:

b = a + [(m + 2) – 1]r = a + (m + 1)r, de donde la razón de la interpolación es:

b = a + (m + 1)r $\quad\quad \therefore\ r = \dfrac{b-a}{m+1}$

14.8. PROPIEDADES ADICIONALES.-

a) **ALTERACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.-**

① Si a todos los elementos de una progresión aritmética, se le suma o resta una misma cantidad, se obtendrá otra progresión aritmética, cuya razón será igual a la razón de la progresión aritmética original (la razón no se altera).

② Si a todos los elementos de una progresión aritmética, se multiplica o divide por una misma cantidad diferente de cero, se obtiene otra progresión aritmética cuya razón será la original multiplicada o dividida por dicha cantidad.

b) **OTRAS EQUIVALENTES DE a_c y n.-**

Consideremos una progresión aritmética de "n" términos (n impar)

$$\div a_1.a_2.a_3.a_4....a_{n-2}.a_{n-1}.a_n$$

y denotado por: S_i = suma de términos que ocupan lugares impares

S_p = suma de términos que ocupan lugares pares

donde $S_i = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_n$

$S_p = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{n-1}$

$S_n = S_i + S_p$ (suma total)

① a_c = término central de la progresión aritmética.

$$a_c = S_i - S_p = \frac{S_i + S_p}{n} = \frac{S_n}{n} \quad ...(1)$$

(2) n = número de términos de la progresión aritmética.

De (I) despejamos "n": $\boxed{n = \dfrac{S_i + S_p}{S_i - S_p}}$

Ejemplo.- La suma de los n primero términos de una progresión aritmética viene dado por $S_n = 4n^2 + 1$, luego la razón es:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

Consideremos la progresión aritmética: $\div a_1.a_2.a_3.....a_{n-2}.a_{n-1}.a_n$, de donde

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$, además se tiene $S_n = 4n^2 + 1$ entonces

$S_1 = a_1 = 4(1)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow a_1 = 5$

$S_2 = a_1 + a_2 = 4(2)^2 + 1 = 17 \Rightarrow a_1 + a_2 = 17 \Rightarrow 5 + a_2 = 17 \Rightarrow a_2 = 12$

como la razón de una progresión aritmética es:

$r = a_2 - a_1 = 12 - 5 = 7 \Rightarrow$ r = 7, la respuesta es $\boxed{c}$

14.9. PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G).-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos progresión geométrica a una sucesión ordenada de números reales, en la cual su primer término es diferente de cero, y cada uno de los términos siguientes es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante diferente de cero, denominada "razón de la progresión" a este tipo de progresiones también se les conoce como progresión por cocientes.

b) **SIMBOLOGÍA.-**

t_1 = primer término

t_n = término de lugar n o último término.

q = razón

n = número de términos

S = suma de términos

P = producto de términos

c) **REPRESENTACIÓN DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.-**

$\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ... : t_{n-1} : t_n$

$\div\div$ = inicio de la progresión geométrica

: = separación de términos

por definición de progresión geométrica se tiene:

$\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ... : t_{n-1} : t_n$

$\div\div t_1 : t_1 q : t_2 q : ... : t_{n-2} q : t_{n-1} q$ (por definición)

por lo tanto $t_n = t_{n-1} q$, de donde $\boxed{q = \dfrac{t_n}{t_{n-1}}}$

Luego la razón de una progresión geométrica se obtiene dividiendo un término cualquiera entre su inmediato anterior.

14.10. CLASES DE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.-

Las progresiones geométricas se clasifican en:

i) **PROGRESIONES GEOMÉTRICAS CRECIENTES.-**

Cuando su razón es un número mayor que la unidad o sea $q > 1$.

Ejemplo.- $\div\div = 4 : 16 : 64 : 256 : ....$, entonces $q = \dfrac{64}{16} = 4 > 1$ se observa que los elementos de la progresión van aumentando (creciendo) y ello se debe a la razón (positivo) que vale 4.

ii) **PROGRESIONES GEOMÉTRICAS DECRECIENTES.-**

Cuando su razón es un número comprendido entre el cero y la unidad ($0 < q < 1$).

Ejemplo.- $\div\div = 64 : 16 : 4 : 1 : ....$, entonces $q = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} < 1$

Se observa que los elementos de la progresión van decreciendo y ello se debe a la razón que está entre cero y 1 que vale $q = \frac{1}{4}$.

iii) **PROGRESIONES GEOMÉTRICAS OSCILANTES O ALTERNADOS.-**

Cuando su razón es un número negativo ($q < 0$).

Ejemplo.- $\div\div = 2 : -6 : 18 : -54 : 162 : ...$, entonces $q = -3$

14.11. PROPIEDADES DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.-

(1) Cualquier término de una progresión geométrica (P.G) es igual al primer término multiplicado por la razón elevada al número de términos que le preceden, es decir:

$$\boxed{t_n = t_1 . q^{n-1}}$$

Demostración

Consideremos una progresión geométrica: $\div\div \underbrace{t_1 : t_2 : t_3 : ... : t_{n-1} : t_n}_{\text{n - términos}}$

por definición de progresión geométrica se tiene:

$$t_1 = t_1$$

$$\left.\begin{array}{l} t_2 = t_1 q \\ t_3 = t_2 q \\ . \\ . \\ . \\ t_{n-1} = t_{n-2} q \\ t_n = t_{n-1} q \end{array}\right\} (n-1) \text{ términos}$$

ahora multiplicando miembro a miembro

$$t_2.t_3 \ldots t_{n-1}.t_n = t_1 q.t_2 q \ldots t_{n-2} q.t_{n-1} q$$

$$\underbrace{t_2.t_3 \ldots t_{n-1}}.t_n = t_1.\underbrace{t_2.t_3 \ldots t_{n-2}.t_{n-1}}.q^{n-1}$$

al simplificar la expresión $t_2.t_3 \ldots t_{n-2}.t_{n-1}$, se tiene: $\boxed{t_n = t_1 q^{n-1}}$

La expresión $t_n = t_1.q^{n-1}$ está en función de cuatro variables t_n, t_1, q, n; cada una de ellas se puede hallar conociendo los valores de las otros tres.

Por lo tanto de la expresión $t_n = t_1 q^{n-1}$, despejamos el primer término: $\boxed{t_1 = \frac{t_n}{q^{n-1}}}$

Ahora despejamos la razón q: $\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}}$

OBSERVACIÓN.-

Ahora analicemos el caso siguiente: $t_7 = t_1 q^6$

$$t_7 = t_1 q.q^5 = t_2.q^5$$

$$t_7 = t_2.q^5$$

También: $t_7 = t_1 q^2.q^4 = t_3.q^4$

$$t_7 = t_3 q^4$$

También: $t_7 = t_1 q^3.q^3 = t_4.q^3$

$$t_7 = t_4.q^3$$

Se observa que el exponente de la razón sumado con el subíndice del término tomado como referencia es igual al subíndice del primer miembro, quiere decir entonces que en general: $\boxed{t_n = t_k.q^{n-k}}$

(2) En una progresión geométrica (P.G), el producto de dos términos equidistante de los extremos, será igual al producto de los términos extremos.

Demostración

Consideremos una progresión geométrica, de razón q.

$$\div\div \underbrace{t_1 : t_2 : \ldots\ldots : t_a}_{\text{k - términos}} : \ldots\ldots\ldots : \underbrace{t_b : \ldots\ldots\ldots : t_n}_{\text{k - términos}}$$

por lo tanto por definición se tiene:

$t_a = t_1 q^{k-1}$ y $t_n = t_b.q^{k-1}$, de donde se tiene:

$q^{k-1} = \dfrac{t_a}{t_1}$, $q^{k-1} = \dfrac{t_n}{t_b}$, por lo tanto igualamos $\dfrac{t_a}{t_1} = \dfrac{t_n}{t_b}$ de donde $\boxed{t_a.t_b = t_1.t_n}$

(3) En una progresión geométrica limitada de un número impar de términos, se cumplirá que su término central al cuadrado será igual al producto de los términos extremos, es decir: $\boxed{t_c^2 = t_1.t_n}$

Demostración

Consideremos una progresión geométrica de un número impar de términos de razón q:

$$\div\div \underbrace{t_1 : t_2 : \ldots\ldots\ldots : t_c}_{\text{k - términos}} \underbrace{: \ldots\ldots\ldots : t_{n-1} : t_n}_{\text{k - términos}} \quad (t_c = \text{término central})$$

aplicando la definición de progresión geométrica se tiene:

$t_c = t_1.q^{k-1}$, $t_n = t_c.q^{k-1}$, despejando q^{k-1}.

$q^{k-1}=\frac{t_c}{t_1}$ y $q^{k-1}=\frac{t_n}{t_c}$, igualando se tiene:

$\frac{t_c}{t_1}=\frac{t_n}{t_c}$ de donde $\boxed{t_c^2=t_1.t_n}$ entonces $t_c=\sqrt{t_1.t_n}$

(4) En una progresión geométrica limitada, el producto de sus términos es igual a la raíz cuadrada del producto de sus extremos elevada al número de términos de la progresión, es decir: $P=\sqrt{(t_1.t_n)^n}$

Demostración

Consideremos una progresión geométrica (P.G)

$$\div\div \underbrace{t_1 : t_2 : \ldots\ldots : t_{n-1}.t_n}_{n \text{ términos}}$$

el producto de sus n términos es: $P=t_1.t_2.t_3.\ldots.t_{n-2}.t_{n-1}.t_n$ ... (1)

También al producto de sus n términos se escribe así:

$$P=t_n.t_{n-1}.t_{n-2}.\ldots.t_3.t_2.t_1 \qquad \ldots (2)$$

al multiplicar (1) y (2) miembro a miembro se tiene:

$$P^2=\underbrace{(t_1.t_n)(t_2.t_{n-1})\ldots\ldots(t_2.t_{n-1}).(t_n.t_1)}_{n\text{ - veces}}$$

observemos que en cada uno de los n paréntesis se tiene el producto de 2 términos equidistante de los extremos y se sabe que es igual al producto de los extremos $(t_1.t_n)$. Luego $P^2=(t_1.t_n)^n \Rightarrow P=\sqrt{(t_1.t_n)^n}$

(5) En una progresión geométrica limitada; un término cualquiera diferente del primero y él último será igual a la raíz cuadrada del producto de sus términos adyacentes, es decir: $t_x=\sqrt{t_{x-1}.t_{x+1}}$

Demostración

Consideremos una progresión geométrica, de razón q

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ..... : t_{x-1} : t_x : t_{x+1} : ...... : t_n$

Por definición de progresión geométrica se tiene:

$$t_{x-1} = t_1 . q^{x-2} \qquad ... (1)$$

$$t_{x+1} = t_1 . q^{x} \qquad ... (2)$$

ahora multiplicamos (1) y (2) miembro a miembro

$$t_{x-1} . t_{x+1} = t_1^2 q^{2x-2} = (t_1 . q^{x-1})^2 \qquad ... (3)$$

pero se conoce que $t_x = t_1 q^{x-1}$, que reemplazando en (3)

$t_x^2 = t_{x-1} . t_{x+1}$ de donde $t_x = \sqrt{t_{x-1} . t_{x+1}}$

Ejemplo.- $\div\div$ 3 : 15 : 75 : 375

$15 = \sqrt{(3)(75)}$

el lector puede seguir comprobando para cualquier término diferente del primero y él último.

(6) La suma de los n términos de una progresión geométrica, es igual al último término multiplicado por la razón menos el primer término, todo esto dividido entre la diferencia de la razón y la unidad, es decir: $S = \dfrac{t_n . q - t_1}{q-1}$

Demostración

Consideremos una progresión geométrica, de razón q.

$\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ..... : t_{n-2} : t_{n-1} : t_n$

La suma de los n términos de la progresión es:

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n \qquad ... (1)$$

ahora multiplicamos ambos miembros por q.

$qS = t_1q + t_2q + t_3q + ... + t_{n-2}q + t_{n-1}q + t_nq$; de donde

$qS = t_2 + t_3 + t_4 + ... + t_{n-1} + t_n + t_nq$ ... (2)

restando (2) y (1) simplificando se tiene:

$qS - S = t_n.q - t_1$ entonces $S(q-1) = t_n.q - t_1$ de donde $\boxed{S = \frac{t_n.q - t_1}{q-1}}$

OBSERVACIÓN.- Por lo general él último término no se dá como dato, luego reemplazando en la fórmula de la suma $t_n = t_1.q^{n-1}$ se obtiene:

$$S = \frac{t_n.q - t_1}{q-1} = \frac{(t_1.q^{n-1})q - t_1}{q-1} = \frac{t_1.q^n - t_1}{q-1} = \frac{t_1(q^n - 1)}{q-1} \qquad \boxed{\therefore \quad S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q-1}}$$

⑦ El limite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada es igual al primer término dividido entre la diferencia de la unidad y la razón, es decir: $\lim S = \frac{t_1}{}$ [illegible]

Demostración

Como $S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q-1}$, expresamos en la forma:

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{-t_1(1-q^n)}{-(1-q)} = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q} \text{ de donde } \boxed{S = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}}$$

como las progresión geométrica es decreciente, entonces la razón está entre 0 y 1 es decir $0 < q < 1$ de donde $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Luego al tomar limite a la suma cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{t_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{t_1}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{t_1}{1-q} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{t_1}{1-q}$$

14.12. MEDIOS GEOMÉTRICOS O PROPORCIONALES.-

Los medios geométricos o proporcionales son los términos de una progresión geométrica comprendidos entre sus extremos (primer término y último término).

$$\div\div t_1 : \underbrace{t_2 : t_3 : t_4 : \ldots\ldots : t_{n-3} : t_{n-2} : t_{n-1}}_{\text{medios geométricos}} : t_n$$

14.13. INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS.-

Es el procedimiento para formar una progresión geométrica (P.G) para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios geométricos a interpolar.

En efecto: $$\overbrace{\div\div a : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{m \text{ términos}} : b}^{m+2 \text{ términos}}$$

De acuerdo al término general se tiene: $b = a.q^{(m+2)-1} = a.q^{m+1}$ de donde se obtiene la razón de la interpolación: $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

14.14. PROMEDIOS.-

14.14.1. PROMEDIOS.- Consideremos un conjunto de datos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de tal manera que $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, llamaremos promedio o cantidad media, a todo número mayor que el menor integrante del conjunto A y menor que el mayor de todos los datos del conjunto A.

Si x es el promedio de los datos de A, entones $a_1 \le x \le a_n$ es decir:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

menor valor ≤ promedio ≤ mayor valor

Ejemplo.- Al preguntarse a una ama de casa referente al gasto diario que realiza en una semana respondió:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
S/ 10	S/ 14	S/ 12	S/ 16	S/ 11	S/ 15	S/ 17

Luego la ama de casa dice: En "promedio" mi gasto diario es de S/ 15: es decir que la señora lo que ha hecho es juntar todos los gastos diarios y dividirlo en 7.

$$\frac{10+14+12+16+11+15+17}{7}=\frac{105}{7}=15$$

es precisamente la forma más fácil de obtener un valor referencial de datos de tal manera que este promedio sea él mas utilizado; además se observa que:

$$\underset{\text{gasto mínimo}}{\underset{\downarrow}{10}} \quad < \quad \underset{\text{gasto promedio}}{15} \quad < \quad \underset{\text{gasto máximo}}{\underset{\downarrow}{17}}$$

14.14.2. PROMEDIOS PRINCIPALES.-

Los principales promedios o promedios notables son:

1. Promedio aritmético o media aritmética $=\overline{MA}$
2. Promedio geométrico o media geométrica $=\overline{MG}$
3. Promedio armónico o media armónica $=\overline{MH}$
4. Promedio cuadrático o media cuadrática $=\overline{MC}$

14.14.3. PROMEDIO ARITMÉTICO O MEDIA ARITMÉTICA: $\overline{MA}$

Es el promedio que se obtiene al dividir la suma de datos en referencia con él numero de datos. Es decir: si $a_1, a_2, ..., a_n$ son los datos, entonces:

$$\overline{MA}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

En general para "n" datos se tiene:

$$\overline{MA}=\frac{\text{suma de datos}}{\text{cantidad de datos}}$$

Ejemplo.- La media aritmética de: 8; 14; 16; 22 es $\overline{MA} = \frac{8+14+16+22}{4} = \frac{60}{4} = 15$

Como $\overline{MA} = 15$, se observa que se cumple: $8 < 15 < 22$

Ejemplo.- La media aritmética de un conjunto de 10 números es 16. Si incluimos los números 8 y 12 en el conjunto ¿Cuánto es la media aritmética de este nuevo conjunto?

a) 17 b) 12 c) 15 d) 18 e) 13

Desarrollo

Sea $a_1, a_2, ..., a_{10}$ los 10 números, entonces la media aritmética de estos 10 números es:

$$\overline{MA} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{10}}{10} = 16 \quad \text{de donde} \quad a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 16$$

al incluir los números 8 y 12 a los 10 números, su media aritmética de los doce nuevos números será:

$$\overline{MA} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{10} + 8 + 12}{12} = \frac{160 + 8 + 12}{12} = \frac{180}{12} = 15$$

como $\overline{MA} = 15$ la respuesta es **c**

Ejemplo.- El promedio aritmético de las temperaturas de 5 ciudades y que son: 16°, 15°, 13°, 11°, 10° es:

$$\overline{MA} = \frac{16° + 15° + 13° + 11° + 10°}{5} = \frac{65°}{5} = 13°$$

OBSERVACIÓN.-

PROMEDIO PONDERADO (MEDIA PONDERADA): $\overline{PP}$

Es un caso particular de la media aritmética donde alguno o algunas de las cantidades se repiten, a las veces que se repiten una cantidad se le llama frecuencia o peso.

Ejemplo.- Hallar el promedio ponderado de las siguientes cantidades

Cantidad	Frecuencia
6	3
14	8
18	6

Entones $\overline{PP} = \dfrac{6(3)+14(8)+18(6)}{3+8+6} = \dfrac{18+112+108}{17} = \dfrac{238}{17} \approx 15.17$

$$\overline{PP} = \frac{\text{suma de los productos de las cantidades por su frecuencia}}{\text{número de frecuencia}}$$

Es decir: dados los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con frecuencias $f_1, f_2, \ldots, f_n$ respectivamente, entonces:

$$\overline{PP} = \frac{a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

14.14.4. PROMEDIO GEOMÉTRICO O MEDIA GEOMÉTRICA: $\overline{MG}$

Es un promedio que se obtiene al extraer la raíz enésima del producto de "n" cantidades.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las n cantidades, entonces su media geométrica es: $\overline{MG} = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n}$, es decir:

$$\overline{MG} = \sqrt[\text{cantidad de datos}]{\text{producto de los datos}}$$

Ejemplo.- El promedio geométrico de 20 números es 8 y el promedio geométrico de los otros 20 números es 18 ¿Cuál es el promedio de los 4 números?

a) 12 **b)** 16 **c)** 20 **d)** 24 **e)** 28

Desarrollo

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ los 20 números cuyo promedio geométrico es 8, es decir:

$\sqrt[20]{a_1.a_2...a_{20}} = 8$ de donde se tiene: $a_1.a_2...a_{20} = 8^{20}$

Sean $a_{21}, a_{22}, ..., a_{40}$ los otros 20 números cuyo promedio geométrico es 18, es decir:

$\sqrt[20]{a_{21}.a_{22}...a_{40}} = 18$, de donde se tiene: $a_{21}.a_{22}...a_{40} = 18^{20}$

ahora el promedio geométrico de los 40 números es:

$$\overline{MG} = \sqrt[40]{(a_1.a_2...a_{20})(a_{21}.a_{22}...a_{40})} = \sqrt[40]{8^{20}(18^{20})}$$

$$= \sqrt{\sqrt[20]{8^{20}(18^{20})}} = \sqrt{8(18)} = \sqrt{4(36)} = 2(6) = 12$$

por lo tanto la respuesta es **a**.

14.14.5. PROMEDIO ARMONICO O MEDIA ARMÓNICA: $\overline{MH}$

Es la inversa del promedio aritmético de las reciprocas de los datos, o sea que la media armónica es el promedio que se obtiene al dividir el numero de términos entre la suma de las inversas de todos los términos.

Es decir:
$$\overline{MH} = \frac{\text{cantidad de datos}}{\text{suma de las inversas de los datos}}$$

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son los datos, entonces la media armónica es:

$$\overline{MH} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Ejemplo.- La media armónica de 6, 2 y 3 es:

$$\overline{MH} = \frac{3}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{6} + \frac{5}{6}} = 3$$

NOTA.- Para dos cantidades los promedios aritmético, geométrico y armónico son:

$$\overline{MA}=\frac{a+b}{2}\ ;\ \overline{MG}=\sqrt{ab}\ ;\ \overline{MH}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$$

14.14.6. PROPIEDADES DE LOS PROMEDIOS.-

① Para dos números positivos, se cumple que su media geométrica esta comprendida entre su media armónica y su media geométrica, es decir:

Si a y b son los números tal que $a>0,\ b>0$ entonces

$$\overline{MH}<\overline{MG}<\overline{MA}$$

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$$

NOTA.- Cuando los datos son iguales se cumple que:

$$\overline{MH}=\overline{MG}=\overline{MA}$$

② La media geométrica de dos cantidades positivas a y b es media proporcional entre la media aritmética y la media armónica, es decir: $\overline{MG}^2=\overline{MA}.\overline{MH}$

En efecto: $$\overline{MH}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2a}{a+b}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{\overline{MG}^2}{\overline{MA}}$$

Como $\overline{MH}=\frac{\overline{MG}^2}{\overline{MA}}$ de donde $\overline{MG}^2=\overline{MA}.\overline{MH}$

14.15. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Una progresión aritmética está formada del 4 al 55. La suma de los 6 primeros es 69, de los 6 siguientes es 177 y la suma de los 6 términos últimos es 285. El segundo y el décimo término de la progresión será.

a) 7 y 31 **b)** 10 y 34 **c)** 10 y 28 **d)** 13 y 37 **e)** 8 y 38

Desarrollo

Sea $\div a_1.a_2.....a_n$

4 55

La suma de los n términos de una progresión aritmética es:

$S = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$; donde $a_n = a_1 + (n-1)r$

para n = 6 se tiene: $69 = \frac{4 + a_6}{2}.6$

$69 = (4 + a_6)3 \Rightarrow 23 = 4 + a_6$ de donde $a_6 = 19$

además $a_6 = a_1 + (2-1)r \Rightarrow 19 = 4 + 5r \Rightarrow r = 3$

Luego $a_2 = a_1 + (2-1)r = 4 + (1)(3) = 7$

$a_{10} = a_1 + (10-1)r = 4 + 9(3) = 4 + 27 = 31$

Por lo tanto la respuesta es 

(2) Si en una progresión aritmética limitada, el último término es 147 y los términos 5to y 20vo son 27 y 117 respectivamente, entonces la suma del primer término y el número de términos es:

a) 7 **b)** 14 **c)** 21 **d)** 28 **e)** 35

Desarrollo

Por dato tenemos $a_5 = 27 \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r = 27$ ... **(1)**

$a_{20} = 117 \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19r = 117$ ... **(2)**

de (1) y (2) se tiene:

$a_1 + 4r = 27$

$a_1 + 19r = 117$ restando

$15r = 90 \Rightarrow r = 6, \ a_1 = 3$

como $a_n = a_1 + (n-1)r = 147 \Rightarrow 3 + (n-1)6 = 147$

$\Rightarrow (n-1)6 = 144 \Rightarrow n = 25$

Luego la suma pedida es: $a_1 + n = 3 + 25 = 28$

Por lo tanto la respuesta es **d**

(3) Se sabe que el 4to y 8vo término de una progresión aritmética suman 102, que el 10vo y 17vo suman 237, hallar él término del lugar 13.

a) 112 b) 114 c) 116 d) 118 e) 120

Desarrollo

Por dato del problema se tiene: $\begin{cases} t_4 + t_8 = 102 \\ t_{10} + t_{17} = 237 \end{cases}$ ... (1)

Por definición se conoce $t_n = t_1 + (n-1)r$ de donde

$t_4 = t_1 + 3r, \quad t_8 = t_1 + 7r, \quad t_{10} = t_1 + 9r, \quad t_{17} = t_1 + 16r$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) se obtiene:

$\begin{cases} t_1 + 3r + t_1 + 7r = 102 \\ t_1 + 9r + t_1 + 16r = 237 \end{cases}$ simplificando $\begin{cases} t_1 + 5r = 51 \\ 2t_1 + 25r = 237 \end{cases}$

multiplicando a la primera ecuación por -2 se obtiene

$-2t_1 - 10r = -102$

$2t_1 + 25r = 237$ sumando miembro a miembro

$15r = 135$ de donde $r = \frac{135}{15} = 9$

como $t_1 + 5r = 51 \Rightarrow t_1 + 45 = 51 \Rightarrow t_1 = 6$

Luego $t_{13} = t_1 + 12r = 6 + 12(9) = 6 + 108 = 114$

Por lo tanto la respuesta es **b**

(4) $x+y$, $4x-3y$ y $5y+3x$ son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, La relación entre x e y es:

a) $x=3y$ b) $2x=5y$ c) $y=3x$ d) $y=\dfrac{2x}{3}$ e) $3x=4y$

Desarrollo

Aplicando la propiedad de las progresión aritmética

$$\begin{cases}(5y+3x)-(4x-3y)=r\\(4x-3y)-(x+y)=r\end{cases}$$, igualando estas ecuaciones

$(5y+3x)-(4x-3y)=(4x-3y)-(x+y)$

$8y-x=3x-4y \Rightarrow 12y=4x \Rightarrow \boxed{x=3y}$

por lo tanto la respuesta es $\boxed{a}$

(5) Si el cuarto término de la progresión aritmética es 9 y el noveno término es –6, entonces la razón r vale.

a) -3 b) 2 c) -2 d) -5 e) 3

Desarrollo

Datos del problema: $t_4=a_1+3r=9$ ... (1)

$t_9=a_1+8r=-6$ ... (2)

ahora restamos de (2) el (1) obteniéndose

$(a_1+8r)-(a_1+3r)=-6-9$ de donde $5r=-15$ entonces $r=-3$

Por lo tanto la respuesta es $\boxed{a}$

(6) La suma de los términos de una progresión aritmética es 43400, la suma de los tres primeros términos es 65 y la suma de los tres últimos es 307, determinar el número de términos de la progresión.

a) 400 b) 500 c) 600 d) 700 e) 800

Desarrollo

Consideremos la progresión aritmética: $\div t_1.t_2.t_3.t_4...t_{n-3}.t_{n-2}.t_{n-1}.t_n$

de las condiciones del problema se tiene:

$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=65 \\ t_n+t_{n-1}+t_{n-2}=307 \end{cases}$, sumando ambos miembros

$\underbrace{(t_1+t_n)}+\underbrace{(t_2+t_{n-1})}+\underbrace{(t_3+t_{n-2})}=372$ por ser equidistantes son iguales

$3(t_1+t_n)=372$ de donde $t_1+t_n=124$

además la suma de los n términos de la progresión aritmética es:

$\frac{n}{2}(t_1+t_n)=43400 \Rightarrow \frac{n(124)}{2}=43400$

62n = 43400 de donde $n=\frac{43400}{62}=700$, por lo tanto la respuesta es **d**

(7) La suma del 3ro y 6to término de una progresión aritmética es 57 y la suma del 5to y 10mo término es 99. El valor de $E=\frac{t_3.t_6.t_5.t_{10}}{312}$ es (producto de los cuatro términos).

a) 4824 **b)** 8424 **c)** 2484 **d)** 4248 **e)** 4284

Desarrollo

Condición del problema $\begin{cases} t_3+t_6=57 \\ t_5+t_{10}=99 \end{cases}$ ... (1)

Pero se conoce $\begin{cases} t_3=t_1+2r \ , \ t_6=t_1+5r \\ t_5=t_1+4r \ , \ t_{10}=t_1+9r \end{cases}$ ... (2)

Al reemplazar (2) en (1) se tiene: $\begin{cases} t_1+2r+t_1+5r=57 \\ t_1+4r+t_1+9r=99 \end{cases}$, simplificando

$\begin{cases} 2t_1+7r=57 & ...(3) \\ 2t_1+13r=99 & ...(4) \end{cases}$

al restar (4) – (3) se tiene:

$6r = 42$ de donde $r = 7$ y de (3) se tiene: $2t_1 + 49 = 57 \Rightarrow 2t_1 = 8$ entonces $t_1 = 4$

$t_3 = t_1 + 2r = 4 + 2(7) = 18$; $t_6 = t_1 + 5r = 4 + 5(7) = 39$

$t_5 = t_1 + 4r = 4 + 4(7) = 32$; $t_{10} = t_1 + 9r = 4 + 9(7) = 67$

$$E = \frac{t_3.t_1.t_5.t_{10}}{312} = \frac{(18)(39)(32)(67)}{312} = 4824$$

por lo tanto la respuesta es **a**

(8) En la progresión aritmética $\div t_1.t_2.t_3.t_4.t_5.t_6.....$ se sabe que: $t_1 + t_5 = 20$, hallar t_3^2

a) 64 b) 81 c) 100 d) 121 e) 144

Desarrollo

Se conoce que la razón r de una progresión aritmética es:

$r = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4$



de (2) $t_2 - t_1 = t_5 - t_4$; de (1) $t_3 - t_2 = t_4 - t_3$; de donde

$t_2 + t_4 = t_1 + t_5 = 20$ ...(3)

$2t_3 = t_2 + t_4$ ...(4)

ahora reemplazando (3) en (4) $2t_3 = 20$ entonces $t_3 = 10$

$t_3^2 = 100$, la respuesta es **c**

(9) Hallar la suma de los siguientes términos que están en progresión aritmética $\div t_1.t_2.t_3.t_4 = 18.\overline{2a}.\overline{2b}.\overline{3c}.34$

a) 120 b) 130 c) 140 d) 110 e) 100

Desarrollo

Como $\div t_1.t_2.t_3.t_4 = 18.\overline{2a}.\overline{2b}.\overline{3c}.34$, de donde

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_2 = \overline{2a} = 20 + a \\ t_3 = \overline{2b} = 20 + b \\ t_4 = \overline{3c} = 30 + c \\ t_5 = 34 \end{cases}$$

de la condición de razón de una progresión aritmética se tiene:

$$r = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4$$

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = t_5 - t_4 \\ t_3 - t_2 = t_4 - t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + a - 18 = 34 - 30 - c \\ 20 + b - 20 - a = 30 + c - 20 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 2b - a - c = 10 \end{cases} \Rightarrow 2b = 12 \text{ de donde } \boxed{b = 6}$$

además $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \Rightarrow 20 + a - 18 = 20 + b - 20 - a$

$2 + a = b - a \Rightarrow 2a = b - 2 = 6 - 2 = 4$

$2a = 4$ de donde $\boxed{a = 2}$ además $2 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 0}$

por lo tanto los términos de progresión son:

18, 22, 26, 30, 34, cuya suma es: $18 + 22 + 26 + 30 + 34 = 130$. La respuesta es $\boxed{b}$

(10) La suma de los 11 términos de una progresión aritmética creciente es 176, la diferencia de los extremos es 30 ¿Cuál es él último término?

a) 11 b) 21 c) 31 d) 41 e) 51

Desarrollo

Sea $\div t_1.t_2.t_3.t_4.....t_{11}$, la progresión aritmética de la condición del problema se tiene:

$$S=\frac{t_1+t_{11}}{2}(11)=t_1+t_2+t_3+...+t_{11}=176$$

por lo tanto $\frac{t_1+t_{11}}{2}(11)=176 \Rightarrow t_1+t_{11}=\frac{(176)(2)}{11}$

de donde $t_1+t_{11}=32$ ... (1)

además se tiene que $t_{11}-t_1=30$ ... (2)

al sumar (1) y (2) se tiene $2t_{11}=62$, de donde $t_{11}=31$, la respuesta es **c**

(11) En la siguiente progresión aritmética ÷ 10.x.z.... se sabe que la suma de los primeros 6 términos es 270. Determinar el valor de (x + z).

a) 62 b) 60 c) 70 d) 54 e) 65

Desarrollo

÷ 10. 10 + r. 10 + 2r. 10 + 3r. 10 + 4r. 10 + 5r, donde x = 10 + r, z = 10 + 2r

de la condición del problema se tiene:

10 + 10 + r + 10 + 2r + 10 + 3r + 10 + 4r + 10 + 5r = 270, simplificando

60 + 5r = 270 ⇒ 15r = 210 de donde r = 14

como $\begin{cases} x=10+r \\ z=10+2r \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=10+14=24 \\ z=10+28=38 \end{matrix}$

Luego x + z = 24 + 38 = 62, la respuesta es **a**

(12) La suma de n términos de la progresión aritmética $\div \frac{2a^2-1}{a}.4a-\frac{3}{a}.\frac{6a^2-5}{a}....$ es

a) $n(a^2+a-2)a^{-1}$ b) $n(a^2-1)a^{-1}$ c) $n^2(a^2-a)a^{-1}$

d) $a_n(a^2+a-1)$ e) $na^2+n^2(a^2-1)a^{-1}$

Desarrollo

Se conoce que: $S = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}.n$

Calculando la razón: $r = (4a - \frac{3}{a}) - (\frac{2a^2 - 1}{a}) = 2a - \frac{2}{a}$

$$S = \frac{2(\frac{2a^2-1}{a}) + (n-1)(2a - \frac{2}{a})}{2}.n = [2a - \frac{1}{a} + (n-1)(a - \frac{1}{a})]n$$

$$= [2a - \frac{1}{a} + n(a - \frac{1}{a}) - a + \frac{1}{a}]n = [a + n(\frac{a^2-1}{a})]n = na^2 + n^2(a^2 - 1)a^{-1}$$

por lo tanto la respuesta es **e**

(13) La suma de los 7 primeros términos de una progresión aritmética es 49, y la suma de los 20 primeros términos de ella es 400. Calcular la suma de los n primeros términos de dicha progresión.

a) n (n + 1) b) n^2 c) n (n − 1)

d) 2n (n + 1) e) $n^2 - n + 1$

Desarrollo

Sea $\div t_1 . t_2 . t_3 .... t_{20} .....$, de las condiciones del problema se tiene:

$$S = t_1 + t_2 + ... + t_7 = \frac{2t_1 + 6r}{2}.7 = 49$$
$$S = t_1 + t_2 + ... + t_{20} = \frac{2t_1 + 19r}{2}.20 = 400$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 3r = 7 \\ 2t_1 + 19r = 40 \end{cases}$$

de donde $\begin{cases} -2t_1 - 6r = -14 \\ 2t_1 + 19r = 40 \end{cases} \Rightarrow 13r = 26 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ t_1 = 1 \end{cases}$

nos piden la suma de los n términos de la progresión

$$S = \frac{2t_1 + (n-1)r}{2}.n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)2] = n^2$$

por lo tanto la respuesta es **b**

(14) En una progresión aritmética de 25 términos, el décimo tercero es igual a 30. La suma de todos los términos de la progresión es:

a) 1000 b) 700 c) 750 d) 875 e) 1250

Desarrollo

Sea $\div t_1.t_2.t_3......t_{25}$ la progresión aritmética donde n = 25 números de términos, que es impar.

Entonces la suma es: $S = nt_c$, donde t_c es él término central y que por dato del problema se tiene $t_c = t_{13} = 30$, por lo tanto $S = nt_c = (25)(30) = 750$.

Luego la respuesta es **c**

(15) La suma de los 4 primeros términos de una progresión aritmética creciente es 5 veces la suma de los 2 primeros términos ¿Cuál será la razón de esta progresión si el primer término es $\frac{1}{3}$?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) 2

Desarrollo

Sea $\div t_1.t_2.t_3.t_4$ la progresión aritmética; de donde por definición se tiene:

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + r \\ t_3 = t_1 + 2r \\ t_4 = t_1 + 3r \end{cases} \qquad ... (1)$$

de acuerdo a la condición del problema se tiene:

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 5(t_1 + t_2)$ de donde $t_3 + t_4 = 4(t_1 + t_2)$ ... (2)

ahora reemplazamos (1) en (2), es decir:

$t_1 + 2r + t_1 + 3r = 4(t_1 + t_1 + r)$, simplificando

$2t_1+5r=8t_1+4r$ de donde $r=6t_1$ pero como $t_1=\frac{1}{3}$

entonces $r=6(\frac{1}{3})=2$ por lo tanto la respuesta es **e**

(16) En una progresión aritmética creciente cuyo primer término es 35, se cumple que la suma de los términos de lugares t_{10} y t_{15} es igual a 85. Según esto calcular él término t_{20}.

a) 110 b) 120 c) 130 d) 140 e) 150

Desarrollo

Se conoce que cualquier término de una progresión aritmética es:

$t_n=t_1+(n-1)r$, de donde $t_1=35$

por condición del problema se tiene: $t_{10}+t_{15}=85$ ... (1)

además $\begin{cases} t_{10}=t_1+9r \\ t_{15}=t_1+14r \end{cases}$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene: $t_1+9r+t_1+14r=85$, simplificando

$2t_1+23r=85$ de donde $2(35)+23r=85 \Rightarrow 70+3r=85$ entonces $r=5$

$t_{20}=t_1+19r=35+19(5)=35+95=130$, por lo tanto la respuesta es **c**

(17) En una progresión aritmética el último término se denota por "u" la razón por "r" y sus valores vienen dados por las ecuaciones

$$u^4+r^4-6u^2r^2=4633 \quad ; \quad u^3r+ur^3-3u^2r^2=558$$

si la suma de todos los términos es 25, hallar el número de términos.

a) 5 b) 7 c) 8 d) 10 e) 6

Desarrollo

Como $\begin{cases} u^4+r^4-6u^2r^2=4633 & \text{... (1)} \\ u^3r+ur^3-3u^2r^2=558 & \text{... (2)} \end{cases}$

A la ecuación (2) multiplicamos por –4, es decir:

$$\begin{cases} u^4 + r^4 - 6u^2r^2 = 4633 \\ -4u^3r - 4ur^3 + 12u^2r^2 = -2232 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$\underbrace{u^4 - 4u^3r - 4ur^3 + 6u^2r^2 + r^4} = 2401$$

$$(u-r)^4 = 2401 = 7^4 \quad \text{de donde } u - r = 7 \qquad \dots (3)$$

ahora reemplazamos (3) en (2) se tiene:

$$ur(u^2 + r^2 - 3ur) = 558 \Rightarrow ur[\underbrace{(u-r)^2}_{7} - ur] = 558, \text{ de donde}$$

ur (49 – ur) = 558, entonces se tiene: $(ur)^2 - 49ur + 558 = 0$, factorizando

(ur – 18)(ur – 31) = 0 de donde ur = 18, ur = 31, ahora consideremos el sistema

$$\begin{cases} u - r = 7 \\ ur = 18 \end{cases}, \text{ de donde } \begin{matrix} u = 7 + r \\ r(7+r) = 18 \end{matrix} \Rightarrow r^2 + 7r - 18 = 0$$

(r + 9)(r – 2) = 0 ⇒ r = 2, u = 9 ; r = -9, u = -2

para r = 2, u = 9, $s = \frac{n}{2}(2u - (n-1)r) = 25$

$$\frac{n}{2}[18 - (n-1)2] = 25 \Rightarrow n^2 - 10n + 25 = 0$$

$(n-5)^2 = 0$ de donde n = 5 términos, la respuesta es **a**

(18) Se tiene 3 números en progresión aritmética, si se aumentaran en 2, 3 y 8 respectivamente obtenemos números proporcionales a 10, 25 y 50. Luego el mayor de estos números es:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

Desarrollo

Sean t_1,t_2,t_3 los números en progresión aritmética, de las condiciones del problema se tiene: $\frac{t_1+2}{10}=\frac{t_2+3}{25}=\frac{t_3+8}{50}$ ... (1)

por definición de cualquier término de una progresión aritmética se tiene:

$$t_2=t_1+r\ ,\quad t_3=t_1+2r \qquad \text{... (2)}$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene: $\frac{t_1+2}{10}=\frac{t_1+r+3}{25}=\frac{t_1+2r+8}{50}$, simplificando

$$\frac{t_1+2}{2}=\underbrace{\frac{t_1+r+3}{5}=\frac{t_1+2r+8}{10}} \qquad \text{... (3)}$$

de (3) tomamos $\frac{t_1+r+3}{5}=\frac{t_1+2r+8}{10}$ de donde

$10t_1+10r+30=5t_1+10r+40$ entonces $5t_1=10 \Rightarrow t_1=2$

de (3) tomamos $\frac{t_1+2}{2}=\frac{t_1+r+3}{5}$ como $t_1=2$ entonces

$\frac{2+2}{2}=\frac{2+r+3}{5}$ entonces $10=5+r$ de donde $r=5$

Luego los términos son $t_1=2$

$$t_2=t_1+r=2+5=7$$

$$t_3=t_1+2r=2+10=12$$

como el número mayor es 12, la respuesta es **b**

(19) Si $t_{47}=201$ y $t_{38}=165$ son los términos de una progresión aritmética entonces el término t_{85} es:

a) 343 b) 353 c) 361 d) 371 e) 381

Desarrollo

El término general de una progresión aritmética es $\boxed{t_n = t_1 + (n-1)r}$

$\begin{cases} t_{47} = t_1 + (47-1)r = 201 \\ t_{38} = t_1 + (38-1)r = 165 \end{cases}$, de donde $\begin{cases} t_1 + 46r = 201 \\ t_1 + 37r = 165 \end{cases}$, restando

$(t_1 + 46r) - (t_1 + 37r) = 201 - 165 \Rightarrow 9r = 36$ de donde $r = 4$

como $t_1 + 46r = 201 \Rightarrow t_1 + 46(4) = 201$

$t_1 + 184 = 201 \Rightarrow t_1 = 201 - 184 = 17 \Rightarrow t_1 = 17$

Luego $t_{85} = t_1 + (85-1)r = 17 + 84(4) = 17 + 336 = 353$. Por lo tanto la respuesta es $\boxed{b}$

(20) En una progresión aritmética cuya razón es 16. se tiene los términos $t_x = 400$; $t_{x+19} = 644 + 3x$, entonces el término t_{51} es:

a) 696 b) 796 c) 896 d) 996 e) 999

Desarrollo

Como $t_n = t_1 + (n-1)r$ donde r = 16, de los datos se tiene:

$\begin{cases} t_{x+19} = t_1 + (x+18)r = 644 + 3x & \dots (1) \\ t_x = t_1 + (x-1)r = 400 & \dots (2) \end{cases}$

ahora restamos (1) – (2) obteniéndose

$[t_1 + (x+18)r] - [t_1 + (x-1)r] = 644 + 3x - 400$, simplificando

$(x + 18 - x + 1)r = 244 + 3x \Rightarrow (0 + 19)(16) = 244 + 3x$

$304 = 244\ \ 3x \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20$

$t_{20} = 400 = t_1 + 19r \Rightarrow t_1 + 19(16) = 400 \Rightarrow t_1 = 96$

de donde $t_{51} = t_1 + 50r = 96 + 50(16) = 96 + 800 = 896$, por lo tanto la respuesta es $\boxed{c}$

(21) La suma de los dos primeros términos de una progresión aritmética es la solución positiva de la ecuación $x^2+6x-55=0$ y el 5to término es 13, hallar la razón de la progresión aritmética.

a) 2 b) 2.5 c) 3 d) 4 e) 1

Desarrollo

Factorizando la ecuación $x^2+6x-55=0$ se tiene:

(x + 11)(x − 5) = 0 de donde x = 5, x = -11, de la condición del problema se tiene:

$\begin{cases} t_1+t_2=5 \\ t_5=13 \end{cases}$ de donde $\begin{cases} 2t_1+r=5 & \dots (1) \\ t_1+4r=13 & \dots (2) \end{cases}$

de (2) se tiene $t_1=13-4r$ que reemplazamos en (1)

2 (13 − 4r) + r = 5 ⇒ 26 − 7r = 5 ⇒ 7r = 21 ⇒ r = 3

como r = 3, la respuesta es **c**

(22) Si la suma de "n" términos de una progresión aritmética es $5n+2n^2$, para todos los valores de n. Hallar él término del lugar 10.

a) 61 b) 51 c) 49 d) 43 e) 41

Desarrollo

Sea $\div t_1 . t_2 . t_3 ..... t_n$ una progresión aritmética

donde $S=t_1+t_2+....+t_n=5n+2n^2$

Si n = 1, $t_1=5+2=7$

n = 2, $t_1+t_2=10+8=18 \Rightarrow t_2=18-t_1=18-7=11$ donde $r=t_2-t_1=11-7=4$

n = 10, $t_{10}=t_1+9r=7+9(4)=7+36=43$

por lo tanto la respuesta es **d**

(23) La suma de los dos primeros términos de la progresión aritmética es igual al valor absoluto de la suma de las raíces de la ecuación $1-\frac{6}{x}-\frac{135}{x^2}=0$ y el sexto término es igual a 21. Hallar la razón.

a) 4 b) 2 c) 6 d) 3 e) 2.5

Desarrollo

A la ecuación $1-\frac{6}{x}-\frac{135}{x^2}=0$ expresamos en la forma $x^2-6x-135=0$ y por la relación entre raíces y coeficientes se tiene que $x_1+x_2=6$

De la condición del problema se tiene: $\begin{cases} t_1+t_2=6 \\ t_6=21 \end{cases}$ pero $\begin{matrix} t_2=t_1+r \\ t_6=t_1+5r \end{matrix}$, de donde

$$\begin{cases} 2t_1+r=6 & \text{... (1)} \\ t_1+5r=21 & \text{... (2)} \end{cases}$$

de la ecuación (2) tenemos $t_1=21-5r$ que reemplazamos en la ecuación (1) se tiene:

$2(21-5r)+r=6 \Rightarrow 42-10r+r=6$

$-9r=-36$ de donde $r=\frac{36}{9}=4$, la respuesta es **a**

(24) La suma de los 20 términos de una progresión aritmética creciente es 650. Si el producto de los extremos es 244. Hallar la razón.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Sea $\div t_1.t_2.t_3.....t_{20}$ una progresión aritmética de las condiciones del problema se tienen:

$S=t_1+t_2+...+t_{20}=650=(\frac{t_1+t_{20}}{2}).20$ y $t_1.t_{20}=244$

de donde $\begin{cases} t_1+t_{20}=65 \\ t_1.t_{20}=244 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t_1=65-t_{20} \\ t_{20}(65-t_{20})=244 \end{matrix}$

$t_{20}^2 - 65t_{20} + 244 = 0$, factorizando

$(t_{20} - 61)(t_{20} - 4) = 0 \Rightarrow t_{20} = 61$, $t_1 = 4$ por creciente

como $t_{20} = t_1 + 19r = 4 + 19r$

$4 + 19r = 61 \Rightarrow 19r = 57 \Rightarrow r = \frac{57}{19} = 3$, por lo tanto la respuesta es **b**

(25) Hallar el número de términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de sus "n" términos no varia al aumentar en 1 a la razón y al mismo tiempo disminuir en 30 a su primer término.

a) 41 b) 51 c) 61 d) 71 e) 81

Desarrollo

Sea $\div t_1 . t_2 . t_3 .... t_n$ una progresión aritmética de las condiciones del problema se tiene:

$$S = [2t_1 + (n-1)r]\frac{n}{2} \quad ... (1)$$

$$S = [2(t_1 - 30) + (n-1)(r+1)]\frac{n}{2} \quad ... (2)$$

como estas sumas no varia, se tiene:

$$[2t_1 + (n-1)r]\frac{n}{2} = [2(t_1 - 30) + (n-1)(r+1)]\frac{n}{2}$$

$2t_1 + (n-1)r = 2(t_1 - 30) + (n-1)(r+1) \Rightarrow -60 + n - 1 = 0$ de donde $n = 61$

por lo tanto la respuesta es **c**

(26) La suma de los 4 primeros términos de una progresión aritmética es 20 y la razón es 6 ¿Cuál es el primer término?

a) 8 b) 6 c) 4 d) -2 e) -4

Desarrollo

Se conoce que: $S=[\frac{2t_1+(n-1)r}{2}]n$

Pero por datos del problema se tiene: S = 20, n = 4, r = 6

Luego al reemplazar estos datos en la fórmula se tiene:

$20=[\frac{2t_1+(4-1)6}{2}].4 \Rightarrow 20=(2t_1+18).2$

$10=2t_1+18 \Rightarrow 2t_1=-8$ de donde $t_1=-\frac{8}{2}=-4$

por lo tanto la respuesta es **e**

(27) Las edades de tres personas forman una progresión aritmética creciente cuya suma es 60 y la suma de sus cuadrados es 1250. Determinar la mayor de las edades.

a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

Desarrollo

A la progresión aritmética consideremos en la forma ÷ (t – r) . t . (t + r) y por condición del problema se tiene: t – r + t + t + r = 60 ⇒ 3t = 60 de donde t = 20

además se sabe que: $(t-r)^2+t^2+(t+r)^2=1250$

$(20-r)^2+20^2+(20+r)^2=1250$, desarrollando

$400-40r+r^2+400+400+40r+r^2=1250$, simplificando

$2r^2=50$ entonces $r^2=25$ de donde r = 5

Los términos de la progresión es 15, 20, 25

La mayor edad es 25, la respuesta es **c**

(28) Si los tres primeros términos de la progresión geométrica (P.G) de razón igual a 12 son: $\frac{1}{3(a-b)}, \frac{4}{a^2-b^2}, \frac{48}{a+b}$ el cuarto término será.

a) 96 b) 576 c) 144 d) 72 e) 652

Desarrollo

$\div\div \frac{1}{3(a-b)} : \frac{4}{a^2-b^2} : \frac{48}{a+b}$, la progresión geométrica y la razón es dado por

$$r = \frac{\frac{4}{a^2-b^2}}{\frac{1}{3(a-b)}} = \frac{12(a-b)}{a^2-b^2} = 12 \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{a+b} = 1 \Rightarrow a+b=1$$

el cuarto término es $\frac{48}{a+b}(r) = \frac{48}{1}(12) = 576$, por lo tanto la respuesta es **b**

(29) Dada la progresión aritmética: $\div$ a.8.c.d.e y la progresión geométrica $\div\div$ x:a:8:d:32 un valor de (x + e) es:

a) 22 b) 16 c) 18 d) 20 e) 32

Desarrollo

De la progresión geométrica se tiene:

x : a : 8 : d : 32, de donde $8q^2 = 32$

xq xq xq xq

$q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$

además d = 8 x q = 8(2) = 16

a x q = 8 $\Rightarrow$ 2a = 8 $\Rightarrow$ a = 4

x x q = a $\Rightarrow$ 2x = 4 $\Rightarrow$ x = 2

ahora de la progresión aritmética se tiene:

a . 8 . c . d . e = 4 . . 8 . . c . . 16 . . e , de donde



c = 8 + 4 = 12, e = 16 + 4 = 20

por lo tanto x + e = 2 + 20 = 22, la respuesta es **a**

(30) La diferencia del tercer término menos el sexto de una progresión geométrica es 26 y el cociente 27, calcular el primer término.

a) 245 b) 234 c) 243 d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{5}{9}$

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5 : t_6$ la progresión geométrica

De las condiciones del problema se tiene: $\begin{cases} t_3 - t_6 = 26 & \dots (1) \\ \frac{t_3}{t_6} = 27 & \dots (2) \end{cases}$

de la ecuación (2) $\frac{t_3}{t_6} = 27$ de donde $t_3 = 27t_6$, reemplazando en la ecuación (1)

$27t_6 - t_6 = 26 \Rightarrow \boxed{t_6 = 1}$

como $t_3 = 27t_6 = 27(1) = 27 \Rightarrow \boxed{t_3 = 27}$

además $\begin{cases} t_6 = t_1.q^5 = 1 \\ t_3 = t_1.q^2 = 27 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1.q^5}{t_1.q^2} = \frac{1}{27}$, simplificando

$q^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

como $t_1.q^2 = 27 \Rightarrow t_1(\frac{1}{3})^2 = 27 \Rightarrow t_1 = 27(9) = 243$

por lo tanto la respuesta es **c**

(31) Calcular el número de términos de una progresión geométrica de razón 2, siendo 189 la suma de ellos, y la suma de sus cuadrados 12,285.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ... : t_n$ la progresión geométrica

De las condiciones del problema: $t_1 + t_2 + ... + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = 189$ ... (1)

$$t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 12285 \quad ... (2)$$

como $S = \dfrac{t_1(q^n - 1)}{q-1}$ donde q = 2 entonces

$$\begin{cases} \dfrac{t_1(2^n - 1)}{2-1} = 189 \\ \dfrac{t_1^2(4^n - 1)}{4-1} = 12285 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(2^n - 1) = 189 & ... (3) \\ t_1.t_1(2^n + 1)(2^n - 1) = 12285(3) & ... (4) \end{cases}$$

de (3) despejamos $t_1 = \dfrac{189}{2^n - 1}$, reemplazamos en (4)

$t_1^2(2^n + 1)(2^n - 1) = 12285(3)$ de donde se tiene:

$$\frac{189^2}{(2^n - 1)^2}(2^n + 1)(2^n - 1) = 12285(3) \Rightarrow \frac{2^n + 1}{2^n - 1} = \frac{(12285)(3)}{189^2}$$

$$\frac{2^n + 1}{2^n - 1} = \frac{3^4.5.91}{3^6.7^2} = \frac{5.7.13}{3^2.7.7} = \frac{65}{63}$$

$$\frac{2^n + 1}{2^n - 1} = \frac{65}{63} \Rightarrow 63(2^n + 1) = 65(2^n - 1) \Rightarrow 2.2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 64 = 2^6$$

como $2^n = 2^6$ entonces n = 6 la respuesta es **b**

(32) La suma de tres números de una progresión geométrica es 28; el producto del término medio por la suma de los extremos es igual 160. Hallar el mayor de los números.

a) 8 b) 16 c) 24 d) 32 e) 40

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3$, la progresión geométrica

De la condición del problema se tiene: $t_2(t_1 + t_3) = 160$

además $t_1 + t_2 + t_3 = 28$ entonces $t_1 + t_3 = 28 - t_2$

De donde $t_2(28 - t_2) = 160$ entonces $t_2^2 - 28t_2 + 160 = 0$

$(t_2 - 8)(t_2 - 20) = 0 \Rightarrow t_2 = 8 \vee t_2 = 20$

como la progresión es geométrica y la suma es 28 entonces se toma $t_2 = 8$ y $t_2 = 20$ no se considera por no cumplir con la condición.

además de la propiedad del término central si n es impar se tiene $t_2^2 = t_1.t_3$ como $t_2 = 8$ entonces $t_1.t_3 = 8^2 = 64$ y $t_1 + t_3 = 20 \Rightarrow t_3 = 20 - t_1$

$t_1(20 - t_1) = 64 \Rightarrow t_1^2 - 20t_1 + 64 = 0$ factorizando

$(t_1 - 4)(t_1 - 16) = 0 \Rightarrow t_1 = 4 \vee t_1 = 16$

Si $t_1 = 4$, $t_3 = 20 - 4 = 16$ por lo tanto los números de la progresión son: 4,8,16 y como el mayor es 16. La respuesta es **b**

(33) En una progresión geométrica creciente se conoce el término de lugar 3 cuyo valor es 2 y el término de lugar 7 cuyo valor es 32 ¿Cuál es el valor del término de lugar 10?

a) 64 b) 128 c) 256 d) 156 e) 132

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5 : t_6 : t_7 : t_8 : t_9 : t_{10}$, de donde $t_3 = 2$, $t_7 = 32$

además se conoce $t_x = t_y.q^{x-y}$ donde q es la razón

$t_7 = t_3.q^{7-3} \Rightarrow 32 = 2q^4 \Rightarrow q^4 = 16$

$q^4 = 2^4 \Rightarrow$ q = 2. Luego $t_{10} = t_3.q^{10-3} = 2(2)^7 = 2(128) = 256$

como $t_{10} = 256$ la respuesta es **c**

(34) El cociente entre el cuarto término y el primero de una progresión geométrica es igual a 8 y su suma es 45. Calcule los términos entre ellos.

a) 15 y 30 b) 12 y 28 c) 15 y 25 d) 10 y 20 e) 10 y 25

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : t_4$, la progresión geométrica, tal que:

$\begin{cases} \dfrac{t_4}{t_1} = 8 \\ t_1 + t_4 = 45 \end{cases}$ de donde $t_4 = 8t_1$
$t_1 + 8t_1 = 45 \Rightarrow 9t_1 = 45 \Rightarrow \boxed{t_1 = 5}$

como $t_4 = 8t_1 = 8(5) = 40 \Rightarrow \boxed{t_4 = 40}$

como $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{t_n}{t_1}} = \sqrt[4-1]{\dfrac{t_4}{t_1}} = \sqrt[3]{\dfrac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow$ q = 2

$t_2 = t_1.q = 5(2) = 10$, $t_3 = t_2(q) = 10(2) = 20$

como $t_2 = 10$ y $t_3 = 20$ son los términos entre t_1 y t_4

por lo tanto la respuesta es **d**

(35) La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente e ilimitada es igual al doble de la suma de los 5 términos. Hallar la razón.

a) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ b) $\sqrt[5]{\dfrac{3}{2}}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}$

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ..... : t_n : .....$, de donde

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n + ...\quad y\quad \lim_{n\to\infty} S = \frac{t_1}{1-q} = 2t_1 \underbrace{\left(\frac{1-q^5}{1-q}\right)}_{\text{suma de los 5 términos}}$$

$$\frac{t_1}{1-q} = 2t_1\left(\frac{1-q^5}{1-q}\right) \Rightarrow 1-q^5 = \frac{1}{2} \Rightarrow q^5 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto la respuesta es **e**

(36) Hallar la suma del número de términos y la razón de una progresión geométrica, cuyo primer término es 7, el último término 567, y la suma de todos los términos es 847.

a) 12 b) 10 c) 8 d) 6 e) 4

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_2 : t_3 : ..... : t_n$, la progresión geométrica, tal que:

$t_1 = 7$, $t_n = 567$ y $S = 847$ ... (1)

además se conoce: $S = \dfrac{t_n . q - t_1}{q-1}$ ... (2)

ahora reemplazamos (1) en (2) se tiene:

$$847 = \frac{567q-7}{q-1} \Rightarrow 847q - 847 = 567q - 7$$

$$847q - 567q = 847 - 7 \Rightarrow 280q = 840 \Rightarrow q = \frac{840}{280} = 3$$

como $t_n = t_1 . q^{n-1} \Rightarrow 567 = 7.3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = \frac{567}{7} = 81$

$3^{n-1} = 81 = 3^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$

Luego $n + q = 5 + 3 = 8$, la respuesta es **c**

(37) La suma de una progresión geométrica de tres términos es 248 y su producto es 64000, el mayor término es:

a) 50 b) 100 c) 150 d) 200 e) 250

Desarrollo

Sea $\div\div \frac{t}{q} : t : tq$, la progresión geométrica donde q es la razón

De la condición del problema: $(\frac{t}{q})(t)(tq) = 64000$

$$t^3 = 64000 = 40^3 \Rightarrow t = 40$$

además $\frac{t}{q} + t + tq = 248 \Rightarrow t(\frac{1}{q} + 1 + q) = 248$

$40(q^2 + q + 1) = 248q \Rightarrow 5q^2 - 26q + 5 = 0$, factorizando

$(5q - 1)(q - 5) = 0 \Rightarrow q = 5 \vee q = \frac{1}{5}$

Si q = 5 la progresión es: 8 : 40 : 200

$q = \frac{1}{5}$ la progresión es: 200 : 40 : 8

por lo tanto él término mayor es 200, la respuesta es **d**

(38) La suma de los términos que ocupan el lugar impar en una progresión geométrica de 6 términos es 637, y la suma de los que ocupa el lugar par es 1911. Hallar la suma del primer término y la razón.

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_1q : t_1q^2 : t_1q^3 : t_1q^4 : t_1q^5$, la progresión geométrica

De las condiciones del problema se tiene:

$t_1 + t_1q^2 + t_1q^4 = 637$, de donde factorizamos $t_1(1+q^2+q^4) = 637$ ... (1)

$t_1q + t_1q^3 + t_1q^5 = 1911$, al factorizar se tiene: $t_1q(1+q^2+q^4) = 1911$ ... (2)

al dividir (2) entre (1) se tiene: $\frac{t_1q(1+q^2+q^4)}{t_1(1+q^2+q^4)} = \frac{1911}{637} \Rightarrow q = \frac{1911}{637} = 3 \Rightarrow \boxed{q=3}$

como $t_1(1+q^2+q^4) = 637 \Rightarrow t_1(1+9+81) = 637$

de donde $t_1 = \frac{637}{91} = 7 \Rightarrow t_1 = 7$, de donde la suma $t_1 + q = 7+3 = 10$

Luego la respuesta es **a**

39 Si 1 y 2 son los términos extremos de una progresión geométrica, de 24 términos. Calcular el producto de todos los términos de la progresión geométrica.

a) 1096 b) 2096 c) 3096 d) 4096 e) 5096

Desarrollo

Aplicando la propiedad (4) de las progresiones geométricas

$p = \sqrt{(t_1.t_n)^n}$ donde $t_1 = 1$, $t_n = 2$, $n = 24$

$p = \sqrt{(1.2)^{24}} = \sqrt{2^{24}} = 2^{12} = 2^3.2^3.2^3.2^3 = 8.8.8.8 = 64.64 = 4096$

como $p = 4096$ es el producto de los 24 términos. Por lo tanto la respuesta es **d**

40 El número de términos de una progresión geométrica creciente es 6, la suma de todos ellos es 364 y la diferencia entre el cuarto término y el tercero es igual al séxtuplo del segundo ¿Cuál es el primer término?

a) 1 b) 2 c) $\frac{52}{3}$ d) $\frac{3}{52}$ e) 4

Desarrollo

Sea $\div\div t_1 : t_1q : t_1q^2 : t_1q^3 : t_1q^4 : t_1q^5$, la progresión geométrica

De la condición del problema: $S = t_1 + t_1q + t_1q^2 + t_1q^3 + t_1q^4 + t_1q^5 = 364$

Pero por la observación de la propiedad (6) se tiene:

$$S = \frac{t_1(q^6-1)}{q-1} = 364 \Rightarrow t_1(\frac{q^6-1}{q-1}) = 364 \quad \text{... (1)}$$

además se sabe que: $t_4 - t_3 = 6t_2$ de donde

$t_1q^3 - t_1q^2 = 6t_1q$ entonces $t_1q(q^2-q) = 6t_1q$, simplificando

$q^2 - q = 6 \Rightarrow q^2 - q - 6 = 0$ factorizando $(q-3)(q+2) = 0$

de donde q = 3 y q = -2, como la progresión es creciente entonces $\boxed{q=3}$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$t_1(\frac{3^6-1}{3-1}) = 364 \Rightarrow \frac{t_1}{2}(729-1) = 364 \Rightarrow \frac{728}{2}t_1 = 364 \Rightarrow 364t_1 = 364$$

de donde $t_1 = 1$, luego la respuesta es $\boxed{a}$

(41) El promedio de dos números es 3, si se duplica el primer número y se quintuplica el segundo número, el nuevo promedio es 9. Los números originales están en la razón.

a) 3:1 **b)** 3:2 **c)** 4:1 **d)** 5:2 **e)** 2:1

Desarrollo

Si a_1 y a_2 son los dos números, tal que: $\frac{a_1+a_2}{2} = 3$, de donde $a_1 + a_2 = 6$ ... (1)

además de las condiciones dadas se tiene que:

$$\frac{2a_1+5a_2}{2} = 9 \text{ de donde } 2a_1 + 5a_2 = 18 \quad \text{... (2)}$$

Luego de la ecuación (1) se tiene que: $a_2 = 6 - a_1$

reemplazando en (2) se tiene: $2a_1 + 5(6 - a_1) = 18$

$2a_1 + 30 - 5a_1 = 18 \Rightarrow -3a_1 = -12$ de donde $a_1 = 4$

$a_2 = 6 - a_1 = 6 - 4 = 2 \Rightarrow a_2 = 2$

La razón $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ están en la razón de 2 a 1 o 2:1, Por lo tanto la respuesta es **e**

(42) El promedio de 20 números es 40. Si agregamos 5 números, cuyo promedio es 20 ¿Cuál es el promedio final?

a) 42 b) 20 c) 40 d) 30 e) 36

Desarrollo

El promedio de los números $a_1, a_2, a_3, ..., a_{20}$ es:

$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{20}}{20} = 40$ de donde $\boxed{a_1 + a_2 + ... + a_{20} = 800}$

el primero de los números b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 es:

$\frac{b_1 + b_2 + ... + b_5}{5} = 20$ de donde $\boxed{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 100}$

y el promedio de los 25 números $a_1, a_2, ..., a_{20}, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

(promedio final) es: $p = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{20} + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{25}$

$p = \frac{800 + 100}{25} = \frac{900}{25} = 36$, por lo tanto la respuesta es **e**

(43) El promedio de 4 números es "x". Si uno de los números es x – 3 ¿Cuál es el promedio de los otros 3?

a) x – 1 b) x + 1 c) 3(x + 1) d) $\frac{x+1}{3}$ e) $\frac{3(x+1)}{4}$

Desarrollo

Como el promedio de los 4 números a_1, a_2, a_3, a_4 es:

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=x$ entonces $\boxed{a_1+a_2+a_3+a_4=4x}$ ... (1)

pero como $a_1=x-3$ entonces reemplazamos en (1)

$x-3+a_2+a_3+a_4=4x \Rightarrow a_2+a_3+a_4=3x+3=3(x+1)$

de donde $\dfrac{a_2+a_3+a_4}{3}=x+1$ que es el promedio de los otros 3 números

Luego la respuesta es **b**

(44) El promedio de 6 números es $\bar{x}$. Si se retira el mayor, el promedio se reduce en 4 unidades. Halle la diferencia entre $\bar{x}$ y el número mayor retirado.

a) -24 b) 24 c) 20 d) -20 e) 30

Desarrollo

Sean $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$ los 6 números en donde a_6 es el mayor y la suma es

$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ la suma y el promedio de los 6 números es:

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}=\bar{x}$

de donde $\underbrace{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}_{S}=6\bar{x}$ entonces $S=6\bar{x}$

De la condición del problema al retirar el número mayor a_6 el promedio $\bar{x}$ se reduce en 4 unidades, es decir: $\dfrac{S-a_6}{5}=\bar{x}-4 \Rightarrow S-a_6=5\bar{x}-20$ como $S=6\bar{x}$

entonces $6\bar{x}-a_6=5\bar{x}-20 \Rightarrow \bar{x}-a_6=-20$ que es la diferencia entre el promedio y el número mayor, la respuesta es **d**

(45) De los 20 integrantes de un club de tiro todos ellos aciertan de 25 tiros a más ¿Cuál será la máxima cantidad de aciertos que uno de ellos puede obtener para que el promedio de aciertos del club sea 27?

a) 27 b) 75 c) 55 d) 65 e) 54

Desarrollo

Datos del problema: 20 = número de integrantes

25 = número mínimo de acierto de cada integrante

Si uno de ellos obtiene la mayor cantidad de aciertos, los otros 19 deben acertar la menor cantidad posible, es decir 25.

Sea x = el máximo número de aciertos de uno de ellos, luego el promedio

$$= \frac{x+19(25)}{20} = 27 \text{ de donde } x + 475 = 540$$

x = 65 es el máximo número de aciertos, la respuesta es **d**

(46) Si la media aritmética y la media geométrica de a y b son 2 números consecutivos, hallar $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\sqrt{5}$ e) $3\sqrt{2}$

Desarrollo

$m_A =$ media aritmética y $m_G =$ media geométrica

por propiedad se tiene que: $m_A \geq m_G$ ... (1)

$m_A = \frac{a+b}{2} = n+1$, $m_G = \sqrt{ab} = n$ por datos del problema y a > b

$$\text{como } \begin{cases} \frac{a+b}{2} = n+1 \\ \sqrt{ab} = n \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a+b = 2n+2 \\ 2\sqrt{ab} = 2n \\ \hline \underbrace{a-2\sqrt{ab}+b} = 2 \end{array} \text{ restando}$$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{2}$, por lo tanto la respuesta es **a**

(47) Si la media armónica de dos números a y b es 160, su media geométrica 200 y la diferencia de dichos números es 420 ¿Cuál es el valor del número mayor?

a) 360 b) 460 c) 560 d) 660 e) 760

Desarrollo

Por condiciones del problema: MH = media armónica

$$MH = \frac{2ab}{a+b} = 160 \quad \Rightarrow \begin{cases} ab = 80(a+b) \\ ab = 40000 \end{cases} \text{ siendo } a > b \text{ de donde}$$

$$MG = \sqrt{ab} = 200$$

$40000 = 80(a + b) \Rightarrow \boxed{a + b = 500}$

además $a - b = 420$ por condición del problema

Luego $a + b = 500$

$a - b = 420$ sumando

$2a = 920$

como $2a = 920 \Rightarrow a = 460$, la respuesta es $\boxed{b}$

(48) Si el promedio de P números es Q, el promedio de Q números es P, hallar el promedio de todos los términos de P y Q.

a) $\frac{2P+Q}{PQ}$ b) $\frac{P+2Q}{PQ}$ c) $\frac{PQ}{P+Q}$ d) $\frac{2PQ}{P+Q}$ e) $\frac{P+Q}{2PQ}$

Desarrollo

Si $x_1, x_2, ..., x_p$ son los P números donde su promedio es:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_p}{p} = Q \quad \text{entonces } x_1 + x_2 + ... + x_p = PQ \qquad ...(1)$$

$y_1, y_2, ..., y_Q$ son los Q números donde su promedio es:

$$\frac{y_1 + y_2 + ... + y_Q}{Q} = P \quad \text{entonces } y_1 + y_2 + ... + y_Q = PQ \qquad ...(2)$$

el promedio de los P y Q números es:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_P + y_1 + y_2 + ... + y_Q}{P+Q} = \frac{PQ+PQ}{P+Q} = \frac{2PQ}{P+Q}$$

por lo tanto, la respuesta es **d**

(49) Si a, b y c son tres números enteros, que tienen una media aritmética de 5 y una media geométrica de $\sqrt[3]{120}$ y además se sabe que el producto bc = 30, la media armónica de estos números es:

a) $\frac{180}{37}$ b) $\frac{160}{27}$ c) $\frac{190}{47}$ d) $\frac{210}{59}$ e) $\frac{170}{27}$

Desarrollo

Por datos del problema se tiene que la media aritmética de a, b, c es:

$\frac{a+b+c}{3} = 5$ de donde $a + b + c = 15$ ... (1)

La media geométrica de a, b y c es:

$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{120}$ de donde $a\underbrace{bc}_{30} = 120 \Rightarrow 30a = 120 \Rightarrow a = 4$

como $a + b + c = 15 \Rightarrow 4 + b + c = 15 \Rightarrow b + c = 11$ ... (2)

además $bc = 30$ ... (3)

de (2) $b + c = 11 \Rightarrow c = 11 - b$ que reemplazamos en (3)

$b(11 - b) = 30 \Rightarrow b^2 - 11b + 30 = 0$, factorizando

$(b - 6)(b - 5) = 0 \Rightarrow b = 6 \vee b = 5$

Sí $b = 6$, $c = 5$ y sí $b = 5$, $c = 6$.

Por lo tanto los número es: 4, 5 y 6

$$MH = \text{media armónica} = \frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{37}{60}} = \frac{180}{37}$$

Como $MH = \frac{180}{37}$, la respuesta es **a**

(50) Si a y b son dos números cuyo producto es 600 y la media aritmética y la media armónica son dos números enteros consecutivos, dar como respuesta el número mayor.

a) 20 b) 25 c) 30 d) 35 e) 40

Desarrollo

$MA = \frac{a+b}{2}$, $MH = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ son enteros consecutivos, entonces

$$MA - MH = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = 1$$

$$(a+b)^2 - 4ab = 2(a+b) \Rightarrow (a+b)^2 - 2(a+b) = 4ab$$

$$(a+b)^2 - 2(a+b) = 2400 \Rightarrow \underbrace{(a+b)^2 - 2(a+b)+1} = 2401$$

$(a+b-1)^2 = 2401$, de donde

$a+b-1 = \sqrt{2401} = 49 \Rightarrow a+b = 50 \Rightarrow$ **b = 50 − a** ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) es decir:

$ab = a(50-a) = 600 \Rightarrow a^2 - 50a + 600 = 0$, factorizando

si a = 30, b = 20; y si a = 20, b = 30,

por lo tanto los números son 20, 30 y el mayor es 30

Luego la respuesta es **c**

14.16. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. En una progresión aritmética los términos de lugar 47 y 38 son 201 y 165, el primer término es:

   a) 13 b) 15 c) 17 d) 19 e) 21

2. En una progresión aritmética de 42 términos; el primer término es 29 y el último 316, Hallar el vigésimo tercer término.

   a) 193 b) 183 c) 173 d) 163 e) 153

3. En una progresión aritmética el 4to término es 8 y el 7mo término es 14. Calcular el término del lugar 20.

   a) 40 b) 35 c) 30 d) 25 e) 20

4. En una progresión aritmética de 25 términos el décimo tercero es igual a 30. La suma de todos los términos de la progresión es:

   a) 550 b) 650 c) 700 d) 750 e) 850

5. En una sucesión que se encuentra en progresión aritmética y consta de 50 términos el primero y el último término son: 2 y 275, Hallar el vigésimo séptimo término.

   a) 164 b) 174 c) 184 d) 194 e) 198

6. La suma de los 15 términos de una progresión aritmética es 480. Si el producto de los términos extremos es 240. ¿Cuál es la razón?

   a) ± 16 b) ± 4 c) 2 d) 6 e) 8

7. Si la suma de n términos de una progresión aritmética es $5n+2n^2$, para todos los valores de n; hallar el término del lugar 10.

   a) 33 b) 43 c) 53 d) 63 e) 71

(8) Considere una progresión aritmética cuyo sexto término es el 60% del tercer término que es positivo. Si el producto de los números es 15, determine el número de términos que se deben de tomar de esta progresión para que sumen $30\frac{1}{3}$.

a) 6 o 12 b) 7 o 13 c) 6 0 13 d) 7 o 12 e) 6 o 7

(9) Un alumno de la UNMSM tiene que pagar una deuda de S/ 3600 en 40 pagos anuales que forman una progresión aritmética, cuando ya había pagado 30 anualidades convenidas, fallece dejando una tercera parte de la deuda sin pagar entonces el importe del primer pago es:

a) 51 b) 41 c) 31 d) 21 e) 61

(10) Si la diferencia de los términos del lugar 73 y 58 de una progresión aritmética es 90. El décimo quinto término es 104. Hallar el vigésimo término.

a) 114 b) 124 c) 134 d) 144 e) 154

(11) Tres términos consecutivos de una progresión aritmética creciente tiene como suma 30 y como producto 960. Hallar el término mayor.

a) 8 b) 12 c) 16 d) 20 e) 24

(12) La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es $2n^2+3n$. Hallar el término de lugar 50 de dicha progresión.

a) 161 b) 181 c) 201 d) 221 e) 231

(13) Una propiedad construye un pozo en su finca. El primer metro de excavación le cuesta 5 soles y cada uno de los restantes S/ 0.50 mas que el precedente. Hallar la profundidad del pozo sabiendo que su construcción le costo 590 nuevos soles.

a) 50 m b) 40 m c) 30 m d) 20 m e) 10 m

(14) En una progresión aritmética, el quinto término es 73 y el octavo término es 112. Hallar el décimo cuarto término.

a) 160 b) 170 c) 180 d) 190 e) 196

(15) Una persona camina 1 km, el primer día, 3 km el segundo día, 5 km el día siguiente y así sucesivamente. Después de tres días parte otra persona y recorre 12 km el primer día, 13 km el segundo día y 14 km el tercer día y así sucesivamente ¿Cuántos días tardara la primera persona en alcanzar a la segunda?

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(16) Si en una progresión aritmética se conoce el término de lugar 4 que vale 10 y el término de lugar 10 que vale 22 ¿Cuál es el valor del término de lugar 1?

a) 12 b) 10 c) 8 d) 6 e) 4

(17) El cuarto término de una progresión aritmética es 9, el noveno término es –6, la razón "r" será:

a) -6 b) -3 c) 3 d) 6 e) 9

(18) Calcular la razón de una progresión aritmética cuyo término es la unidad y tal que los términos de lugares 5; 20; 68 forman una progresión aritmética.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{7}$

(19) En una progresión aritmética de 25 términos el décimo tercero es igual a 30. La suma de todos los términos de la progresión es:

a) 1000 b) 700 c) 750 d) 8757 e) 1250

(20) En la primera aritmética, hallar el número de términos si la suma de términos es 570 y el número de términos entre 3 y 30 es igual al número de términos que hay entre 30 y "x".

a) 15 b) 17 c) 19 d) 21 e) 23

(21) Sea $\div t_1.t_2.t_3.t_4.t_5.t_6.t_7.t_8.t_9.t_{10}\ldots$, una progresión aritmética tal que $t_3+t_6=57$ y $t_5+t_{10}=99$, entonces la razón de P.A. pertenece al conjunto.

a) $<\frac{13}{2},9>$ b) $<\frac{11}{2},8>$ c) $<\frac{9}{2},7>$ d) $<\frac{7}{2},6>$ e) $<\frac{5}{2},5>$

(22) En una progresión aritmética, la razón y el número de términos son iguales. La suma de los términos es 156 y la diferencia de los extremos es 30, hallar el mayor término.

a) 21 b) 31 c) 41 d) 51 e) 61

(23) La suma del 2do y 5to término de una progresión aritmética es igual a 14; la suma del 3ro y 7mo término es igual a 8. Hallar el término 100.

a) -146 b) -156 c) -166 d) -176 e) -186

(24) Hallar el primer término y la razón de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los "n" primeros términos de esta progresión es para todos los valores de n, $n(3n + 1)$. Dar como respuesta la diferencia entre la razón y el primer término.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(25) En una progresión aritmética el tercer término es igual a 4 veces el primero y el sexto término es 17. Hallar la suma de los 8 primeros términos.

a) 80 b) 90 c) 100 d) 110 e) 120

(26) Si $a + b$; $4a - 3b$; $5b + 3a$; son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, la relación entre a y b es:

a) $b = 3a$ b) $a = 3b$ c) $2a = 3b$ d) $3a = 4b$ e) $4b = a$

(27) Halle la suma de los veinte primeros términos de la progresión aritmética, cuyo n – esimo término es $4n + 3$.

a) 778 b) 878 c) 978 d) 1078 e) 1178

(28) En una progresión aritmética el primer término es 31, el último término 94 y la suma 625. Halle la diferencia común.

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(29) Un cuerpo en caída libre recorre aproximadamente 4.9 m en el primer segundo, y en cada segundo subsecuente recorre 9.8 m más que en el segundo anterior. Se deja caer una piedra de lo alto de una torre y se observa que tarda 4 segundos en llegar al suelo. Hallar la altura de la torre.

a) 48.4 m b) 58.4 m c) 68.4 m d) 78.4 m e) 88.4 m

30 En la progresión aritmética ÷ a.b.c.d.e... se sabe que a + e = 20, hallar c^2

a) 81 b) 100 c) 121 d) 144 e) 169

31 La suma del tercero y sexto término de una progresión aritmética creciente es igual a 3, y la suma de sus cuadrados es igual a 45. Hallar el primer término de la progresión aritmética.

a) -6 b) -3 c) 3 d) 6 e) -9

32 Hallar él número de términos de una progresión aritmética de razón 1, la suma de todos sus términos es 33 y él término de lugar $\frac{n}{3}$ es 4.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

33 Se deja caer una bola desde una altura de 17 m; en cada rebote se eleva los $\frac{2}{3}$ de altura desde la cual cayo la última vez. ¿Qué distancia recorre la bola hasta que queda teóricamente en reposo?

a) 45 m b) 55 m c) 65 m d) 75 m e) 85 m

34 Hallar él número de términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los términos no varia al aumentar en 1 la razón al mismo tiempo disminuir en 30 su primer término.

a) 41 b) 51 c) 61 d) 71 e) 81

35 La suma de 3 números en progresión aritmética creciente es 27 y su producto es 504. Hallar el menor término.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

36 En una progresión aritmética de 15 términos, la suma de los términos es 360 ¿Cuál es el valor del término central?

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30

37 La suma de los términos de una progresión aritmética es 425 y su término central 17. Él número de términos es.

a) 25 b) 20 c) 15 d) 10 e) 5

(38) Dado una progresión aritmética creciente, de tres términos enteros y positivos. Si a su primer término le sumamos 2 y a su tercer término le sumamos 6, se obtiene una progresión geométrica. Hallar un posible valor de la suma de los elementos de la progresión aritmética.

a) 28 b) 38 c) 48 d) 58 e) 68

(39) El cuarto término de una progresión aritmética es 16 y el décimo término es 28. Hallar él término 50.

a) 112 b) 108 c) 104 d) 98 e) 92

(40) Él número de términos de una progresión aritmética comprendidos entre 23 y 59 es el doble del comprendido entre 3 y 23, hallar la razón.

a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 1

(41) En una progresión aritmética de un número impar de términos, la suma de los de lugar impar es 155 y la de los de lugar par 124. El valor de la suma del término central mas él número de términos es:

a) 25 b) 30 c) 35 d) 40 e) 45

(42) La suma de los 7 términos de una progresión aritmética es 28, y la diferencia entre él último y el primero es 12 ¿Cuál es él último término?

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

(43) Si a_1, a_2, a_3, a_4 son números naturales en progresión aritmética, donde $a_1+a_2+a_3+a_4=26$ y $a_1a_2a_3a_4=880$, calcular $N=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$.

a) 184 b) 194 c) 104 d) 214 e) 220

(44) La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es $4n^2+2n$, para todos los valores de "n" el valor del quinto término es:

a) 28 b) 38 c) 48 d) 58 e) 68

(45) Una progresión aritmética tiene un número impar de términos. El central vale 22 y el producto de los extremos 259. La diferencia del mayor menos el menor es:

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45 e) 50

(46) En una progresión aritmética de 6 términos crecientes, de términos positivos, el producto de los extremos es 154 y el producto de los dos términos centrales es 208. El último término es:

a) 12 b) 18 c) 22 d) 26 e) 28

(47) La suma de los 3 primeros términos de una progresión aritmética es 65, la suma de los 3 últimos es 307 y la suma de todos los términos es 3100 ¿Cuántos términos tiene la progresión aritmética?

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

(48) La suma del tercer y octavo término de una progresión aritmética es 41 y la relación del quinto al séptimo, $\frac{19}{25}$, el segundo término es:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(49) En una progresión aritmética creciente, de extremos 1 y x de (x + 1) términos, el cuadrado de la suma de sus términos es 18 veces el cubo del término central. Calcular la razón de la progresión.

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{8}{7}$ e) 7

(50) Jorge lleva ahorrado durante el presente mes S/ 598 y tiene con esto S/ 11350 ahorrados en el banco. Habiendo economizado cada mes S/ 12 más que el anterior ¿cuántos meses lleva ahorrando?

a) 20 b) 25 c) 30 d) 35 e) 40

(51) Un obrero ha ahorrado este mes 372 soles y tiene con estos 3165 soles en la caja de ahorros, habiendo economizado cada mes 23 soles más que el anterior. El primer mes ahorro.

a) 30 soles b) 40 soles c) 50 soles d) 60 soles e) 70 soles

(52) En una progresión aritmética, la suma de sus 9 primeros términos es 144 y la de sus nueve últimos 1224. Si la suma de todos sus términos es 3150, su antepenúltimo término es:

a) 132 b) 142 c) 152 d) 162 e) 172

(53) En una progresión aritmética, el primer término, la razón y él número de términos son iguales. Si el penúltimo término es igual a 42, el segundo término es igual a:

a) 28 b) 21 c) 14 d) 7 e) 3

(54) Desde los puntos A y B, distantes entre si 510 m, se mueven simultáneamente dos cuerpos, uno al encuentro del otro. El primero de ellos recorre en el primer minuto 50 m y en cada minuto siguiente 2 m más que en el precedente. El segundo cuerpo recorre en el primer minuto 40 m y en cada punto siguiente 4 m más que el precedente ¿Después de cuantos minutos se encuentra estos dos cuerpos?

a) 5 b) 8 c) 11 d) 14 e) 18

(55) El tercer término de una progresión aritmética representa la razón y él número de términos es 25, el cociente del último entre él término central es igual a:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(56) La suma de los cuatro términos centrales de una progresión aritmética creciente de 10 términos es 114, y el producto del primero por él último 306. El octavo término de esta progresión es:

a) 2 b) 31 c) 41 d) 51 e) 61

(57) En una progresión aritmética, el primer término es 18; él número de términos 15 y su suma 585, y en otra progresión, el primer término es 8, y la razón 4. Dos términos del mismo lugar de esas progresiones son iguales, el valor de ellos es:

a) 58 b) 48 c) 38 d) 28 e) 18

(58) En una progresión aritmética de 12 términos, la suma de todos ellos es 168 y el primero es 3. El número de términos de esta progresión, a partir del cuarto, que deben sumarse para que esta suma sea igual a la suma de los dos últimos términos es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(59) La diferencia entre la suma de los n + 1 primero términos de una progresión geométrica con la suma de los n primeros términos es m, y la diferencia entre la suma de los n + 2 primeros términos con la suma de los n primero términos es t, hallar la razón de la progresión.

a) $\frac{t}{m}-1$ b) $\frac{t}{m}-3$ c) $\frac{t}{m}+1$ d) $\frac{t}{m}+3$ e) $\frac{t}{m}$

(60) Tres números en progresión aritmética suman 33 y si se les resta 5, 3, -17 respectivamente, se tiene una progresión geométrica, hallar la suma de los números en progresión geométrica.

a) 22 b) 32 c) 42 d) 52 e) 58

(61) ¿Cuál es él término central de una progresión geométrica de 3 términos positivos si el producto de los dos primeros es 24 y el producto de los dos últimos es 54?

a) 10 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2

(62) En una progresión geométrica creciente se conoce él término de lugar 3 cuyo valor es 2 y él término del lugar 7 cuyo valor es 32 ¿Cuál es le valor del término de lugar 10?

a) 64 b) 54 c) 48 d) 38 e) 32

(63) La suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica es 155 y la diferencia es el 5to término y el 1er es 75. Si la razón es un número entero menor que 5, entonces el primero y el quinto término de la progresión serán:

a) 2; 68 b) 3; 78 c) 5; 80 d) 6; 81 e) -3

(64) Tres números están en progresión aritmética decreciente y aumentan en 2, 1 y 5 respectivamente, forman una progresión geométrica de tres términos cuya suma es 35, la razón y el producto de los tres términos de la progresión geométrica son respectivamente.

a) $\frac{1}{2}$ y 1000 b) 2 y 35 c) $\frac{1}{2}$ y 35 d) 2 y 1000 e) $\frac{1}{2}$ y 100

(65) En una progresión geométrica de 6 términos, en la cual el primer término es igual a la razón y la suma del primero y el tercero es 30. La suma de sus términos es:

a) 890 b) 980 c) 1092 d) 1292 e) 1392

(66) Si se sabe que la suma de los 6 primero términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 4, es 126 veces la suma de los 3 primero términos de la misma progresión. Calcular la suma de los 6 primeros términos de dicha progresión.

a) 11264 b) 15624 c) 14624 d) 13642 e) 12624

(67) En una progresión geométrica de tres términos, la suma de ellos es 117 y su producto 19683. Hallar el 2do término, si la razón es mayor que 1.

a) 41 b) 51 c) 61 d) 71 e) 81

(68) Determinar cuatro números enteros sabiendo que forman una progresión geométrica, la suma de ellos es 255 y el exceso del tercero sobre el primero es 45. Dar como respuesta la suma del segundo y el cuarto término.

a) 104 b) 204 c) 304 d) 184 e) 144

(69) Calcular el valor de cuatro números, sabiendo que los tres primeros están en progresión aritmética y los tres últimos están en progresión geométrica, siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios igual a 12, Dar como respuesta uno de ellos.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

(70) La suma de los términos que ocupan el lugar impar en una progresión geométrica de 6 términos es 1365 y la suma de los que ocupan el lugar par 5460. Hallar la razón de la progresión geométrica.

a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) 3

(71) La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es "m" veces la suma de sus "n" primeros términos. Hallar la razón de la progresión geométrica.

a) $(\frac{m-1}{m})^{\frac{1}{n}}$ b) $(\frac{m-1}{m})^{\frac{1}{m}}$ c) $(\frac{m+1}{n-1})^{\frac{1}{n}}$

d) $(\frac{m-1}{n+1})^{\frac{1}{m}}$ e) $(\frac{1}{mn})^{\frac{1}{m}}$

(72) En una progresión geométrica de razón 3, la suma de sus términos es 120 y la de sus cuadrados 7380. La suma de sus términos extremos es:

a) 264 b) 234 c) 144 d) 104 e) 84

(73) La suma de tres números en progresión geométrica es 70; si los extremos se multiplican por 4 y el intermedio por 5, los productos están en progresión aritmética, el mayor de ellos es:

a) 25 b) 30 c) 35 d) 40 e) 45

(74) La suma de tres números en progresión aritmética es igual a 15. Sí 1; 4; 19 se suman respectivamente a ellos, sé obtendrá tres números en progresión geométrica. Hallar la razón de la P.G.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

(75) Hallar la razón de una progresión geométrica de "n" términos, tal que la suma de los (n – 1) primeros términos es 396 y la suma de los (n – 1) últimos términos es 1188.

a) 11 b) 9 c) 7 d) 5 e) 3

(76) La suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica es $(b^2+1)(b+1)$, y la razón b ≠ 1. Hallar el 1er término.

a) $\dfrac{b^3-1}{b^4-1}$ b) $\dfrac{b^2-1}{b^3+1}$ c) $\dfrac{b^4-1}{b^5-1}$ d) $\dfrac{b^3+1}{b^5-1}$ e) $\dfrac{b^2-1}{b^4+1}$

(77) La suma delos cuatro términos de una progresión geométrica es 50, y la razón es 4. Si la diferencia de los consecuentes es 2. Hallar la suma de los antecedentes.

a) 40 b) 30 c) 20 d) 10 e) 15

(78) Encontrar una progresión aritmética y una progresión geométrica, si se sabe que los primeros términos son iguales a 2, tienen el mismo tercer término, y el onceavo término de la progresión aritmética es igual al quinto término de la progresión geométrica. Dar la suma de las razones de ambas progresiones.

a) 9 b) 7 c) 5 d) 3 e) 1

(79) Calcular él número de términos de una progresión geométrica de razón 2; siendo 189 la suma de ellos y 12285 la suma de sus cuadrados.

a) 4 b) 6 c) 10 d) 14 e) 18

(80) La suma de los cuatro primeros términos de una progresión geométrica de 7 términos es 200; la suma de los cuatro últimos 5400. La suma de todos los términos es:

a) 4465 b) 5465 c) 6545 d) 5446 e) 6465

(81) La razón de una progresión geométrica es 2, él número de términos es 9, y la suma de ellos 1533. La suma de los extremos es:

a) 571 b) 671 c) 771 d) 871 e) 971

(82) A lo largo de un camino había un número impar de piedras, a 10 metros uno de la otra. Se quiso juntar estas piedras en el lugar donde se encontraba la piedra central. El hombre encargado podía llevar una sola piedra. Empezó por uno de los extremos y las trasladaba sucesivamente. Al recoger todas las piedras el hombre camino 3 km ¿Cuántas piedras había en el camino?

a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

(83) En una progresión geométrica donde el primer término es 3; el último término 46752 y la suma de todos los términos 62335. El valor que se obtiene al sumar el número de términos y la razón es:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

(84) La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 15 y la suma de los cuadrados 45. Hallar la razón de la progresión.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

(85) Un edificio consta de 16 apartamentos, uno de dos habitaciones y otras de 3 habitaciones, la renta mensual de los apartamentos con 3 habitaciones es de S/ 5000 más de los pequeños y producen un total de S/ 105000 por mes. Hallar la renta mensual de los apartamentos más pequeños si el total conseguido de ellos es S/ 125000 por mes.

a) 10500 soles b) 17500 soles c) 13000 soles
d) 16500 soles e) 12500 soles

(86) En una progresión geométrica decreciente, la suma de sus primeros cuatro términos es igual a 45 y la suma de sus cuadrados es igual a 765, el octavo término de esta progresión es:

a) 344 b) 354 c) 364 d) 384 e) 394

(87) En una progresión geométrica decreciente de 6 términos se cumple que la suma de los términos extremos es $\sqrt{1445}$ y el producto de los términos centrales es 289, señale la razón de dicha progresión.

a) $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{\frac{2}{5}}$ b) $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{\frac{1}{5}}$ c) $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{\frac{2}{5}}$

d) $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{\frac{1}{2}}$ e) $(\frac{\sqrt{3}+1}{3})^{\frac{1}{2}}$

(88) El primer término de una progresión creciente, es igual a "x + 6", el tercer término es igual a "x + 10" y la media aritmética de los términos primero y tercero esta con respecto al segundo en la relación $\frac{5}{3}$. El valor del 1er término.

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

(89) La suma de los 4 términos de una progresión geométrica es 160 y la suma de sus inversas es $\frac{10}{27}$. El valor del producto de sus términos es:

a) 286,624 b) 186,624 c) 316,624 d) 215,624 e) 128,764

(90) En un triangulo equilátero de lado "m" se inscribe un circulo, en él círculo un triángulo equilátero y en ese vuelve a inscribir un círculo y así indefinidamente ¿Cuál es la suma de las áreas de los círculos?

a) $\frac{m^2}{3}$ b) $\frac{m^2}{5}$ c) $\frac{m^2}{7}$ d) $\frac{m^2}{9}$ e) $\frac{m^2}{11}$

(91) En un circulo de radio R, se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo; en esto otro un cuadrado, y así sucesivamente (indefinidamente). Se quiere saber él limite de las suma de las áreas de los círculos.

a) $R^2\pi$ b) $2\pi R^2$ c) $4R^2\pi$ d) $\frac{\pi R^2}{2}$ e) $\frac{3\pi R^2}{4}$

(92) Encontrar una progresión geométrica cuyo producto de términos es 65,536 donde uno de los extremos es $\frac{1}{16}$ del otro. Dar la suma de los extremos.

a) 38 b) 48 c) 58 d) 68 e) 78

(93) En una progresión geométrica la suma de sus cuatro términos es 700 y la diferencia entre sus extremos es 280. Hallar la suma de extremos.

a) 406 b) 306 c) 206 d) 186 e) 106

(94) El primer y último término de una progresión geométrica, están en la relación de 5 a 4 y la suma de antecedentes y consecuentes están en la relación de 1 a 2. Calcular la diferencia de los términos extremos. Si la diferencia de los términos medios es 40.

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(95) Se da una progresión geométrica de razón $r \neq 0$ y con el primer término distinto de cero. También se da una progresión aritmética con el primer término igual a cero. Se suman los términos correspondientes de estas dos progresiones, obteniendo una tercera progresión donde los tres primeros términos son 1, 1, 2. Calcular la suma de los 10 primeros términos de esta nueva progresión.

a) 977 b) 978 c) 979 d) 980 e) 981

(96) En una progresión geométrica de 5 términos se tiene que la suma de los 4 primeros es 40 ¿Cuál es él último término si se sabe además que la suma de los últimos términos es 120?.

a) 51 b) 61 c) 71 d) 81 e) 91

97 La suma de cinco números en progresión aritmética es 15, si se les aumenta respectivamente 6, 3, 1, 1 y 5 se forma una progresión geométrica cuya razón se pide determinar.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 7 e) 5

98 En una progresión geométrica el primer término es 7 y él último es 448. Si la suma de todos sus términos es 889. Hallar la razón.

a) 3 b) 3.5 c) 4 d) 2 e) 5

99 Tres números están en progresión geométrica si se resta 3 al tercer término entonces se genera una progresión aritmética, pero si al primer término de la progresión aritmética le sumamos uno, entonces se obtiene otra progresión geométrica. Hallar la suma de dichos tres números.

a) 13 b) 16 c) 19 d) 21 e) 23

100 La suma de los términos que ocupa el lugar impar, en una progresión geométrica de 6 términos es 1365 y la suma de los que ocupa el lugar par 5460. Hallar la suma del primer término y la razón.

a) 6 b) 9 c) 12 d) 15 e) 18

101 El promedio de 5 números es x. Si el promedio de dos de ellos es $\frac{x}{2}$ ¿Cuál es el promedio de los otros tres?

a) $\frac{4x}{3}$ b) $\frac{x}{3}$ c) $\frac{3x}{4}$ d) $\frac{x-3}{4}$ e) $\frac{x-4}{3}$

102 Sí el promedio armónico de: 2n; 4n; 6n es 72. Calcular el valor de "n".

a) 9 b) 18 c) 22 d) 28 e) 34

103 El promedio de dos números es 5. Si se triplica el primer número, y el segundo se le disminuye en 2 unidades, entonces el nuevo promedio es 8. Calcular la diferencia de dichos números.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(104) El mayor promedio de dos números enteros es 40 y el menor promedio es 30. Hallar la diferencia de los números.

a) 20 b) 40 c) 60 d) 80 e) 90

(105) Hallar la media armónica de las inversas de los 30 primeros números naturales.

a) 31 b) $\frac{2}{31}$ c) $\frac{4}{31}$ d) 62 e) 15.5

(106) En una progresión geométrica continua, la suma de los extremos es 34 y la diferencia de los mismo es 16. Hallar la media proporcional o media geométrica.

a) 16 b) 34 c) 15 d) 9 e) 25

(107) El promedio de 32 números pares consecutivos es 79. Hallar el promedio de los 10 mayores.

a) 96 b) 110 c) 111 d) 98 e) 101

(108) En un salón de 60 alumnos del colegio Tahuantinsuyo, el promedio de notas de Historia es 12; Si 20 de ellos tiene un promedio de 18 ¿Cuál es el promedio de notas de los 40 alumnos restantes?

a) 6 b) 9 c) 12 d) 15 e) 18

(109) En una institución de 500 personas cuyo promedio de edades es 23.4, el promedio de edades de hombres es 25 y el de mujeres es 21. Hallar la cantidad de mujeres.

a) 400 b) 300 c) 200 d) 150 e) 100

(110) La media geométrica de dos números positivos es 12 y la media geométrica de otros dos números positivos es 27, hallar la media geométrica de los cuatro números dados.

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30

(111) Los números m, n tiene media geométrica $10\sqrt{6}$ y sus medias armónica y aritmética son números consecutivos, hallar m^2+n^2.

a) 1300 b) 1200 c) 1100 d) 1000 e) 900

112 Si la media aritmética de siete números pares consecutivos es 118. La media geométrica entre el menor y el mayor es:

a) $8\sqrt{117}$ b) $8\sqrt{217}$ c) $2\sqrt{221}$ d) $3\sqrt{321}$ e) $4\sqrt{421}$

113 La media armónica de 3 números es $\frac{24}{5}$. Si uno de las números es 6 y la media geométrica de los otros dos es $2\sqrt{6}$, calcular el mayor de los números.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

114 El promedio aritmético de n números es k. Si a cada uno de los números le agregamos 20 – k ¿Cuál será el nuevo promedio aritmético?

a) 2k – 30 b) 20 – 2k c) 20 – k d) 20 e) 20 + 2k

115 El promedio de 8 números es 6 y el promedio de otros 6 números es 8, entonces el promedio de los 14 números es:

a) 8 b) 6 c) $8\frac{2}{7}$ d) 7 e) $6\frac{6}{7}$

116 La media aritmética de 20 números es 40, cuando se considera un número más, la media aritmética disminuye en una unidad, él número considerado es:

a) 19 b) 21 c) 39 d) 20 e) 18

117 Manuel ha comprado 1500 naranjas: 1000 valen S/ 0.30 la unidad y las restantes valen S/ 0.050 la unidad. Hallar el precio promedio por naranja.

a) S/ 0.40 b) S/ 0.38 c) S/ 0.45 d) S/ 0.36 e) S/ 0.63

118 Si la media aritmética de dos números es a la media armónica de los mismos como 25 a 21. Hallar el menor par de ellos que satisface esta relación indicando su diferencia.

a) 8 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

119 Un contratista paga en promedio S/ 20 diario a cada obrero, luego contrata a 8 ayudantes a S/ 12 diarios de tal manera que el promedio de obreros y ayudantes es de S/ 16 diarios. ¿Cuántos obreros tiene el contratista?

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

(120) Un capitalista compro 50 acciones de una compañía a 60,000 soles y tres meses más tarde compro 25 acciones más a 56.000 soles ¿A qué precio debería comprar 25 acciones adicionales para tener un promedio de 58,000 soles por acción?

a) 46,000 b) 56,000 c) 48,000 d) 58,000 e) 64,000

14.17. RESPUESTAS.-

1	c	2	b	3	a	4	d	5	c	6	b	7	b	8	b
9	e	10	e	11	e	12	b	13	c	14	d	15	b	16	e
17	b	18	a	19	c	20	c	21	a	22	c	23	c	24	a
25	c	26	b	27	d	28	c	29	d	30	b	31	e	32	b
33	c	34	c	35	b	36	d	37	a	38	c	39	b	40	c
41	d	42	a	43	d	44	b	45	a	46	c	47	e	48	b
49	c	50	b	51	c	52	b	53	c	54	a	55	b	56	c
57	b	58	b	59	a	60	c	61	d	62	a	63	c	64	a
65	c	66	b	67	e	68	b	69	c	70	b	71	a	72	c
73	d	74	a	75	e	76	c	77	a	78	c	79	b	80	b
81	c	82	c	83	c	84	a	85	e	86	d	87	a	88	e
89	b	90	d	91	b	92	d	93	a	94	b	95	b	96	d
97	a	98	a	99	d	100	b	101	a	102	c	103	a	104	b
105	b	106	c	107	e	108	b	109	c	110	e	111	a	112	b
113	c	114	d	115	e	116	a	117	d	118	d	119	a	120	b

CAPITULO XV

15. OPERADORES MATEMÁTICOS.-

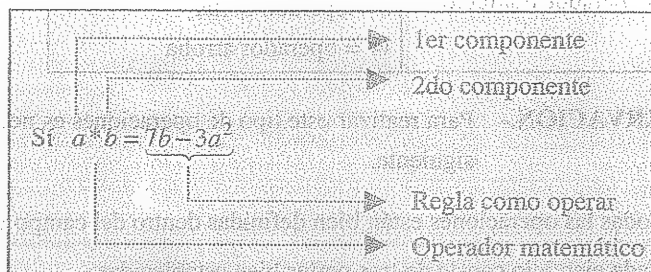
15.1. OPERACIÓN MATEMÁTICA.-

Es un procedimiento que consiste en transformar una o varias cantidades en otra cantidad llamada resultado, donde dicho proceso esta sujeto a cierta regla o ley de formación y convenciones bien definidas.

15.2. OPERADOR MATEMÁTICO.-

Es un símbolo que representa a una determinada operación matemática sujeta a cierta regla o ley de formación que se defina en cada problema.

Ejemplo.-



Ejemplo.- Si $a*b=\sqrt{a^2+b^2}$ el valor de $3*4$ es:

$$3*4=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

15.3. OPERADORES UNIVERSALES.-

Son los símbolos de las operaciones convencionales, tales como:

Operadores Convencionales	Operación	Operadores Convencionales	Operación
+	Adición	| |	Valor absoluto
-	Sustracción	⟦ ⟧	Máximo entero
x	Multiplicación	$\sum$	Sumatoria
÷	División	π	Producto
$\sqrt{\ }$	Radicación	$\int$	integral

Los símbolos que indican son la base principal para crear nuevas operaciones de diferentes reglas o leyes de operar.

15. OPERADORES ARBITRARIO.-

Los operadores arbitrarios es cualquier signo, símbolo o figura, donde se define una operación matemática en base a las operaciones universales, a estos operadores se les llama "operador matemático", las cuales pueden ser:

* = operador asterisco # = operador grilla % = operador porcentaje Δ = operador triangulo	θ = operador tetha ∇ = operador nabla ▱ = operador paralelogramo $ = operado dollar @ = operador arroba	Operadores no convencionales

OBSERVACIÓN.- Para realizar este tipo de operaciones es necesario tener presente lo siguiente.

① Todas las operaciones están bien definidas dentro del campo de existencia.

② Cada ejercicio consta de tres partes bien establecidas.

a) Ley de formación.

b) Datos auxiliares.

c) La incógnita.

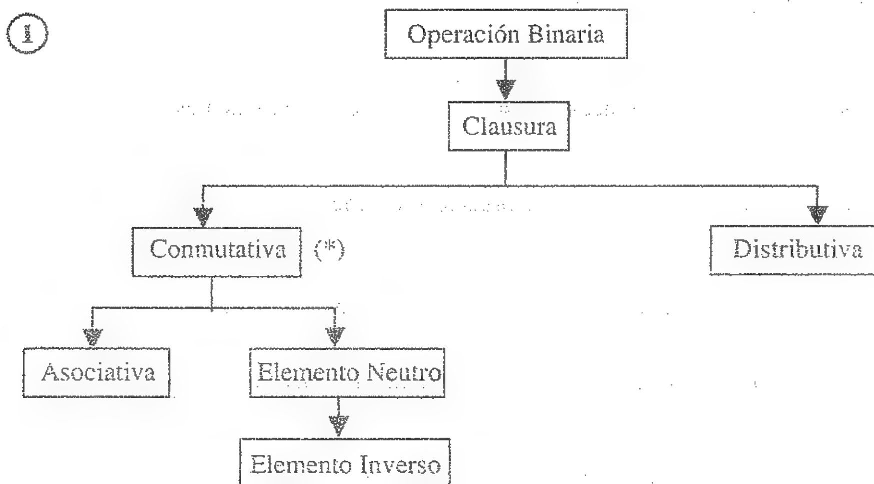
Ejemplo.- Si a,b ∈ N, los cuales están definidas por:

$$a\%b = \underbrace{3a+5b}_{\text{ley de formación}} \Rightarrow \text{calcular } 7\ \%\ 3 \Rightarrow \text{incógnita}$$

15.5. OPERACIÓN BINARIA.-

La operación binaria es la operación matemática que relaciona dos elementos de un conjunto para obtener un nuevo elemento.

La operación binaria será "cerrada", si operamos 2 elementos de un mismo conjunto y el resultado es un elemento del mismo conjunto, en caso contrario se llama "abierta".



2. La ley asociativa depende de la conmutatividad, si no es conmutativa no es asociativa.
3. El elemento neutro es único, es un número, no depende de variables.
4. Si existe elemento neutro, entonces existe elemento inverso.
5. La distributiva compara dos operadores y debe comprobarse por la izquierda y por la derecha.

(*) La operación Binaria no necesariamente debe ser conmutativa.

15.6. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1. En el conjunto de los números reales positivos se define la siguiente operación: $m*n = n^m$. Hallar las raíces de la ecuación: $m*2 = \sqrt{8^{2*m}}$

a) 0 b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) 3 e) $\frac{3}{2}$

Desarrollo

Por dato tenemos: $m*n=n^m$, de donde tenemos:

$m*2=2^m$, $2*m=m^2$, que reemplazamos en la ecuación dada: $m*2=\sqrt{8^{2*m}}$

$2^m=\sqrt{8^{m^2}}=\sqrt{[(2)^3]^{m^2}}=\sqrt{2^{3m^2}}$

como $2^m=\sqrt{2^{3m^2}}$ entonces $2^m=2^{\frac{3m^2}{2}}$, por ley de exponentes.

$m=\frac{3m^2}{2} \Rightarrow 3m^2-2m=0$, factorizando se tiene:

m(3m – 2) = 0 de donde m = 0 ∨ 3m – 2 = 0 obteniéndose m = 0, $m=\frac{2}{3}$, como m es real positivo se considera $m=\frac{2}{3}$ por lo tanto la respuesta es **b**

(2) Si $a*b=a-b$; $m\,\Delta\,n=\frac{m}{n}+1$, calcular el valor de x al resolver: $(5*6)\,\Delta\,x=\frac{5}{6}$

a) -4 b) 6 c) 4 d) 2 e) -6

Desarrollo

5 * 6 = 5 – 6 = -1, por la condición del problema

$(5*6)\Delta x=\frac{5}{6} \Rightarrow -1\Delta x=\frac{5}{6}$

$-\frac{1}{x}+1=\frac{5}{6}$ por la condición del problema

$-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}-1 \Rightarrow -\frac{1}{x}=-\frac{1}{6}$ de donde x = 6

por lo tanto la respuesta es **b**

(3) Si en el conjunto de los números naturales se define el operador $\oplus$ por:

$m \oplus n = \begin{cases} 3m-2n \ , & si \ \ m > n \\ 3n-2m \ , & si \ \ n \geq m \end{cases}$; calcular $k = \dfrac{(5\oplus 2)^2 \oplus (1\oplus 2)}{5}$

a) 71 **b)** 73 **c)** 5 **d)** -71 **e)** -73

Desarrollo

Aplicando la definición del operador $\oplus$

$5 \oplus 2 = 3(5) - 2(2) = 15 - 4 = 11$; $1 \oplus 2 = 3(2) - 2(1) = 6 - 2 = 4$

calculando $k = \dfrac{(5\oplus 2)^2 \oplus (1\oplus 2)}{5} = \dfrac{11^2 \oplus 4}{5} = \dfrac{121\oplus 4}{5} = \dfrac{3(121)-2(4)}{5} = \dfrac{363-8}{5} = \dfrac{355}{5} = 71$

por lo tanto la respuesta es **a**

(4) Sea x un entero: x > -2. Si $\textcircled{x} = x^3+1$ y $\boxed{x} = x^2+3x$, calcular el valor de: a + 5, si $\textcircled{\boxed{a}} = -7$

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 7 **e)** 1

Desarrollo

Aplicando la definición de los operadores $\textcircled{x}$ y $\boxed{x}$ de donde: $\boxed{a} = a^2+3a$

$\textcircled{\boxed{a}} = \textcircled{a^2+3a} = (a^2+3a)^3+1 = -7$, de donde

$(a^2+3a)^3 = -8$ entonces $a^2+3a = -2$

$a^2+3a+2 = 0$, factorizando se tiene:

a 2 → 2a

a 1 → a

3a de donde $(a+2)(a+1) = 0$ entonces

a + 2 = 0 ∨ a + 1 = 0 obteniéndose a = -2 ∨ a = -1

como a > -2 entonces se tiene a = -1

por lo tanto a + 5 = -1 + 5 = 4 la respuesta es **a**

(5) Si $a \otimes b = a^2 - b^2$ y $a \oplus b = \log_2(a-b)$. Hallar $(5 \otimes 3)^{(3a^2 \oplus 2a^2)}$

a) a^{16} b) a^6 c) a^{12} d) a^8 e) a^{10}

Desarrollo

Por definición de los operadores ⊗ y ⊕ se tiene:

$5 \otimes 3 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$3a^2 \oplus 2a^2 = \log_2(3a^2 - 2a^2) = \log_2 a^2$

$(5 \otimes 3)^{(3a^2 \oplus 2a^2)} = 16^{\log_2 a^2} = 2^{4\log_2 a^2} = 2^{\log_2 a^8} = a^8$, por lo tanto la respuesta es **d**

(6) Si definimos el operador: $a * b = \begin{cases} ab + a \ , & si \ a > b \\ ab + b \ , & si \ a \le b \end{cases}$ entonces la suma de las raíces de la ecuación $(4*2)*12 = x^2 - x$.

a) -4 b) 0 c) -1 d) 4 e) 1

Desarrollo

Para calcular 4 * 2 aplicamos la 1ra regla puesto que 4 > 2

4 * 2 = 4(2) + 4 = 8 + 4 = 12

(4 * 2) * 12 = 12 * 12 = 12(12) + 12, puesto que 12 = 12

= 144 + 12 = 156

como $(4*2)*12 = x^2 - x \Rightarrow 156 = x^2 - x$ de donde

$x^2 - x - 156 = 0$, se conoce que $x_1 + x_2 = -(-1) = 1$

por lo tanto la suma de las raíces es 1, la respuesta es **e**

⑦ Se define el operador: $\triangle\!\!\!\!\!\!\;\;a$ $= 5a^{a} - 18$, determine el valor de $\triangle 3 - \triangle(\triangle 2)$

a) 125 b) 105 c) 145 d) 119 e) 115

Desarrollo

Aplicando la definición del operador $\triangle a$ se tiene:

$\triangle 3 = 5(3)^2 - 18 = 135 - 18 = 117$

$\triangle 2 = 5(2)^2 - 18 = 20 - 18 = 2$

$\triangle(\triangle 2) = \triangle 2 = 2$, por lo tanto se tiene:

$\triangle 3 - \triangle(\triangle 2) = 117 - 2 = 115$, la respuesta es **e**

⑧ Definimos los siguientes operadores: $a \otimes b = \begin{cases} a^2\sqrt{b^3} & si \;\; a \neq b \\ 2a + b & si \;\; a = b \end{cases}$; $a \# b = a^2 b^2$ el valor de $N = [\dfrac{(1\otimes 1)\otimes(\sqrt{3}\otimes 1)}{4\otimes 4}]\#4$ es igual a:

a) $\dfrac{9}{16}$ b) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{16}{9}$ d) 16 e) $\dfrac{4}{3}$

Desarrollo

$1 \otimes 1 = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$ puesto que $1 = 1$

$\sqrt{3} \otimes 1 = (\sqrt{3})^2\sqrt{1} = 3$, puesto que $\sqrt{3} \neq 1$

$4 \otimes 4 = 2(4) + 4 = 8 + 4 = 12$, puesto que $4 = 4$

$$N = [\frac{(1\otimes 1)\otimes(\sqrt{3}\otimes 1)}{4\otimes 4}]\#4 = [\frac{3\otimes 3}{12}]\#4 = \frac{2(3)+3}{12}\#4$$

$= \dfrac{9}{12}\#4 = \dfrac{3}{4}\#4 = (\dfrac{3}{4})^2(8)^2 = \dfrac{9}{2}$ puesto que $\dfrac{3}{4} \neq 4$, por lo tanto, la respuesta es **b**

⑨ Si definimos $a \otimes b = b^{a-1}$, calcular $\dfrac{(a+1)\otimes(ab+a)}{(a+1)\otimes(b+1)}$

a) a^b b) a^a c) b^a d) a^{a-1} e) a^{b-1}

Desarrollo

$(a+1)\otimes(ab+a) = (ab+a)^{a+1-1} = (ab+a)^a$

$(a+1)\otimes(b+1) = (b+1)^{a+1-1} = (b+1)^a$

$\dfrac{(a+1)\otimes(ab+a)}{(a+1)\otimes(b+1)} = \dfrac{(ab+a)^a}{(b+1)^a} = [\dfrac{a(b+1)}{b+1}]^a = a^a$, por lo tanto la respuesta es **b**

⑩ Si $m*n = \dfrac{m^2-10}{n^2+1}$, Hallar $(5*2)*(4*1)$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $-\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{14}$ e) $-\frac{1}{7}$

Desarrollo

$5*2 = \dfrac{5^2-10}{2^2+1} = \dfrac{25-10}{4+1} = \dfrac{15}{5} = 3$

$4*1 = \dfrac{4^2-10}{1^2+1} = \dfrac{16-10}{1+1} = \dfrac{6}{2} = 3$

$(5*2)*(4*1) = 3*3 = \dfrac{3^2-10}{3^2+1} = \dfrac{9-10}{9+1} = -\dfrac{1}{10}$, por lo tanto la respuesta es **c**

⑪ Se define el operador * de la siguiente manera $a^x * a = \sqrt{x}$, $x > 0$ según esto, calcular: $\sqrt{2\sqrt{2}} * \sqrt{4\sqrt{4}}$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

Desarrollo

Haciendo las transformaciones correspondientes se tiene:

$$\sqrt{2\sqrt{2}} * \sqrt{4\sqrt{4}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} * \sqrt{2^2.2} = 2^{\frac{3}{4}} * 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{3}{2}}$$

de donde se deduce que $a = 2^{\frac{3}{2}}$, $x = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} * \sqrt{4\sqrt{4}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$, por lo tanto la respuesta es **c**

(12) Las operaciones % y * se define de la siguiente manera: $a\%b = a^{-1} * b$, $x * y = x^{-1}y^{-1}$, Hallar el valor de $4\%\frac{1}{4}$

a) 0 b) 12 c) 16 d) 2 e) 14

Desarrollo

Aplicando la definición de los operadores % y *

$$4\%\frac{1}{4} = 4^{-1} * \frac{1}{4} = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^{-1}(\frac{1}{4})^{-1} = (4)(4) = 16$$

por lo tanto la respuesta es **c**

(13) Si se define $a \Delta b = \frac{a+b}{2}$; $a\#b = \frac{ab}{3}$, $a^n = \underbrace{a\#a\#...\#a}_{n \text{ veces}}$ al calcular $4^2 \Delta 2^3$ se obtiene:

a) $\frac{14}{5}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{29}{3}$ d) $\frac{28}{3}$ e) $\frac{25}{8}$

Desarrollo

$$4^2 = 4\#4 = \frac{16}{3}, \quad 2^3 = 2\#2\#2 = \frac{4}{3}\#2 = \frac{8}{9}$$

$$4^2\Delta 2^3 = \frac{16}{3}\Delta\frac{8}{9} = \frac{\frac{16}{3}+\frac{8}{9}}{2} = \frac{56}{18} = \frac{28}{9}$$, por lo tanto la respuesta es **b**

(14) Las operaciones Δ y * se definen de la siguiente manera $a\Delta b=\frac{a+b}{a-b}$; m * n = 2m + 3n, Hallar (5 Δ 3) * (18 Δ 16)

a) 60 b) 49 c) 36 d) 59 e) 95

Desarrollo

$5\Delta 3=\frac{5+3}{5-3}=\frac{8}{2}=4$; $18\Delta 16=\frac{18+16}{18-16}=\frac{34}{2}=17$

(5 Δ 3) * (18 Δ 16) = 4 * 17 = 2(4) + 3(17) = 8 + 51 = 59

por lo tanto la respuesta es **d**

(15) Sabiendo que: $\bigcirc\!\!\!\!x = x^2-1$, $\bigcirc\!\!\!\!\boxed{x}$ = x (x + 2), calcular $\boxed{3}$ + $\bigcirc\!\!\!\!2$

a) 3 b) 4 c) 7 d) 12 e) 15

Desarrollo

Aplicando la definición del operador se tiene:

$\bigcirc\!\!\!\!\boxed{x} = \boxed{x}^2-1=x(x+2)$, de donde

$\boxed{x}^2=x^2+2x+1=(x+1)^2$ entonces $\boxed{x}=x+1$

$\boxed{3}+\bigcirc\!\!\!\!2 =(3+1)+2^2-1=4+4-1=7$, por lo tanto la respuesta es **c**

(16) Sea la operación #, definida en los reales por: $a\#b=\frac{a+b}{a-b}$ calcular el valor de "x" si x # 2 = 2x # 3

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Aplicando la definición del operado #

x # 2 = 2x # 3 de donde $\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+3}{2x-3}$

$(x + 2)(2x - 3) = (2x + 3)(x - 2)$ efectuando la operación

$2x^2 + x - 6 = 2x^2 - x - 6$ de donde $2x = 0$ entonces $x = 0$

por lo tanto la respuesta es **a**

(17) Se define: $a \theta b = a + b - 4$ hallar $A = (2^{-1}\theta 4)^{-1}\theta(6^{-1}\theta 8)^{-1}$ donde a^{-1} es elemento inverso de "a".

a) $\frac{1}{25}$ b) $-\frac{44}{25}$ c) $\frac{25}{6}$ d) $\frac{28}{13}$ e) $\frac{13}{28}$

Desarrollo

Aplicando la definición del operador θ se tiene:

$$A = (2^{-1}\theta 4)^{-1}\theta(6^{-1}\theta 8)^{-1} = [\frac{1}{2}+4-4]^{-1}\theta[\frac{1}{6}+8-4]^{-1} = 2\theta(\frac{25}{6})^{-1}$$

$$= 2+(\frac{25}{6})^{-1} - 4 = (\frac{25}{6})^{-1} - 2 = \frac{6}{25} - 2 = -\frac{44}{25},$$ Por lo tanto la respuesta es **b**

(18) Hallar el valor de $\boxed{7}$ sí $\boxed{2x-1} = \boxed{2x+1} - x + 1$, además $\boxed{3} = 1$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

Si $x = 2$ se tiene: $\boxed{3} = \boxed{5} - 2 + 1$ de donde $1 = \boxed{5} - 1$ entonces $\boxed{5} = 2$

Si $x = 3$ se tiene: $\boxed{5} = \boxed{7} - 3 + 1$ de donde $2 = \boxed{7} - 2$ por lo tanto $\boxed{7} = 4$

La respuesta es **b**

(19) Con la siguiente relación: Ⓧ $= 2x - 1$; $\boxed{x}$ (en círculo) $= 4x + 7$, calcular $\boxed{3} + \boxed{\boxed{3}}$

a) 14 b) 24 c) 34 d) 44 e) 54

Desarrollo

$\bigcirc\!\!\boxed{x} = 2\boxed{x} - 1 = 4x + 7$ de donde $\boxed{x} = 2x + 4$

$\boxed{3} = 2(3) + 4 = 6 + 4 = 10$ de donde $\boxed{3} = 10$

$\boxed{\boxed{3}} = \boxed{10} = 2(10) + 4 = 20 + 4 = 24$

$\boxed{3} + \boxed{\boxed{3}} = 10 + 24 = 34$ la respuesta es $\boxed{c}$

(20) Si $\triangle B = (B+1)^2$, hallar el valor de x en $\triangle\triangle\triangle x = 100$

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{2}-1$ c) 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}-1$

Desarrollo

$\triangle\triangle\triangle x = 100$ entonces $(\triangle\triangle x + 1)^2 = 100$, de donde

$\triangle\triangle x + 1 = 10$ entonces $\triangle\triangle x = 9 \Rightarrow (\triangle x + 1)^2 = 9$

de donde $\triangle x + 1 = 3$ entonces $\triangle x = 2$ entonces

$(x+1)^2 = 2$ entonces $x + 1 = \sqrt{2}$ de donde $x = \sqrt{2} - 1$

por lo tanto la respuesta es $\boxed{b}$

(21) Se define: $\boxed{x} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \text{ es impar, } x \neq 1 \\ \dfrac{x+2}{x-2} & \text{si } x \text{ es par, } x \neq 2 \end{cases}$ Halar el valor de "a" en: $a = \boxed{\boxed{4}}$

a) 6 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Desarrollo

$\boxed{4} = \dfrac{4+2}{4-2} = \dfrac{6}{2} = 3$ puesto que 4 es par y diferente de 2

$a = \boxed{\boxed{4}} = \boxed{3} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$, puesto que 3 es impar

por lo tanto el valor de a = 2, la respuesta es **d**

(22) Calcular M = 4 # 5 + (-3) # (-6) + 3 # (-1) siendo # la operación definida a continuación.

$a\#b = \frac{a-b}{2}$; sí 0 > a > b; $a\#b = \frac{a+b}{2}$, sí a > b > 0

$a\#b = b^a - a^b$; sí b > a > 0; a # b = ab + a – b; sí a > 0, b < 0

a) -396.2 b) -396 c) 396.5 d) -396.5 e) -397

Desarrollo

$$M = 4\#5 + (-3)\#(-6) + 3\#(-1) = (5^4 - 4^5) + \frac{(-3)-(-6)}{2} + 3(-1) + 3(-1) = -396.5$$

por lo tanto la respuesta es **d**

(23) En R^+ se define la operación a * b = max {a,b}

En R^- se define la operación a ⊕ b = min {a,b}

Si $M = \frac{(\frac{1}{2})*(4) - (-4) \oplus (-3)}{(2)*[(4)*(2)]}$, entonces el valor de M es:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

Desarrollo

$(\frac{1}{2})*(4) = \max\{\frac{1}{2}, 4\} = 4$

$(-4) \oplus (-3) = \min\{-4,-3\} = -4$

$(2) * [(4) * (2)] = (2) * \max\{4,2\} = (2) * (4) = \max\{2,4\} = 4$

ahora reemplazamos en la expresión dada:

$$M = \frac{(\frac{1}{2})*(4)-(-4)\oplus(-3)}{(2)-[(4)*(2)]} = \frac{4-(-4)}{4} = \frac{8}{4} = 2\,,$$ por lo tanto la respuesta es $\boxed{d}$

(24) Si $\boxed{x-2} = x(x-2)$, determine $\boxed{\boxed{x-1}}$

a) $1-x^4$ b) x^4-1 c) x^2-1 d) $1-x^2$ e) x^4+1

Desarrollo

Sea $x-2=y$ de donde $x=y+2$, reemplazando en la ecuación

$\boxed{x-2} = x(x-2)$ entonces $\boxed{y} = (y+2)y = y^2+2y$

como $\boxed{y} = y^2+2y$ entonces $\boxed{x-1} = (x-1)^2+2(x-1) = x^2-2x+1+2x-2 = x^2-1$

$$\boxed{\boxed{x-1}} = \boxed{x^2-1} = (x^2-1)^2+2(x^2-1) = x^4-2x^2+1+2x^2-2 = x^4+1$$

por lo tanto la respuesta es $\boxed{b}$

(25) Si $\boxed{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$, donde x es un entero, x ≠ -2, x ≠ -3, entonces el valor de $\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+...+\boxed{200}$ es:

a) $\frac{199}{201}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1 d) $\frac{200}{201}$ e) $\frac{202}{201}$

Desarrollo

Para x = -1, $\boxed{1} = 1-\frac{1}{2}$

x = 0, $\boxed{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

x = 1, $\boxed{3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$x = 2, \quad \boxed{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

.

.

.

$x = 196, \quad \boxed{198} = \frac{1}{198} - \frac{1}{199}$

$x = 197, \quad \boxed{199} = \frac{1}{199} - \frac{1}{200}$

$x = 198, \quad \boxed{200} = \frac{1}{200} - \frac{1}{201}$ Sumando

$$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + ... + \boxed{199} + \boxed{200} = 1 - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

por lo tanto la respuesta es **d**

(26) Si $a\theta b = \begin{cases} a+3b-1 & si \ \ a > b \\ 3a+b-1 & si \ \ a \leq b \end{cases}$, hallar $(3 \ \theta \ 5) \ \theta \ (8 \ \theta \ 2)$

a) 31 b) 41 c) 51 d) 61 e) 71

Desarrollo

$3 \ \theta \ 5 = 3(3) + 5 - 1 = 13$ puesto que $3 < 5$

$8 \ \theta \ 2 = 8 + 3(2) - 1 = 13$ puesto que $8 > 2$

$(3 \ \theta \ 5) \ \theta \ (8 \ \theta \ 2) = (13) \ \theta \ (13) = 3(13) + 13 - 1 = 51$ puesto que $13 \leq 13$

por lo tanto la respuesta es **c**

(27) Sí $a\Delta b = \frac{a+b}{a-b}$ y $m * n = 2m + 3n$. Hallar $E = (5 \ \Delta \ 3) * (18 \ \Delta 16)$

a) 49 b) 59 c) 63 d) 69 e) 71

Desarrollo

Aplicando los operadores definidos Δ y * se tiene:

$$5\Delta 3=\frac{5+3}{5-3}=\frac{8}{2}=4 \quad ; \quad 18\Delta 16=\frac{18+16}{18-16}=\frac{34}{2}=17$$

$(5 \,\Delta\, 3) * (18 \,\Delta\, 16) = 4 * 17 = 2(4) + 3(17) = 8 + 51 = 59$

por lo tanto la respuesta es **b**

(28) Si $\begin{array}{|cc|}\hline & b \\ a & \\ \hline\end{array}=\frac{a+b}{a-b}$, hallar $E=\dfrac{\begin{array}{|cc|}\hline & 6 \\ 10 & \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|cc|}\hline & 10 \\ 20 & \\ \hline\end{array}}+\begin{array}{|cc|}\hline & 3 \\ 5 & \\ \hline\end{array}$

a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{16}{5}$ c) $\frac{16}{7}$ d) $\frac{7}{16}$ e) $\frac{5}{16}$

Desarrollo

Aplicando la definición del operador cuadrado $\begin{array}{|cc|}\hline & b \\ a & \\ \hline\end{array}=\frac{a+b}{a-b}$

$$\begin{array}{|cc|}\hline & 6 \\ 10 & \\ \hline\end{array}=\frac{10+6}{10-6}=\frac{16}{4}=4 \quad ; \quad \begin{array}{|cc|}\hline & 10 \\ 20 & \\ \hline\end{array}=\frac{20+10}{20-10}=\frac{30}{10}=3 \quad ; \quad \begin{array}{|cc|}\hline & 3 \\ 5 & \\ \hline\end{array}=\frac{5+3}{5-3}=4$$

$E=\dfrac{\begin{array}{|cc|}\hline & 6 \\ 10 & \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|cc|}\hline & 10 \\ 20 & \\ \hline\end{array}}+\begin{array}{|cc|}\hline & 3 \\ 5 & \\ \hline\end{array}=\frac{4}{3}+4=\frac{4+12}{3}=\frac{16}{3}$, por lo tanto la respuesta es **a**

(29) Si $a\Delta b=\frac{a+b}{a-b}$ y $8 \,\Delta\, b=7$, el valor de b es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Desarrollo

Aplicando la definición del operador Δ se tiene:

$8 \triangle b = 7$ entonces $\frac{8+b}{8-b} = 7$ de donde $8 + b = 7(8 - b)$

$8 + b = 56 - 7b$ entonces $8b = 48$ por lo tanto $b = \frac{48}{8} = 6$

Luego la respuesta es **d**

(30) Si $a \Theta b = 3a - 2b$ y $2 \Theta x = 4$, hallar x

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Desarrollo

Aplicando la definición del operador: $a \Theta b = 3a - 2b$ es decir:

$2 \Theta x = 4$ de donde $3(2) - 2(x) = 4$ entonces $6 - 2x = 4$

$2x = 2$ por lo tanto $x = 1$, la respuesta es **e**

(31) Si $\langle 2^x \rangle = x^2$, entonces $\langle 8^m \rangle = 36$, el valor de m es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

Como $\langle 2^x \rangle = x^2$ entonces $\langle 8^m \rangle = \langle 2^{3m} \rangle = (3m)^2 = 36$

De donde $3m = 6$ entonces $m = \frac{6}{3} = 2$, por lo tanto la respuesta es **a**

(32) Si $\boxed{a} = a^2 + 1$ y $x * y = 2x + y - 2$, calcule: $\boxed{2*5}$

a) 26 b) 50 c) 37 d) 82 e) 65

Desarrollo

Aplicando el operador * se tiene: $2 * 5 = 2(2) + 5 - 2 = 9 - 2 = 7$

$\boxed{2*5} = \boxed{7} = 7^2 + 1 = 49 + 1 = 50$, la respuesta es **b**

(33) Si $a^b \square b^a = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, calcular 243 □ 125

a) 6 b) 4 c) 2 d) 8 e) 7

Desarrollo

Sabemos que $243 = 3^5$ y $125 = 5^3$ por lo tanto

243 □ 125 entonces $3^5 \square 5^3 = (5+3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, por lo tanto la respuesta es **c**

(34) Si $x^a \Delta x^{a+1} = \dfrac{a+x}{2}$ el valor de $E = 16 \Delta 32$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Como $16 = 2^4$ y $32 = 2^5 = 2^{4+1}$ entonces se tiene:

$E = 16\Delta 32 = 2^4 \Delta 2^{4+1} = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, por lo tanto la respuesta es **b**

(35) Hallar el valor de $6^\# \Delta (3^\# + 2^\#)$, donde $x^\# = x^2 - x$ y $m \Delta n = 3m - 10n + 20$

a) 30 b) -20 c) -10 d) 20 e) 10

Desarrollo

Aplicando la definición de los operadores # y Δ se tiene:

$6^\# = 6^2 - 6 = 36 - 6 = 30$, $3^\# = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$, $2^\# = 2^2 - 2 = 2$

$6^\# \Delta (3^\# + 2^\#) = 30\Delta(6+2) = 30\Delta 8 = 3(30) - 10(8) + 20 = 90 - 80 + 20 = 30$

por lo tanto la respuesta es **a**

(36) Definimos en R el operador $\oint$ del siguiente modo: $a \oint b = \dfrac{ab}{2}(a - 3b)$. Si $x \oint 2 = 3 \oint (-1)$, x es:

a) -3 b) 1 c) 3 d) 9 e) 18

Desarrollo

$$x\oint 2=\frac{2x}{2}(x-6)\,,\quad 3\oint(-1)=-\frac{3}{2}(3-(-3))=-9$$

como $x\oint 2=\frac{2x}{2}(x-6)=3\oint(-1)=-9$ entonces

$x(x-6)=-9 \;\Rightarrow\; x^2-6x+9=0$ de donde $(x-3)^2=0$

por lo tanto $x-3=0$ de donde $x=3$, la respuesta es **c**

(37) Si definimos el operador * en R de la siguiente forma: a*b = a + b – 3, indique (5*3) * 0

a) 5 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

Desarrollo

Aplicando la definición del operador * se tiene:

(5 * 3) * 0 = [5 + 3 – 3] * 0 = 5 * 0 = 5 + 0 – 3 = 2, por lo tanto la respuesta es **b**

(38) Si $\triangle(x) = 2x-3$, $\boxed{x}=3x-4$, evaluar $\triangle\left(\boxed{2}\right)-\boxed{\triangle(2)}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

$\boxed{2}=3(2)-4=6-4=2$; $\triangle(2)=2(2)-3=4-3=1$

$\triangle\left(\boxed{2}\right)-\boxed{\triangle(2)}=\triangle(2)-\boxed{1}=1-(3-4)=1+1=2$, por lo tanto la respuesta es **a**

(39) Si $a*b=\begin{cases} a^b+b^a \;;\; (a+b) \text{ es par} \\ ab \;;\; (a+b) \text{ es impar}\end{cases}$, calcular (2 * 1) * (1 * 3)

a) 12 b) 24 c) 26 d) 32 e) 19

Desarrollo

2 * 1 = (2)(1) = 2 puesto que 2 + 1 = 3 es impar

$1*3=1^3+3^1=1+3=4$, puesto que $1+3=4$ es par

$(2*1)*(1*3)=2*4=2^4+4^2=16+16=32$ puesto que $2+4=6$ es par

como $(2*1)*(1*3)=32$ la respuesta es **d**

40) Si $\boxed{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}=\begin{cases}a^{2b}-b^{2a} & ; \ a>b\\ a^{2a}-b^{2b} & ; \ a<b\end{cases}$, hallar $\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}-\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}$

a) 8 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 28

Desarrollo

$\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}=2^2-1^2=4-1=3$, puesto que $2>1$

$\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}=1^2-2^4=1-16=-15$ puesto que $1<2$

$\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}-\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}=3-(-15)=18$, la respuesta es **c**

41) Sí: $a*m=\sqrt{m}+a$, el décimo término de la sucesión $1*1, 2*4, 3*9, 4*16, 5*25,\ldots$ es:

a) 20 **b)** 64 **c)** 30 **d)** 48 **e)** 34

Desarrollo

Como $a*m=\sqrt{m}+a$, entonces se tiene:

$1*1=\sqrt{1}+1=2$

$2*4=\sqrt{4}+2=4$

$3*9=\sqrt{9}+3=6$

$4*16=\sqrt{16}+4=8$

$5*25=\sqrt{25}+5=10$

⋮

$10*10^2=\sqrt{10^2}+10=20$, por lo tanto la respuesta es **a**

(42) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, hallar el mayor numero que satisface la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

a) -1 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

Desarrollo

En cada cuadrado aplicamos el operador definido

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = x-6$; $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4x-2$; $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x^2-2$

reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$(x-6)-(4x-2) = \begin{vmatrix} x^2-2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, operando se tiene:

$-3x-4 = x^2-2-0 \Rightarrow x^2+3x+2=0$, factorizando

$(x+2)(x+1)=0$ de donde $x=-2$, $x=-1$, luego el mayor entero es $x=-1$

la respuesta es **a**

(43) En el siguiente conjunto se define las operaciones binarias siguientes:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

⊕	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

Si $x = b * c$, determinar el valor de $(c * x) \oplus (b * a)$

a) No es posible b) d c) a d) b e) c

Desarrollo

Observando la tabla se tiene que $x = b * c = a \Rightarrow x = a$

$$c * x = c * a = c\ ,\quad b * a = b \qquad \ldots (1)$$

como $(c * x) \oplus (b * a)$ ... (2)

al reemplazar (1) en (2) se tiene:

$(c * x) \oplus (b * a) = c \oplus b = c$ es el valor pedido, la respuesta es **e**

(44) Sí

*	4	5	6
4	5	6	4
5	4	5	6
6	6	4	5

Hallar $[(6 * 4) * (5 * 6)] * [(4 * 4) * (6 * 6)]$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Observando la tabla se tiene:

$[(6 * 4) * (5 * 6)] * [(4 * 4) * (6 * 6)]$

$(6 \; * \; 6) \; * \; (5 \; * \; 5) = 5 * 5 = 5$, la respuesta es **c**

NOTA.- Se toma el número de la columna y se opera con otro número de la fila y la respuesta es la intersección.

(45) Consideremos el conjunto $A = \{2,4,6,8\}$

*	2	4	6	8
2	4	6	2	8
4	8	4	6	2
6	2	8	4	6
8	6	2	8	4

Hallar x sí:

$(x * 2) * (6 * 8) = (8 * 2) * (6 * 4)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Observando la tabla se tiene:

(x * 2) * (6 * 8) = (8 * 2) * (6 * 4)

(x * 2) * 6 = 6 * 8

(x * 2) * 6 = 6

ahora observando que (x * 2) que número operado con 6 nos da 6

Observando la tabla se deduce que x * 2 = 4

Nuevamente que número operado con 2 nos da 4 se observa que x = 2

Luego la respuesta es **b**

(46) Se tiene la operación # definida por:

#	3	6	9
3	9	6	3
6	6	3	9
9	3	9	6

Efectuar $E = \dfrac{(3\#6)+(9\#3)}{(9\#6)\#3+(6\#3)}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Observando la tabla: 3 # 6 = 6 ; 9 # 3 = 3

9 # 6 = 9 ; 6 # 3 = 6

(9 # 6) # 3 = 9 # 3 = 3

ahora reemplazamos en la expresión dada

$E = \dfrac{(3\#6)+(9\#3)}{(9\#6)\#3+(6\#3)} = \dfrac{6+3}{3+6} = 1$, la respuesta es **a**

(47) Si definimos las operaciones $ y %

$	2	3	4
1	5	6	7
2	8	9	10
3	11	12	13

%	8	9	10	14
8	21	8	14	26
10	31	17	28	43
11	49	25	36	32

Calcular (3 $ 2) % [8 % (2 $ 4)]

a) 8 b) 16 c) 24 d) 32 e) 40

Desarrollo

Observando las dos tablas se tiene:

3 $ 2 = 11, 8 % (2 $ 4) = 8 % 10 = 14

(3 $ 2) % [8 % (2 $ 4)] = 11 % 14 = 32, por lo tanto la respuesta es **d**

(48) Definimos el operador * en la siguiente tabla:

*	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	5
2	1	2	3	5	0
3	2	3	5	0	1
4	3	5	0	1	2
5	5	0	1	2	3

Hallar "x" en:

[(x * x)] * 1] * (3 * 5) = (1 * 4) * (3 * 2)

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Observando la tabla se tiene:

[(x * x) * 1] * (3 * 5) = (1 * 4) * (3 * 2)

[(x * x) * 1] * 1 = 3 * 3

$\underbrace{[(x*x)*1]}$ * 1 = 5

→ Observando la tabla, él numero 5 operado con 1 nos da 5

Por lo tanto $(x * x) * 1 = 5$

Él número 5 operado con 1 nos da 5

Es decir $x * x = 5$ se observa en la tabla que el 3 operado con 3 nos da 5 es decir $3*3 = 5$

Por lo tanto $x = 3$, la respuesta es **b**

(49) Si # es el operador definido por:

#	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	3	0	2
2	2	0	3	1
3	3	2	1	0

Hallar x si se tiene:
$(3 \# x) \# (2 \# 0) = (3 \# 3) \# 0$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

$(3 \# x) \# (2 \# 0) = (3 \# 3) \# 0$

$(3 \# x) \# \quad 2 \quad = \quad 0 \quad \# 0 = 0$

$(3 \# x) \# 2 = 0$

Él número operado con 2 que dá cero es 1 es decir

$3 \# x = 1$

Él número 3 operado con 2 nos da 1

por lo tanto $x = 2$, la respuesta es **a**

(50) Se define:

*	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Hallar x en: $(3 * 2) * (x * x) = (2 * 4) * [3 * (4 * 3)]$

a) 1 b) 3 c) 2 ó 4 d) 5 e) 6

Desarrollo

Observando detenidamente la tabla se tiene:

(3 * 2) * (x * x) = (2 * 4) * [3 * (4 * 3)]

2 * (x * x) = 3 * [3 * (4)]

2 * (x * x) = 3 * 4

2 * (x * x) = 4

↓ el 2 operando con el 1 nos dá 4

por lo tanto x * x = 1

↓ el número operando consigo mismo

observando la tabla es el 2, o también el 4, por lo tanto x puede ser 2 ó 4

La respuesta es **c**

15.7. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Si $\bigcirc\!\!\!\!x = 2\boxed{2x-1}+5$; $\boxed{x} = \bigcirc\!\!\!\!(x-3) - 4$, el valor de $E = \bigcirc\!\!\!\!4 + \boxed{7}$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

② Si $a\square b = \dfrac{a\Delta a}{a+b} \wedge a \Delta b = a - 2b$, entonces $6\square 2$ es:

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{3}{2}$

③ Si $\bigcirc\!\!\!\!\!\;a^b = a+b+1$, calcule $\bigcirc\!\!\!\!\!\;2^3 + \bigcirc\!\!\!\!\!\;4^5 + \bigcirc\!\!\!\!\!\;1^6$

a) 20 b) 24 c) 21 d) 19 e) 23

(4) Si $\boxed{a} = a+2$ y $\boxed{x}+3 = \triangle\!\!\!\!\!\!\;\;x$ calcule $\triangle\!\!\!\!\!\!\;\;7 + \boxed{2}$

a) 15 b) 16 c) 10 d) 9 e) 13

(5) Se define $\boxed{a} = a^2 - 1$, $a \geq 0$ además $\boxed{\triangle\!\!\!\!\!\!\;\;a} = a(a+2)$. Calcule $\triangle\!\!\!\!\!\!\;\;3 + \triangle\!\!\!\!\!\!\;\;\triangle\!\!\!\!\!\!\;\;3 - \boxed{2}$

a) 16 b) 6 c) 36 d) 9 e) 81

(6) Sabiendo que a * b = 2a, a # b = -b, a % b = b – a, el resultado de (8 * 8) % (3 # -5) es:

a) 8 b) -11 c) 0 d) -8 e) -1

(7) Se define $a^b * a = (a+b)^a$, calcule (1 * 0) * (8 * 3)

a) 34 b) 2 c) 10 d) 47 e) 26

(8) Se define en N, $\boxed{n-5} = n-9$, halle $A = \underbrace{\boxed{\ldots\boxed{\boxed{\boxed{6}+6}+6}+6\ldots}}_{120 \text{ operadores } \square}$

a) 200 b) 246 c) 240 d) 236 e) 248

(9) Si $x \Delta y^x = 2(x^y - y) + x^y$, calcule E = 5 Δ 32

a) 51 b) 61 c) 71 d) 81 e) 91

(10) Se define: $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mn + pq + mq + np$. Si $\begin{vmatrix} y & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$, el valor de $y^2 + 1$ es:

a) 9 b) 3 c) 24 d) 6 e) 10

(11) Si $\Diamond\!\!\!\!\bigcirc\!\!\!\!\!\;x = 9x^2 + 18x + 7$, $\bigcirc\!\!\!\!\!\;x = 3x - 4$, entonces $\Diamond\!\!\!\!\!\;x$ es:

a) $x^2 - 14x + 5$ b) $x^2 - 14x + 35$ c) $x^2 - 9x + 5$

d) $x^2 + 14x + 47$ e) $x^2 - 8x + 47$

(12) Si $a \oplus b = a^2 - b^2$ y $a\theta b = \log_2(a-b)$. Halle $(5 \oplus 3)^{2\sqrt{2}\theta\sqrt{2}}$

a) 2 b) 4 c) a^2 d) b^2 e) 6

(13) Se define ⓧ (x en doble círculo) = 4x – 3; △x (x en doble triángulo) = 4x + 9, el valor de E = △2 (en círculo) + ③ (en triángulo) es:

a) 6 b) 16 c) 26 d) 36 e) 42

(14) Si $a^{a^3} = 3$, $m\Delta n = \frac{1}{4}(mn)^3$, Halle a Δ 2

a) 6 b) 10 c) 14 d) 18 e) 22

(15) Si $\frac{m-1}{2} * \frac{m+1}{2} = \frac{m^2+7}{4}$, halle (3 * 4) + (7 * 8)

a) 52 b) 62 c) 72 d) 82 e) 92

(16) Siendo m y n enteros positivos; además $m^n = n^m$, n < m

$\int_a^b = \log_b$ △a y △x $= \frac{x-2}{2}$, calcular $\int_{m+n}^{m-n}$

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) $\frac{1}{3}$

(17) Si $a*b = 2a + 3b^2$; a□ b = a + b, halle b en (4 * 6)□ (5 * b) = 42

a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 1

(18) Se define: $x* = x^2 - (n+2)x + 6n + 1$, calcular "n" si $(n-2)* = 7$

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

(19) Si $\boxed{x+5} = 3x + 5$, calcular $\boxed{9} + \boxed{12}$

a) 23 b) 33 c) 43 d) 53 e) 63

(20) Si $\textcircled{x} = (x+1)(x-1)$ hallar "m" en $m^2 = \textcircled{m}\,(m-1)+1$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(21) Si $\textcircled{x} = 3x+4$, $\triangle(3x-4) = x^2+1$, calcule $E = \triangle(11) + \triangle(5) + \textcircled{4}$

a) 52 b) 48 c) 42 d) 38 e) 32

(22) Se define la operación (*) por la relación: $a*b = \begin{cases} (a+2b)^{\frac{1}{3}} & \text{, si } a \le b \\ b^a & \text{, si } a > b \end{cases}$, entonces el valor de: $6*[(2*3)+(9*9)]$

a) 13625 b) 15625 c) 14625 d) 15262 e) 15562

(23) Si $\textcircled{a^3-1} = 3a^2+2$, halle $\textcircled{26}$

a) 19 b) 23 c) 27 d) 29 e) 31

(24) Si definimos el operador: $a\Delta b = \begin{cases} ab+a & , si\ a>b \\ ab+b & , si\ a \le b \end{cases}$ entonces la suma de las raíces de la ecuación $(4\Delta 2)\Delta 12 = x^2 - x$

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) 5

(25) Se define: $\textcircled{2x} = \triangle(x) + x - 1$, $\triangle(x-1) = 2\,\textcircled{x+5} - x + 3$, calcule $\textcircled{12}$

a) -1 b) 1 c) 3 d) 5 e) 7

(26) En el conjunto de los números enteros se define la operación "*" del siguiente modo: $*a = \begin{cases} 2a & \text{si } a \text{ es impar} \\ a & \text{si } a \text{ es par} \end{cases}$. El valor de $*(*3) + *[*(*5)+5]$ es:

a) 32 b) 34 c) 36 d) 28 e) 40

(27) Si $\boxed{n+1} = \boxed{n} - \boxed{n-1}$; $\boxed{1} = a$, $\boxed{2} = b$ calcular $\boxed{2002} - \boxed{2003}$

a) a – b b) b – a c) a + b d) a b) b

(28) Se define $\boxed{a}=\dfrac{a^2-16}{a+4}$; $\forall\, a\neq -4$, si $\boxed{\boxed{\boxed{1-3n}}}=-14$. Hallar $\boxed{n+1}$

a) -6 b) -4 c) -2 d) 2 e) 4

(29) Se define: $2a^b * 3b^a=\sqrt{a^2+b^2}$ calcule $E = 162 * 192$

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(30) Si $5^a \# b^3 = a^3-2b$, calcule $E = 125 \# 27$

a) 21 b) 19 c) 17 d) 15 e) 13

(31) Dado: $\boxed{x-6}=\begin{cases} 9-x & \text{si } x \text{ es par} \\ (x-3)^2-4 & \text{si } x \text{ es impar}\end{cases}$, calcular $A=\boxed{\boxed{\boxed{2}}}$

a) -9 b) -7 c) -5 d) -3 e) -1

(32) Dado $\boxed{a*b}=2a-b$, $\triangle\!\left(x\right) = 6x + 7$, Halle N en: $\triangle\!\left(\boxed{N*5}\right)=25$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(33) Si $\triangle\!\left(3x-4\right)=x^2+1$, calcule $\triangle\!\left(11\right)+\triangle\!\left(5\right)$

a) 9 b) 18 c) 27 d) 36 e) 42

(34) Si dos operaciones # y * se definen: a # b = a – b; $a*b=\dfrac{a}{b}+1$, el valor de x en la expresión $(4\#5)*x=\dfrac{5}{6}$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(35) Si $\int_a^b x^{n-1}dx=\dfrac{1}{n}(b^n-a^n)$, hallar m en $\int_1^{10} x^2dx=\int_{\sqrt{10}}^{m} x\,dx$

a) 26 b) 22 c) 18 d) 16 e) 14

(36) Si a θ b = 2a + b, a Δ b = 3a – b, hallar (5 Δ 10) θ (3 Δ 2)

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 17

(37) Se define (x) = 3x – 2, $\boxed{x} = 2x+1$, hallar n: (n + 2) – $\boxed{n + 3}$ = 3 + 1

a) 7 b) 9 c) 11 d) 15 e) 13

(38) Si $(2x) * y = (3x - y)^{y-1}$, hallar 4 * 3

a) 3 b) 6 c) 9 d) 11 e) 13

(39) Sí $a\%b = 3a + 2b^2$, p * q = p – q entonces x % 2 = 17 y x * y = 2. Hallar x + y

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(40) Si $a * b = a^2 - b^2$ y 8 * θ = 39, hallar θ si se sabe que es positivo

a) 5 b) 7 c) 10 d) 13 e) 15

(41) Si $a^2 \oplus b^3 = 2ab - a^2 - b^2$, hallar (16 ⊕ 27) + (9 ⊕ 64)

a) 38 b) 48 c) 42 d) 52 e) 56

(42) Sí $4x \oplus 2y = x^2 - 2x + y$, el valor de E = (8 ⊕ 10) + (12 ⊕ 8)

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

(43) Si $a\#b = b^a . a^b$, hallar $a^4 + b^4$ en $b\#2 = 2^{\sqrt{2}}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(44) Sí $\sqrt{a}\ \Delta\ b^4 = 5a - 3b$, el valor de E = (3 Δ 16) + (6 Δ 81)

a) 110 b) 210 c) 185 d) 164 e) 132

(45) Si $a * b = 2b^3 - 16a$, calcular $E = \sqrt[3]{4 * \sqrt[3]{4 * \sqrt[3]{4 * \ldots}}}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(46) Sí: $\boxed{x-1} = 4x+1$, hallar n en: $\boxed{3n} = \boxed{2n} + 20$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(47) Si a θ b = 5a − 3b, hallar x en x θ 4 = 8

a) 4 b) 6 c) 8 e) 10 e) 12

(48) Si $3a\Delta 2b = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, calcular 48 Δ 18

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

(49) Si $a \int b = \frac{a+3}{2} + \frac{b}{5}$, hallar x + y en $x \int 10 = 6$, $7 \int y = 6$

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(50) Se define: a % b = a + b + ab; $a\Delta b = a^2 + ab - b^2$, hallar x en (x % 4) % (3 Δ 2) = 179

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(51) Sí $\bigcirc\!\!\!\!\!\;x\; = 3x^2 + bx + c$ además $\bigcirc(x-a) = ax^2 - 2a^2x + a^3$. Calcular $E = a^{a+b} + b^{a-b+c}$

a) 9 b) 18 c) 27 d) 36 e) 45

(52) Sí $\triangle(2x-1) = 6x$; $\bigcirc(x+5) = \triangle\triangle(2x)$ calcule $\bigcirc(20)$

a) 318 b) 328 c) 338 d) 288 e) 298

(53) Si $\triangle(x) = ax + b$, además $\triangle\triangle\triangle(x) = 27x + 26$, calcule $\triangle(98)$

a) 290 b) 289 c) 269 d) 249 e) 229

(54) Se define en R: $\triangle(x) = 2x - 5$, calcule $\triangle\triangle\triangle(4)$

a) 0 b) -1 c) -3 d) 1 e) 3

(55) Se define en R, $a*b=\begin{cases} a^2-b\ ;\ a<b \\ a+b\ ;\ si\ a=b \\ b^2-a\ ;\ a>b \end{cases}$, calcule E = (-5 * -3) * 4 + (5 * 7) * (-6)

a) 6 b) -2 c) 2 d) 4 e) 8

(56) Se define en N: $2a^b\Delta 3b^a=\sqrt{a^2+b^2}$, halle el valor de E = (128 Δ 243)(2 Δ 9)

a) 10 b) 7 c) $\sqrt{5}$ d) 5 e) $\sqrt{7}$

(57) Se define en R, $\boxed{m}=m(m+24)$; m > 0 $\boxed{\triangle x}$ = 4x – 40, halle $\boxed{23}$

a) -13 b) 13 c) 26 d) 1 e) 32

(58) Si a * b = (b + a)b halle el valor de m es: (2 * 3) = (3 * 2) + m

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(59) Si se cumple que $m\int n=2m-n$ simplifique $(a\int b)\int(b\int a)$

a) 5a – 4b b) 4b – 5a c) 3b d) 5a + 4b e) a – b

(60) Sí $a*b=\dfrac{ab}{2}$; $x\Delta y=\dfrac{x-y}{2}$ calcule $(4^2\Delta 2^3)*3$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(61) Sí $\boxed{x}$ = 2 △(2x – 1) + 5 ; △(x + 5) = $\boxed{x-2}$ – 4, calcule $\boxed{7}+\boxed{4}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(62) Si △x = $\begin{cases} 2x+3\ ;\ x<-2 \\ x^2-2\ ;\ -2\le x\le 3 \\ 3x-1\ ;\ x>3 \end{cases}$, calcule E = △2 + △-1 + △4 – △-6

a) 7 b) 14 c) 21 d) 28 e) 35

(63) Se define $\boxed{x} = x - 3$, además se cumple que $\boxed{\boxed{\boxed{2a+1}}} = 16$, calcule $\boxed{a^2 - 1}$

a) 120 b) 140 c) 150 d) 160 e) 170

(64) Se define $\langle x+1 \rangle = x^2 - 6x + 9$, halle el valor de z en $\langle\langle\langle 2z+1 \rangle\rangle\rangle = 441$

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

(65) Dados los números reales a y b se define: $a*b = \begin{cases} \sqrt{ab} & si \;\; a \geq 0 \;\wedge\; b \geq 0 \\ \dfrac{a}{b} & si \;\; a < 0 \;\wedge\; b < 0 \end{cases}$, si $0 < x < 1$,

hallar $[(1-x^2)*y^4]*(x-1)$

a) $y(1-x)$ b) $-x^2$ c) $x-1$ d) xy e) $-y^2$

(66) Para cualquier números reales a y b. se define la operación θ de la forma siguiente: $a\theta b = \sqrt{a^2 + b^2}$, con respectos a la ecuación $\sqrt{x-4}\theta\sqrt{20-x} = \sqrt{x+4}\theta(x-6)$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) x = 8 es la única solución real

b) x = -3 es la única solución real

c) {8,3} es el conjunto solución

d) {-8,3} es el conjunto solución

e) x = 3 es la única solución real

(67) Si en los números reales definimos la operación * mediante $a*b = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) $a * (\alpha b) = \alpha(a * b),\ \alpha \geq 0$

b) $|a|*b = (a-b)*\sqrt{2ab}$

c) $a * (b + c) = (a * b) + (b * c)$

d) $(a * b) + (b * c) \geq a * c$

e) $(a - c) * (b - c) = (a * b) - c$

68 Sí: $ab^a * ba^b = \dfrac{a^a + b^b - 1}{b^{(a+b)}}$, el valor de $E = 24 * 18$ es:

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

69 Sí: $\dfrac{1}{b}\boxed{x}\sqrt{a} = a^2 - 2b$, el valor de $2\boxed{x}3$ es:

a) 40 **b)** 60 **c)** 80 **d)** 90 **e)** 100

70 Se define: $a * b = a^b . b^a$, calcular el valor de $x^2 + y^2$ en: $x * y = 5^{\sqrt{5}}$

a) 5 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 20 **e)** 25

71 Sí $a^3 \otimes b^2 = \dfrac{a}{b}$ y $b // a = \dfrac{b^2}{a^3}$, el equivalente de: $(x^6 \otimes y^2)//(y^6 \otimes x^4)$ es:

a) $\dfrac{x^{10}}{y^8}$ **b)** $\dfrac{x^8}{y^6}$ **c)** $\dfrac{x^6}{y^4}$ **d)** $\dfrac{x^4}{y^2}$ **e)** $\dfrac{x^2}{y}$

72 Si $a \otimes b = \dfrac{a-b}{a+b}$ y $x \otimes 5 = \dfrac{1}{2}$, hallar el valor de x:

a) 3 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 15

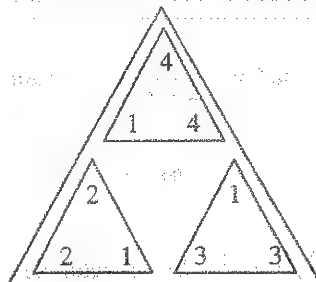
73 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, hallar "x" en: $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & x \end{vmatrix}$

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** 10

74 Sí $a^{\%} = \begin{cases} \dfrac{a+2}{3}, & si\ "a"\ es\ par \\ \dfrac{a+3}{2}, & si\ "a"\ es\ impar \end{cases}$. Hallar el valor de $(3^{\%})^{\%} - \dfrac{3(2^{\%})}{5^{\%}}$

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

(75) Sea [triángulo con a arriba, b y c abajo] $= a^2 - bc$, calcular:



a) 128 b) 100 c) -160 d) 120 e) 160

(76) Dado: $m * n = 2n^2 - 3m$, calcular: $E = \sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \ldots}}}$

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(77) Se define * en el conjunto A = {a,b,c,d,e}, mediante la tabla siguiente:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	d	c	d

Dadas las ecuaciones

x * y = b , y * z = a

x * z = d, halle (x * d)(y * e)(z * c)

a) a b) b c) c d) d e) e

(78) Se define

Δ	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	1	4

Hallar x en (3 Δ 2) Δ (x Δ x) = (2 Δ 4) Δ (4 Δ 3)

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) b y d son correctas

79 Sea la operación * definida en el conjunto A = {a,b,c}, mediante la tabla adjunta.

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Hallar: $E = \frac{(a*b)(c*c)}{(c*a)(a*a)}$

a) 1 b) 2 c) a d) b e) c

80 Sea A = {1,2,3,4} se define una operación #, cuyos valores están dados en la tabla adjunta. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

#	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	1	1
3	3	1	1	4
4	4	2	3	4

1) La ecuación x # 4 = 4 tiene solución única.

2) ∀ x, y ∈ A se cumple x # y = y # x

3) (2 # 3) # (3 # (4 # 1)) = 4

a) VFV **b)** FFV **c)** FVV **d)** VVV **e)** FFF

81 Sí:

#	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	3	0	2
2	2	0	3	1
3	3	2	1	0

El valor de x en:
(3 # x) # (2 # 0) = (3 # 3) # 0 es:

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** 10

(82) Se define la operación Δ de acuerdo a la tabla adjunta.

Δ	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

El valor de $E = a\Delta b^2 \Delta c$, es:

a) e b) d c) c d) b e) a

(83) Sea Δ la operación definida en $A = \{a,b,c\}$ mediante la tabla, hallar el valor de $E = a^2 \ \Delta \ b \ \Delta \ c^3$

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

a) ab b) ac c) bc

d) b e) faltan datos

(84) Dada la tabla:

%	2	3	5	7
2	5	2	3	7
3	7	3	5	2
5	2	5	7	3
7	3	7	2	5

Calcular el valor de $E = \dfrac{(2\%3)\%(5\%7)}{(3\%2)\%(7\%5)}$

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{4}{3}$

(85) La tabla:

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

Corresponde a la ley de formación para a * b

a) a + b + ab b) a + b – ab c) $\frac{a+b}{a-b}$

d) $\frac{2ab}{a+b-1}$ e) a + b + 4

(86) Se define la adición + en el conjunto A = {a,b,c,d,e} mediante la tabla

+	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	d	c	d	e

Hallar 2a + 2b + c + d

a) a + b b) a + c c) a + d d) c e) a

(87) Definimos la operación Δ en el conjunto A = {x,y,z} mediante la tabla.

Δ	x	y	z
x	y	x	z
y	x	y	z
z	z	z	x

Si M = (x Δ y) Δ z y N = x Δ (y Δ z), calcular M Δ N

a) x b) xy c) yz d) y e) z

(88) En el conjunto A = {0,1,2,3} se define las operaciones Δ y θ mediante las tablas adjuntas.

Δ	0	1	2	3
0	2	3	0	1
1	2	3	0	1
2	0	1	1	1
3	3	2	1	0

θ	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	1	2
3	1	1	4	2
4	1	2	2	4

Hallar "x" en: (x Δ 1) θ (3 Δ 1) = (4 θ 3) Δ (4 θ 1)

a) 5 b) 3 c) 1 d) 6 e) 7

(89) Determinar el valor de "x" de la ecuación: [x Δ (a Δ d)] Δ [c Δ (b Δ a)] = (b Δ d) Δ c, donde la operación Δ se define mediante la tabla.

Δ	a	b	c	d
a	d	b	c	a
b	a	c	b	d
c	b	a	d	c
d	c	d	a	b

a) a b) b c) c d) d e) 1

(90) Definimos las operaciones (+) y (⊛) mediante las siguientes tablas.

+	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

⊛	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

Calcular $E = 2a \circledast (b^3 + 2c)$

a) a b) b c) c d) d e) e

15.8. RESPUESTAS.-

1	b	2	a	3	b	4	b	5	b	6	b	7	e	8	c
9	c	10	e	11	d	12	b	13	c	14	a	15	c	16	a
17	d	18	b	19	c	20	d	21	a	22	b	23	d	24	b
25	a	26	c	27	b	28	c	29	b	30	a	31	a	32	b
33	d	34	c	35	a	36	e	37	c	38	c	39	b	40	a
41	b	42	c	43	d	44	b	45	b	46	c	47	a	48	e
49	b	50	a	51	c	52	b	53	a	54	c	55	a	56	b
57	d	58	c	59	a	60	c	61	b	62	c	63	b	64	c
65	e	66	c	67	d	68	a	69	c	70	b	71	a	72	e
73	b	74	b	75	e	76	a	77	d	78	e	79	a	80	b
81	a	82	c	83	d	84	a	85	b	86	c	87	a	88	c
89	d	90	a												

CAPÍTULO XVI

16. MATRICES Y DETERMINANTES.-

16.1. INTRODUCCIÓN.-

En las ramas de la ciencia y la ingeniería se da una gran utilidad a las matrices y determinantes, debido a que nos facilita enormemente la solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Las matrices aparecieron en las matemáticas un siglo después de los determinantes, el nombre de matriz fue dado por JAMES JOSEPH y en 1858 por CAYLEY.

La teoría de los determinantes tiene su origen con el matemático Alemán GOLTFRIED W. LEIBNIZ (1646 – 1716), en 1693 LEIBNIZ hace uso de las determinantes en la solución de sistemas lineales, sin embargo algunos historiadores creen que el matemático JAPONES SEKIKAWA trabajó en los mismos hace 10 años.

El aporte más importante a la teoría de los determinantes fue del matemático Francés AGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 – 1857), donde por primera vez demostró el teorema $|AB| = |A||B|$, en el año 1812, el matemático Francés PIERRE DE LAPLACE (1749 – 1827) realizó el desarrollo de un determinante por adjuntos, pero el matemático Alemán CARL GUTAVI JACOBI (1804 – 1851) logró que los determinantes tuviera una aceptación definitiva en la teoría de las funciones de Varias Variables y que más adelante JOSEPH SYLVESTER dio el nombre de JACOBIANO a este determinante.

16.2. DEFINICIÓN DE UNA MATRIZ.-

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas y encerrados entre corchetes o paréntesis, es decir de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde los diversos números distribuidos en filas y columnas se denominan elementos o componentes de la matriz.

Ejemplo.- En la matriz siguiente: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ sus elementos son: 1,2,3,4,5,6.

16.3. ORDEN DE UNA MATRIZ.-

El orden de una matriz es el producto indicado del número de filas por él número de columnas de la matriz.

Ejemplo.- En la matriz dada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Filas (i)

Columnas (j)

mxn ← orden de la matriz

La matriz tiene m filas y n columnas, por lo tanto la matriz es de orden mxn (m por n).

Ejemplo.- En la matriz dada: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ se tiene dos filas y tres columnas entonces la matriz es de orden 2x3

NOTACIÓN.- A las matrices usualmente se denota por letras mayúsculas A,B,C, etc. y a sus elementos con letras minúsculas a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, etc.

Ejemplo.- Las siguientes matrices se escriben así.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \; ; \; B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \; ; \; C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

Frecuentemente también a una matriz se denota por: $A=[a_{ij}]_{mxn}$, donde a_{ij} son sus elementos.

Ejemplo.- Escribir la matriz $A=[a_{ij}]_{3x2}$.

En efecto: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\,x\,2}$ → # columnas; → # filas

En la notación $A=[a_{ij}]_{mxn}$, el orden de la matriz A es mxn (m por n) y a_{ij} son sus elementos donde i representa a las filas y j representa a las columnas.

Luego como a_{ij} son los elementos de la matriz, quiere decir que se refiere al elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Ejemplo.- El elemento a_{35} de la matriz A, corresponde a la tercera fila y la quinta columna.

Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, es una matriz 3x4.

El elemento a_{32} es 0

a_{21} es 6

a_{23} es 4 y así sucesivamente.

OBSERVACIÓN.- Una matriz no tiene valor numérico, es simplemente una manera conveniente de representar arreglos de números.

16.4. MATRIZ FILA.-

A la matriz de orden 1xn se denomina matriz fila, es decir en la forma siguiente: $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$, también se le conoce con el nombre de vector fila.

16.5. MATRIZ COLUMNA.-

A la matriz de orden nx1 se denomina matriz columna; es decir de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$, también se le conoce con el nombre de vector columna.

16.6. IGUALDAD DE MATRICES.-

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.

Esto es: $\boxed{A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \ \forall \ i,j}$

Ejemplos.-

① Sí $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, entonces

$$A = B \iff \boxed{a_{11} = b_{11} \ \wedge \ a_{12} = b_{12} \ \wedge \ a_{21} = b_{21} \ \wedge \ a_{22} = b_{22}}$$

② Sí $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, entonces

$$A = B \iff \begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ a_{21} = b_{21} \\ a_{31} = b_{31} \end{cases} \wedge \begin{cases} a_{12} = b_{12} \\ a_{22} = b_{22} \\ a_{32} = b_{32} \end{cases} \wedge \begin{cases} a_{13} = b_{13} \\ a_{23} = b_{23} \\ a_{33} = b_{33} \end{cases}$$

Si A y B no son iguales escribiremos así:

$$\boxed{A \neq B \iff a_{ij} \neq b_{ij}, \text{ para algún i,j}}$$

16.7. MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ.-

Dada una matriz A de orden mxn y un escalar λ, al producto λA se define por:

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

como cada elemento de la matriz A es multiplicada por λ, el producto λA es por consiguiente otra matriz de orden mxn.

Ejemplo.- Sí $\lambda = 2$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Hallar λA

<u>Desarrollo</u>

$$\lambda A = 2\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \text{ entonces } \lambda A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

16.8. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ.-

Sean α y β dos escalares y A,B dos matrices del mismo orden, entonces:

① $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

② $\alpha.(A + B) = \alpha A + \alpha B$

③ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

④ $1.A = A$

⑤ $0.A = 0$

16.9. SUMA DE MATRICES.-

a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos dos matrices de orden mxn, $A=[a_{ij}]_{mxn}$ y $B=[b_{ij}]_{mxn}$, la suma de las matrices A y B es otra matriz $C=[c_{ij}]_{mxn}$ de orden mxn, en donde cada elemento de la matriz C es la suma de los elementos correspondientes de A y B, es decir:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall\ i,j.$$

Por lo tanto: $A+B=[a_{ij}]_{mxn}+[b_{ij}]_{mxn}=[a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}=[c_{ij}]_{mxn}=C$

$$\therefore\ A+B=[c_{ij}]_{mxn}=C$$

Ejemplo.- Calcular A + B si:

① $A=\begin{bmatrix}4&5&3\\2&1&0\\3&-1&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&6&1\\4&0&7\\5&3&8\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$A+B=\begin{bmatrix}4&5&3\\2&1&0\\3&-1&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&6&1\\4&0&7\\5&3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2&5+6&3+1\\2+4&1+0&0+7\\3+5&-1+3&6+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&11&4\\6&1&7\\8&2&14\end{bmatrix}$$

② $A=\begin{bmatrix}2&4&7\\3&6&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&4&9\\2&5&8\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$A+B=\begin{bmatrix}2&4&7\\3&6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&4&9\\2&5&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1&4+4&7+9\\3+2&6+5&1+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8&16\\5&11&9\end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN.- La suma de matrices se define solamente cuando las matrices tienen el mismo número de filas y columnas. Si dos matrices se pueden sumar se llaman conformables respecto a dicha operación.

b) PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES.-

Consideremos las matrices A,B y C del mismo orden y λ un escalar, entonces:

① A + B = B + A, conmutativa.

② A + (B + C) = (A + B) + C, asociativa.

③ λ(A + B) = λA + λB

④ Existe una matriz θ tal que ∀A, A + θ = A / θ = matriz nula

16.10. RESTA DE MATRICES.-

Consideremos dos matrices A y B del mismo orden, entonces la diferencia de las matrices A y B definiremos por:

$$\boxed{A - B = A + (-1)B}$$

Ejemplo.- Calcular A – B sí: $A=\begin{bmatrix}1&3&7\\2&4&5\\4&6&8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7&5&-1\\4&-6&9\\2&3&8\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$A-B=A+(-1)B=\begin{bmatrix}1&3&7\\2&4&5\\4&6&8\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}7&5&-1\\4&-6&9\\2&3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&7\\2&4&5\\4&6&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7&-5&1\\-4&6&-9\\-2&-3&-8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-7&3-5&7+1\\2-4&4+6&5-9\\4-2&6-3&8-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-2&8\\-2&10&-4\\2&3&0\end{bmatrix}$$

16.11. PRODUCTO DE MATRICES.-

Consideremos la matriz $A=[a_{ij}]_{mxn}$ de orden mxn y la matriz $B=[b_{ij}]_{nxr}$ de orden nxr, el producto de la matriz A por la matriz B es otra matriz $C=[c_{ij}]_{mxr}$ de orden mxr, donde c_{ij} es el producto escalar de la i-ésima fila por la j-ésima columna, es decir:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad , \quad \begin{matrix} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,r \end{matrix}$$

Esto es sí:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}_{n \times r}$$

i – ésima fila j – ésima columna

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}_{nxr}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2r} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ir} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}_{nxr} = C \quad \text{donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \; , \begin{matrix} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,r \end{matrix}$$

así tenemos: $$c_{11}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+...+a_{1n}b_{n1}$$

$$=[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}]\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

$$c_{22}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+...+a_{2n}b_{n2}$$

$$=[a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad \dots \quad a_{2n}]\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n2} \end{bmatrix}$$

y así obtenemos:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{in}b_{nj}$$

$$=[a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \dots \quad a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN.- El producto de dos matrices AB está definido solo cuando el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B.

Ejemplo.- Calcular AB sí: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} & [1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\\ [4\ \ 5\ \ 6]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} & [4\ \ 5\ \ 6]\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\\ [0\ \ 1\ \ 0]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} & [0\ \ 1\ \ 0]\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+2+0 & 0+4+3\\ 8+5+0 & 0+10+6\\ 0+1+0 & 0+2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 13 & 16\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN.- BA no está definido de acuerdo a la observación.

16.12. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES.-

① $AB \neq BA$

② $(AB)C = A(BC)$

③ $A.(B + C) = A.B + A.C$

④ $(B + C)A = B.A + C.A$

⑤ $k(AB) = A(kB)$, k es un escalar.

Suponiendo que las operaciones indicadas están definidas.

16.13. TIPOS ESPECIALES DE MATRICES.-

① **MATRIZ CUADRADA.-** Se dice que una matriz A es cuadrada cuando él número de filas es igual al número de columnas.

En una matriz cuadrada de orden nxn, la diagonal principal es la línea formada por los elementos $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ y a la suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada se llama traza de la matriz.

Ejemplo.-

i) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada, a su traza denotaremos por T(A) de donde $T(A) = a_{11} + a_{22}$

ii) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada su traza es: $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

iii) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada su traza es:

$$T(A) = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

OBSERVACIÓN.- A las matrices cuadradas denotaremos de la siguiente manera:

Al conjunto de matrices de orden 2x2 representaremos por M_2.

Al conjunto de matrices de orden 3x3 representaremos por M_3.

Al conjunto de matrices de orden nxn representaremos por M_n.

Ejemplo.-

i) Sí $A \in M_2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

ii) Sí $A \in M_3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

iii) Sí $A \in M_n \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

(2) **MATRIZ NULA.-** Una matriz que tenga todos sus elementos ceros se llama matriz nula y denotaremos por:

$$\theta_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Ejemplo.-

i) Sí $A \in M_2 \Rightarrow$ A es una matriz nula sí $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ii) Sí $A \in M_3 \Rightarrow$ A es una matriz nula sí: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR.-** Una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$ se llama matriz triangular superior.

Es decir: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior

4) **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR.-** Una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ se llama matriz triangular inferior. es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$ es una matriz triangular inferior

5) **MATRIZ DIAGONAL.-** Una matriz cuadrada cuyos elementos son $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ se llama matriz diagonal, es decir que se expresa en la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & . & . & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$$

6) **MATRIZ ESCALAR.-** Es una matriz diagonal en la que se verifica $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = k$ o sea que es una matriz de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & k \end{bmatrix}$$

⑦ **MATRIZ UNITARIA.-** Es una matriz diagonal en la que se verifica $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 1$, lo cual denotaremos como:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Ejemplo.-

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior.

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular inferior.

iii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal.

iv) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz escalar.

v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz unitaria.

16.14. MATRIZ TRANSPUESTA.-

La transpuesta de una matriz A, es una matriz que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de la matriz A, de tal manera que la fila i de la matriz se convierte en la columna i de la matriz transpuesta.

A la transpuesta de la matriz A denotaremos por A^t, es decir:

$$\text{Sí } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.-

i) Sí $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ii) Sí $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ entonces $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

16.15. PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA.-

① $I^t = I$

② $(A^t)^t = A$

③ $(kA)^t = kA^t$, k es un escalar.

④ $(A+B)^t = A^t + B^t$

⑤ $(AB)^t = B^t A^t$

16.16. MATRIZ SIMÉTRICA.-

Una matriz cuadrada A, se dice que es una matriz simétrica sí $A = A'$.

Ejemplo.-

i) Sí $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A$

Como $A' = A$ entonces la matriz A es simétrica.

ii) Sí $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq A$

Como $A' \neq A$, entonces la matriz A no es simétrica.

OBSERVACIÓN.- Para que una matriz A sea simétrica debe cumplir $a_{ij} = a_{ji}$ para $i \neq j$

Ejemplo.- Las matrices siguientes son simétricas

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$ iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 7 & 2 & 11 \\ 9 & 11 & 3 \end{bmatrix}$

16.17. MATRIZ ANTISIMÉTRICA.-

Una matriz cuadrada A se dice que es una matriz antisimétrica sí $A = -A'$.

Ejemplo.-

i) Sí $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A$

Como $A = -A'$, entonces A es una matriz antisimétrica.

ii) Sí $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}=-A$

Como $A=-A^t$ entonces A es una matriz antisimétrica.

OBSERVACIÓN.- Para que una matriz A sea antisimétrica debe cumplirse que $a_{ij}=-a_{ji}$ para $i \neq j$ y los elementos de la diagonal principal deben ser ceros, es decir $a_{ij}=0$ para i = j.

Ejemplo.- Las siguientes matrices son antisimétrica.

i) $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ -4 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$ ii) $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 7\\ -3 & 0 & -6\\ -7 & 6 & 0\end{bmatrix}$ iii) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

16.18. MATRICES IDEMPOTENTES E INVOLUTIVAS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Una matriz cuadrada A es idempotente sí y sólo sí es igual a su cuadrado o sea:

A es idempotente $\Leftrightarrow A^2=A$.

Ejemplo.- La matriz $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ es idempotente.

En efecto: $A^2=A.A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=A$

Como $A^2=A \Rightarrow$ A es una matriz idempotente.

b) **DEFINICIÓN.-** Una matriz cuadrada A es involutiva sí y sólo sí su cuadrado es la identidad es decir:

A es involutiva $\Leftrightarrow A^2=I$

Ejemplo.- La matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ es involutiva.

En efecto: $A^2 = A.A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+0 & 0+0\\ 0+0 & 0+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$

Como $A^2 = I$ entonces A es una matriz involutiva.

16.19. POTENCIA DE UNA MATRIZ.-

Sea A una matriz cuadrada de orden nxn, a la potencia de la matriz definiremos como:

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A.A$$

$$A^3 = A.A.A$$

$$\vdots$$

$$A^n = A.A.A.....A$$

además $A^p.A^q = A^{p+q}$ y $(A^p)^q = A^{pq}$

Las matrices A y B se llaman conmutables sí y sólo sí AB = BA.

AFIRMACION.- Si las matrices A y B son conmutables. Entonces cualquier potencia natural de los mismos también son conmutables y $(AB)^p = A^p B^p$, $p \in N$ arbitrarios, además también se tiene:

① $(A+\lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}(\lambda I)^k$ ② $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$

16.20. MATRIZ ORTOGONAL.-

Una matriz cuadrada A se llama ortogonal, si se verifica:

$$A.A^t = A^t.A = I$$

Ejemplo.- Comprobar que la matriz dada es ortogonal.

$$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

En efecto:

$$A.A^t=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0\\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha & \text{sen}\,\alpha\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha\cos\alpha & 0+0\\ \text{sen}\,\alpha\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha\cos\alpha & \text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha & 0+0\\ 0+0 & 0+0 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

Como $A.A^t=I$ entonces A es ortogonal.

OBSERVACIÓN.-

(1) En particular toda matriz ortogonal es invertible.

(2) Puesto que $(A^t)^t=A$ de (1) se deduce que la inversa de una matriz ortogonal es también una matriz ortogonal.

a) **TEOREMA.-** El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

Demostración

Sean A y B dos matrices ortogonales entonces

$A^t=A^{-1}$, $B^t=B^{-1}$ de donde $(AB)^t=B^tA^t$

Luego $(AB)^t=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$ por lo tanto AB es una matriz ortogonal.

16.21. MATRIZ INVERSA.-

Una matriz cuadrada A, se llama invertible, si existe una matriz cuadrada B tal que AB = BA = I, entonces a la matriz B se llama inversa de A y se denota por $B=A^{-1}$.

Ejemplo.- Hallar la matriz inversa de: $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{bmatrix}$

Desarrollo

Sea $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ la matriz inversa por calcular.

Entonces se tiene $A.A^{-1}=I$, de donde

$A.A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, efectuando operaciones

$\begin{bmatrix}2a-3c & 2b-3d\\ 5a-4c & 5b-4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ por igualdad se tiene:

$\begin{cases}2a-3c=1\\ 2b-3d=0\\ 5a-4c=0\\ 5b-4d=1\end{cases}$ al resolver el sistema se tiene: $a=-\frac{4}{7}$, $b=\frac{3}{7}$, $c=-\frac{5}{7}$, $d=\frac{2}{7}$

por lo tanto $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}$

OBSERVACIÓN.- Una matriz cuadrada A se llama inversible o regular o no singular si $|A|\neq 0$ en caso contrario la matriz A recibe el nombre de singular.

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA.-

① $I^{-1}=I$

② $(A^{-1})^{-1}=A$

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

④ $(A^{t})^{-1}=(A^{-1})^{t}$

16.22. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE SEGUNDO ORDEN.-

El determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ es el número real denotado por det (A) o $|A|$ y es definido del modo siguiente:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo.- Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$

TEOREMA.- La matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tienen inversa A^{-1} si y sólo si $|A| \neq 0$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Demostración

Sea $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ la inversa de la matriz A como A^{-1} es la inversa de la matriz A $\Rightarrow A.A^{-1} = I$, de donde $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ operando se tiene:

$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}w \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ahora por la igualdad de matrices

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \\ a_{11}y + a_{12}w = 0 \\ a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene:

$x = \frac{a_{22}}{|A|}$, $y = -\frac{a_{12}}{|A|}$, $z = -\frac{a_{21}}{|A|}$, $w = \frac{a_{11}}{|A|}$.

Luego $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{12}}{|A|} \\ -\frac{a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}$

Por lo tanto: $\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Ejemplo.- Hallar A^{-1} si existen de las siguientes matrices.

① Sí $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$

Como $|A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$

$$\therefore \; A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

② Sí $A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=32-35=-3$

Como $|A| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$

$$\therefore \; A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8 & -5\\ -7 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{3} & \frac{5}{3}\\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

16.23. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE TERCER ORDEN.-

a) **MENOR COMPLEMENTARIO.-** El menor complementario de un elemento de una matriz A de tercer orden, es él determinante de una matriz cuadrada de segundo orden, que se obtiene después de borrar la fila i y la columna j.

Al menor complementario de a_{ij} denotaremos por M_{ij}.

Ejemplo.- Sea $A=[a_{ij}]_{3x3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

Al menor complementario de a_{11} es $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

El menor complementario de a_{12} es $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

El número complementario de a_{13} es $M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

b) COFACTOR DE UN ELEMENTO DE UNA MATRIZ.-

Al cofactor del elemento a_{ij} de una matriz A es denotado por A_{ij} y está definida por:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

Ejemplo.- Consideremos la matriz A de tercer orden. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

El cofactor de a_{11} es $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$

El cofactor de a_{12} es $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}$

El cofactor de a_{13} es $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}$

c) DEFINICIÓN.- Sea la matriz A de tercer orden: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

El determinante de la matriz A es un número real denotado por det(A) o |A| y es igual a la suma algebraica de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores, es decir:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{13})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

Ejemplo.- Calcular el determinante de la matriz. $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2(5)-4(-5)+5(-5)=10+20-25=5 \qquad \therefore\ |A|=5$$

También el determinante de tercer orden se desarrolla de la siguiente manera:

$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$, su determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Ejemplo.- Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5 & 2 & 4\\ -3 & 2 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(8-4-15)-(10-2-24)=-11+16=5$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$\therefore\ |A|=5$$

d) PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.-

① Si se intercambian las filas por las columnas en un determinante su valor no se altera.

Es decir: $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

(2) Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, el determinante vale cero.

Es decir: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) Si se intercambian dos filas o dos columnas continuas en un determinante, el valor de éste cambia de signo.

Es decir: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales, su valor es cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & a_3 \\ b_1 & kb_1 & b_3 \\ c_1 & kc_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(5) Si todos los elementos de una fila o una columna de un determinante se multiplica por un mismo número k, el valor del determinante queda multiplicado por k.

Es decir: $$\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & b_2 & b_3 \\ kc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6) Si todos los elementos de una fila o una columna son expresados como la suma de dos o más números, el determinante puede expresarse como la suma de dos o más determinantes, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 \\ b_1+y & b_2 & b_3 \\ c_1+z & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 \\ y & b_2 & b_3 \\ z & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(7) Si a cada uno de los elementos de una fila o columna se le multiplica por "m" éste resultado se le suma a otra fila o columna, el valor del determinante no se altera.

Es decir: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ma_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + mb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + mc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Esta propiedad sirve para reducir el orden de un determinante y poder hallar su valor.

16.24. MATRIZ DE COFACTORES.-

Consideremos la matriz. $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Si a cada elemento de la matriz A sustituimos por sus respectivos cofactores, obtenemos una matriz que se denomina matriz de cofactores y denotaremos por:

$$CA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

16.25. MATRIZ ADJUNTA.-

Llamaremos matriz adjunta a la transpuesta de la matriz de cofactores, es decir:

Si $CA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ es la matriz de cofactores entonces la matriz adjunta de A es expresado por:

$$\text{Matriz adjunta de A} = \text{adj(A)} = (CA)^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

16.26. MATRIZ INVERSA.-

Consideremos una matriz cuadrada A, si |A| ≠ 0, entonces a la inversa de la matriz A definiremos de la siguiente manera:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{|A|}(CA)^t$$

Ejemplo.- Obtener la matriz inversa de A sí existe, donde $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$

Desarrollo

Calculando el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{vmatrix}=1(15-1)-3(9-5)+5(3-25)=-108$$

como $|A|=-108\neq 0$ entonces $\exists\ A^{-1}$.

Calculando la matriz de cofactores

$$CA=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11} & -M_{12} & M_{13}\\ -M_{2} & M_{22} & -M_{23}\\ M_{31} & -M_{32} & M_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -4 & -22\\ -4 & -22 & 14\\ -22 & 14 & -4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{|A|}(CA)^t=\frac{1}{-108}\begin{bmatrix}14 & -4 & -22\\ -4 & -22 & 14\\ -22 & 14 & -4\end{bmatrix}=-\frac{1}{108}\begin{bmatrix}14 & -4 & -22\\ -4 & -22 & 14\\ -22 & 14 & -4\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{54} & \frac{1}{27} & \frac{11}{54}\\ \frac{1}{27} & \frac{11}{54} & -\frac{7}{54}\\ \frac{11}{54} & -\frac{7}{54} & \frac{1}{27}\end{bmatrix}$$

16.27. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN n.-

Consideremos la matriz cuadrada de orden nxn.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se llama determinante de la matriz A al número real denotado por det(A) o |A| y definido por:

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

Siendo j fijo en $1 \le j \le n$, donde el elemento a_{ij} pertenece a la i-ésima fila y a la j-ésima columna y M_{ij} es el menor complementario del elemento a_{ij}.

Veremos para el caso de una matriz de tercer orden.

Si $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ entonces su determinante es: $|A|=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$

desarrollando por la primera columna se fija j = 1.

$$|A|=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

16.28. METODO DEL PIBOTE.-

El método del pibote sirve para calcular el determinante de una matriz de orden superior al tercero. El método consiste en obtener otro determinante a partir de |A| aplicando repetidas veces la propiedad (7) de los determinantes, que goce de la propiedad de que todos los elementos de alguna fila o columna son ceros excepto uno, es decir:

$$|A| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor complementario de a_{ij} y al elemento a_{ij} se le llama elemento pibote.

Ejemplo.- Calcular el determinante de la matriz. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Desarrollo

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & -9 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 3 \\ -15 & 4 & -15 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 1 \begin{vmatrix} -9 & -9 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \\ -15 & -15 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -9 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \\ 0 & -15 & -2 \end{vmatrix}$$

$\uparrow$ $c_1 - 4c_2$ $\quad$ $\uparrow$ $c_3 - 3c_2$ $\quad$ $\uparrow$ $c_4 - 2c_2$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$ $c_1 - c_2$

$$= -(-1)^{1+2}(-9) \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -9(12 - 0) = -108 \qquad \therefore \; |A| = -108$$

Ejemplo.- Calcular la determinante de la matriz. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Desarrollo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_1 - 3f_2} \\ \\ \xrightarrow{f_2 - f_1} \\ \xrightarrow{f_4 - f_2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}(1) \begin{vmatrix} -8 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1 + f_3} = -\begin{vmatrix} -10 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{3+3}(2) \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2(-20-4) = 48$$

16.29. RANGO DE UNA MATRIZ.-

El rango de una matriz A de orden nxn, es el orden de la submatriz cuadrada más grande contenida en A, cuyo determinante es no nulo y que denotaremos por r(A) = rango de A.

OBSERVACIÓN.-

① De la definición del rango de una matriz A, se observa que si el rango de A es k, entones $k \le \min\{m,n\}$ donde A es la matriz de orden mxn.

② Para calcular el rango de una matriz A, es suficiente que entre todas sus submatrices cuadradas más grande, encontremos una que tenga su determinante no nulo, y si esto no ocurre continuamos con las sub matrices cuadradas de orden inferior.

Ejemplo.- Calcular el rango de la matriz. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Desarrollo

Como la matriz A es de orden 4x3, entonces por definición se tiene que $r(A) \le \min\{3,4\}$ es decir $r(A) \le 3$, ahora formamos las submatrices cuadradas más grande de A, las cuales son de orden 3x3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Como no existen mas submatrices cuadradas de orden 3x3 y al tomar el determinante de cada uno de ellas su valor es cero, entonces: $r(A) \neq 3$ y como $r(A) \leq 3 \Rightarrow r(A) < 3$.

Ahora formamos la submatrices de orden 2x2 y es suficiente que alguna de estas submatrices su determinante sea no nulo, como por ejemplo el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ es –2 por lo tanto $r(A) = 2$.

Ejemplo.- Calcular el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Desarrollo

Como la matriz A es de orden 4x3, entonces por definición $r(A) \leq \min\{3,4\}$ de donde $r(A) \leq 3$. Ahora formamos las submatrices cuadradas más grande de A, las cuales son de orden 3x3.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y como el determinante de $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ es $-4 \neq 0$. Luego $r(A) = 3$.

Ejemplo.- Calcular el rango de la matriz. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Desarrollo

Como la matriz A es de orden 2x3, entonces por definición $r(A) \leq \min\{2,3\}$ de donde $r(A) \leq 2$. Ahora formamos las submatrices cuadradas más grande de A, las cuales son de orden 2x2.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

como los determinantes de estas submatrices todos valen cero entonces $r(A) \neq 2$, entonces $r(A) < 2$ ahora formamos las matrices cuadradas 1x1.

Tomamos [1] cuyo determinante es $\neq 0$ por lo tanto $r(A) = 1$.

OBSERVACIONES.-

1. Todas las matrices no nulas tienen rango mayor que cero; las matrices nulas su rango es cero.

2. Sí la matriz A es de orden mxn no nula $\Rightarrow 0 < r(A) \leq \min\{n,m\}$.

3. Sí la matriz A es de orden nxn no nula $\Rightarrow 0 < r(A) \leq n$.

4. Si la matriz A es de orden nxn no nula, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes "$\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$ es equivalente a decir A" es o no singular $\Leftrightarrow r(A) = n$

   Luego una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa sí y solo sí $r(A) = n$.

5. Sean A y B dos matrices de orden m x n y n x p respectivamente $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

OBSERVACIÓN.- También se tiene otra forma para calcular el rango de una matriz, el cual es mediante el concepto de las operaciones elementales o transformaciones elementales, el cual es más sencillo.

16.30. OPERACIONES ELEMENTALES O TRANSFORMACIONES ELEMENTALES.-

Son las operaciones con matrices que no se modifica ni su orden ni su rango.

Las operaciones elementales o transformaciones elementales por filas o columnas sobre una matriz A son las siguientes:

① La permutación de la fila i y la fila j, se representa por H_{ij}.

② La permutación de la columna i y la columna j se representa por K_{ij}.

③ El producto de todos los elementos de la fila i por un escalar k distinto de cero, se representa por $H_i(k)$.

④ El producto de todos los elementos de la columna i por un escalar k distinto de cero, se representa por $K_i(k)$

⑤ La suma de la fila i, con los correspondientes elementos de la fila j multiplicados por un escalar k, se representa por $H_{ij}(k)$.

⑥ La suma de los elementos de la columna i, con los correspondientes elementos de la columna j multiplicados por un escalar k se representa por $K_{ij}(k)$ a las operaciones de tipo H se llaman operaciones elementales de fila a las operaciones del tipo k, se denomina operaciones elementales de columna.

Ambas en general son operaciones de columna.

Ejemplo.- Aplicar sucesivamente las operaciones de fila $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_2(\frac{1}{5})$,

donde: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow{H_{21}(-2)}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow{H_{31}(1)}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2(\frac{1}{5})}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

16.31. MATRIZ ELEMENTAL.-

Una matriz cuadrada A de orden nxn se denomina matriz elemental si puede ser obtenida a partir de la matriz identidad de orden nxn, I_n por una sola operación elemental de fila o columna a las matrices elementales se denotan por E.

Ejemplo.- Obtener tres matrices elementales.

① $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H$$

② $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k$$

③ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H_{23}$$

16.32. MATRIZ ESCALONADA.-

Una matriz A de orden mxn cuyas filas están en forma escalonada se denomina matriz escalonada y es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{mxn}$$

Una matriz A puede ser reducida a la forma matriz escalonada, reducida mediante una serie de operaciones elementales sobre sus filas satisfaciendo las condiciones siguientes:

1ro. Si una fila no consta exclusivamente de ceros, entonces el primer elemento diferente de cero en la fila es 1.

2do. Si hay filas que constan exclusivamente de ceros, entonces están agrupadas en la parte de la matriz.

3ro. Si las filas j y j+1 son dos filas sucesivas cualquiera no constan exclusivamente de ceros, entonces, el primer número diferente de cero en la fila j+1 aparece a la derecha del primer número diferente de cero en la fila j.

4to. Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente de cero de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

Si una matriz cumple con las propiedades 1er, 2do y 3ro, se dice que esta en forma escalonada.

Ejemplos.- Las siguientes matrices dadas son matrices escalonadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16.33. MATRICES EQUIVALENTES.-

Una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden mxn se dice que es equivalente a la matriz $B = [b_{ij}]$ de orden mxn, si B se puede obtener de A por medio de una sucesión de operaciones elementales de filas o columnas.

La notación es A ~ B (A es equivalente a B).

Ejemplo.- Llevar a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ a la matriz identidad mediante operaciones elementales.

Desarrollo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{f_2 - 2f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{f_3 - 3f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{f_3-2f_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\overset{f_2-2f_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\overset{f_3-f_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{7}f_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{f_1-3f_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{f_2+6f_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overset{f_1+2f_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I \qquad \therefore\ A \sim I$$

16.34. INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.-

El método consiste en construir una matriz de orden nx2n, formada por la matriz A y la matriz unitaria I es decir:

$$\boxed{A \vdots I} \qquad \ldots (1)$$

Mediante las operaciones elementales sobre las filas de la matriz construida, transformando (1) en la forma:

$$\boxed{I \vdots B}$$

donde $B = A^{-1}$ es la matriz inversa.

Ejemplo.- Hallar la inversa de la matriz A mediante el método de Gauss – Jordán si existe donde: $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow f_1 - f_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow f_3 + f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow f_2 - f_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 & \rightarrow f_2 + 3f_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \rightarrow f_3 + f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & \rightarrow f_1 - 3f_3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 3 & 0 & 4 & -19 & -12 & \rightarrow f_1 + 3f_2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 3 & \rightarrow (-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

16.35. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1 Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Si A = B, hallar 3A + 2C.

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

Desarrollo

Como la condición del problema es: $A=B=\begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}$

Por igualdad de matrices se tiene: $\begin{cases} x-3y=2 \\ x=6-y \end{cases}$ de donde $\begin{cases} x-3y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ restando 4y = 4

entonces y = 1, x = 5 por lo tanto las matrices son: $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

calculando $3A+2C=3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 6-8 & 15-16 \\ 3+4 & 3+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$ Luego la respuesta es **e**

2 Sea la matriz $H=\begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, tal que det(H) = 4, Luego H^2 es:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Desarrollo

$\det(H)=|H|=\begin{vmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix}=x^2+3x=4$ de donde $x^2+3x-4=0$

factorizando $(x+4)(x-1)=0$, entonces $x=1$, $x=-4$

Luego para $x=1$, $H=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ calculando H^2

$H^2=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-3 & -3-3 \\ 1+1 & -3+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, por lo tanto la respuesta es **d**

(3) Si $x\in R^2$ es solución del sistema AX = B calcular $traz(x^t B)$ donde: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) $\frac{1}{2}$

Desarrollo

Como AX = B entonces $A^{-1}AX=A^{-1}B$ de donde $X=A^{-1}B$

Además $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$ entonces $\exists\, A^{-1}$ tiene inversa

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2+1 \\ 4-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

calculando $X^t=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}^t=[-1 \quad 3]$

$X^t B=[-1 \quad 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=[-2+3]=[1]$, por lo tanto $traz(X^t B)=1$, la respuesta es **b**

(4) La matriz $\begin{bmatrix} 2+x & x \\ x & 3 \end{bmatrix}$, tiene por determinante, él número (x + b), Hallar el valor de "b", de tal manera que dicho número sea único.

a) 7 b) 1 c) -x d) 7 e) $\frac{1}{7}$

Desarrollo

Por condición del problema se tiene:

$\begin{vmatrix} 2+x & x \\ x & 3 \end{vmatrix} = x+b$, desarrollando $(2+x)3-x^2 = x+b$ de donde $x^2-2x+b-6=0$,

observamos que para un valor de x se obtendrá un valor para b, además si x + b es único entonces x es único, por lo tanto si x es único quiere decir que el discriminante de la ecuación $x^2-2x+b-6=0$ debe ser cero:

$B^2-4AC=(-2)^2-4(1)(b-6)=0 \Rightarrow 4+24-4b=0$

de donde 4b = 28 entonces $b=\frac{28}{4}=7$, la respuesta es **d**

(5) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, Determinar: $Traza(A)+Traza(A^{-1})$

a) $\frac{47}{6}$ b) $\frac{41}{6}$ c) $\frac{37}{6}$ d) $\frac{57}{6}$ e) $\frac{43}{6}$

Desarrollo

Traza (A) = 1 + 2 + 3 = 6, ahora calculamos $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow CA=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$, matriz de cofactores

$|A| = 1(6) + 0(3) + 0(-4) = 6 + 0 - 0 = 6 \Rightarrow |A| = 6$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{|A|}(CA)' = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$traza(A^{-1}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

calculando $traza(A) + traza(A^{-1}) = 6 + \frac{11}{6} = \frac{47}{6}$, la respuesta es **a**

⑥ Determinar $(A+B)^2$, sabiendo que $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Desarrollo

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$, aplicando la propiedad distributiva

$$= (A+B)A + (A+B)B = A^2 + BA + AB + B^2, \ (AB \neq BA)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+4+3 & 2+0+8+6 \\ -1+0-2+3 & -1+0-4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$, la respuesta es **b**

(7) Sea la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2. Hallar la suma de los elementos de la diagonal de la matriz X.

a) 1 **b)** 5 **c)** 8 **d)** 10 **e)** 15

Desarrollo

Sí AX = B entonces $X = A^{-1}B$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Sí $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

AX = B $\Rightarrow$ $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} -5+0 & -15-2 \\ 3+0 & 9+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -17 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

calculando la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz X:

-5 + 10 = 5, la respuesta es **b**

(8) Dadas las matrices: $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ el determinante de la matriz MN – NM es:

a) -8 **b)** -4 **c)** 0 **d)** 4 **e)** 8

Desarrollo

$$MN = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-1 & 0+2 \\ -9-2 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$NM = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+0 & 3+0 \\ 2-6 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$MN-NM=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ -11 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-6 & 3\\ -4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -7 & 1\end{bmatrix}$$

$|MN-NM|=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -7 & 1\end{vmatrix}=-1-7=-8$, la respuesta es **a**

(9) Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ c & 5\end{bmatrix}$ tal que AB = BA, calcular el valor de: E = a + c

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Desarrollo

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\ c & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a-c & 2-5\\ 3a+c & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a-c & -3\\ 3a+c & 8\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}a & 1\\ c & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3 & -a+1\\ 2c+15 & -c+5\end{bmatrix}$$

como AB = BA entonces por igualdad de matrices se tiene:

$$\begin{bmatrix}2a-c & -3\\ 3a+c & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3 & -a+1\\ 2c+15 & -c+5\end{bmatrix} \text{ de donde } \begin{cases}2a-c=2a+3\\ -3=-a+1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}c=-3\\ a=4\end{matrix}$$

por lo tanto E = a + c = 4 – 3 = 1, la respuesta es **d**

(10) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ y sea B una matriz triangular inferior tal que $A=BB^t$.

Halle la traza de la matriz B de elementos positivos.

a) $2\sqrt{3}$ b) $2(1+\sqrt{3})$ c) 2 d) $2+\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$

Desarrollo

Como B es una matriz triangular Inferior entonces tomamos la matriz

$$B=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ x & b & 0\\ y & z & c\end{bmatrix} \text{ entonces } B^t=\begin{bmatrix}a & x & y\\ 0 & b & z\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}, \text{ calculando } BB^t$$

$$BB^t=\begin{bmatrix}a&0&0\\x&b&0\\y&z&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&x&y\\0&b&z\\0&0&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&ax&ay\\ax&x^2+b^2&xy+bz\\ay&xy+bz&y^2+z^2+c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\2&4&2\\1&2&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a^2=4\\ax=2\\ay=1\\x^2+b^2=4\\xy+bz=2\\y^2+z^2+c^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\x=1\\y=\dfrac{1}{2}\\b=\sqrt{3}\\z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\c=\sqrt{3}\end{cases},\ \text{de donde se tiene:}$$

$$traza(B)=a+b+c=2+\sqrt{3}+\sqrt{3}=2+2\sqrt{3}=2(1+\sqrt{3})$$

por lo tanto la respuesta es **b**

(11) Calcular: traz (AB) + traz (BA), siendo $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4&8&1\\2&-1&3\end{bmatrix}$

a) -2 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Desarrollo

$$AB=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&8&1\\2&-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-2&16+1&2-3\\-4+4&-8-2&-1+6\\0+2&0-1&0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&17&-1\\0&-10&5\\2&-1&3\end{bmatrix}$$

de donde traz (AB) = 6 – 10 + 3 = -1 $\Rightarrow$ traz (AB) = -1

$$BA=\begin{bmatrix}4&8&1\\2&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-8+0&-4+16+1\\4+1+0&-2-2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&13\\5&-1\end{bmatrix}$$

de donde traz (BA) = 0 – 1 = -1 entonces traz (BA) = -1

Luego traz (AB) + traz (BA) = -1 – 1 = -2, la respuesta es **a**

(12) Si $A=\left[a_{ij}\right]_{4x3}$ donde $a_{ij}=\begin{cases}2 & si\ \ i=j\\ -1 & si\ \ i\neq j\end{cases}$, calcular la suma de los elementos de A.

a) 1 b) -1 c) 3 d) -3 e) 4

Desarrollo

$$A=\left[a_{ij}\right]_{4x3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

calculando la suma de los elementos de la matriz A

S = (2 – 1 – 1) + (-1 + 2 – 1) + (-1 – 1 + 2) + (-1 – 1 – 1) = 0 + 0 + 0 – 3 = -3

Como S = -3, la respuesta es **d**

(13) Siendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ entonces su inversa es la matriz:

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

Desarrollo

Aplicando el teorema de 16.22 se tiene:

La inversa de $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$$

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b\\ -a & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, la respuesta es **d**

(14) Si $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ calcular: $A+A^2+A^3+A^4$

a) $\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

Desarrollo

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 1+1\\ 0+0 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 1+2\\ 0+0 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^2.A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 2+2\\ 0+0 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1+1+1 & 1+2+3+4\\ 0+0+0+0 & 1+1+1+1\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & 4\end{bmatrix}$, la respuesta es **a**

(15) Calcular el determinante $\begin{vmatrix}0 & a_1 & a_2\\ -a_1 & 0 & a_3\\ -a_2 & -a_3 & 0\end{vmatrix}$

a) -1 b) 0 c) 1 d) a_1a_2 e) a_3a_1

Desarrollo

Sea $A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & a_2\\ -a_1 & 0 & a_3\\ -a_2 & -a_3 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow A^t=-A$, es decir que una matriz antisimetrica de orden 3.

$\Rightarrow \quad |A^t|=|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$ pero $|A^t|=|A|$ de donde

$|A|=-|A|$ entonces $2|A|=0$ entonces $|A|=0$, luego la respuesta es **b**

(16) De la ecuación matricial $(A^t+B)^t+2A-X=0$, donde $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; y dar como respuesta al mayor de los elementos de X.

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

Desarrollo

Aplicando las propiedades de la transpuesta de las matrices

$(A^t+B)^t+2A-X=0$ entonces $(A^t)^t+B^t+2A-x=0$, $((A^t)^t=A)$

de donde $A+B^t+2A-X=0$ entonces $X=3A+B^t$

$$X=3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 9 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-1 & -3+1\\ 9+2 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 11 & 1\end{bmatrix}$$

como el mayor elemento de X es 11, la respuesta es **d**

(17) Si $A=\begin{bmatrix}a-8 & p-b & m-a\\ a-5 & b+9 & n-b\\ 5-a & b-2 & -2c+5\end{bmatrix}$, es una matriz diagonal calcular el valor de E = m – n + p.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

De acuerdo al tipo de matrices 16.13, una matriz A es diagonal si todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son iguales a cero, es decir:

$$\begin{cases}a-5=0\\ p-b=0\\ b-2=0\\ m-a=0\\ n-b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5\\ p=b=2\\ b=2\\ m=a=5\\ n=b=2\end{cases} \text{ de donde } \begin{cases}m=5\\ n=2\\ p=2\end{cases}$$

el valor de E = m – n + p = 5 – 2 + 2 = 5, por lo tanto la respuesta es **c**

(18) Dadas las matrices A y B que cumplen: $A+2B=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & -3\end{bmatrix}$ y $2A-B=\begin{bmatrix}5 & -11\\-5 & 4\end{bmatrix}$.

Hallar | A | - | B |.

a) -2 b) 0 c) 2 d) 4 e) 6

Desarrollo

$$\begin{cases}A+2B=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & -3\end{bmatrix}\\ 2A-B=\begin{bmatrix}5 & -11\\-5 & 4\end{bmatrix}\end{cases} \text{ entonces } \begin{aligned}A+2B&=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & -3\end{bmatrix}\\ 4A-2B&=\begin{bmatrix}10 & -22\\-10 & 8\end{bmatrix}\end{aligned} \text{ sumando}$$

$$5A=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & -22\\-10 & 8\end{bmatrix}$$

$$5A=\begin{bmatrix}5+10 & 2-22\\0-10 & -3+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -20\\-10 & 5\end{bmatrix} \text{ de donde } A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & -20\\-10 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

como $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3 & -4\\-2 & 1\end{vmatrix}=3-8=-5 \Rightarrow$ | A | = -5

además $2A-B=\begin{bmatrix}5 & -11\\-5 & 4\end{bmatrix}$ entonces $B=2A-\begin{bmatrix}5 & -11\\-5 & 4\end{bmatrix}$

$$B=2\begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & -11\\-5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -8\\-4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & -11\\-5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-5 & -8+11\\-4+5 & 2-4\end{bmatrix}$$

$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-2-3=-5 \Rightarrow$ | B | = -5

Luego | A | - | B | = -5 – (-5) = -5 + 5 = 0, la respuesta es **b**

(19) Dada la ecuación matricial: $\begin{bmatrix}0 & 0 & a\\0 & b & 0\\c & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\b+c\\c+a\end{bmatrix}$, halle el valor de $(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Como $\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix}$, efectuando el producto

$\begin{bmatrix} 0+0+ax_3 \\ 0+bx_2+0 \\ cx_1+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix}$, simplificando se tiene:

$\begin{bmatrix} ax_3 \\ bx_2 \\ cx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix}$, aplicando la igualdad de matrices

$$\begin{cases} ax_3 = a+b \\ bx_2 = b+c \\ cx_1 = c+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(x_3-1) = b \\ b(x_2-1) = c \\ c(x_1-1) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 - 1 = \dfrac{b}{a} \\ x_2 - 1 = \dfrac{c}{b} \\ x_1 - 1 = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

$\therefore \quad (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1) = \dfrac{a}{c}.\dfrac{c}{b}.\dfrac{b}{a} = 1$, la respuesta es **a**

(20) Si $X \in R^{2x1}$ es solución de la ecuación matricial: AX = B; calcular: $traz(X^t.B)$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) 2

Desarrollo

Como AX = B despejamos X, es decir: $X = A^{-1}B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$$

aplicando el teorema de 16.22 se tiene:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+1\\ 4-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$ como $X=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$ entonces $x^t=[-1 \quad 3]$

$$X^t.B=[-1 \quad 3]\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=[-2+3]=[1]$$ $\therefore \quad traz(X^t.B)=1$, la respuesta es **d**

(21) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, entonces podemos afirmar que A^{4n+1} es:

a) $(-1)^n A$ **b)** $(-1)^{2n}A^2$ **c)** A **d)** $2\sqrt{2}A$ **e)** I

Desarrollo

A la matriz $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ expresamos en la forma:

$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, de donde calculamos

$$A^2=A.A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-1 & -1-1\\ 1+1 & -1+1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(2)\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

de donde $A^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$A^4=A^2.A^2=I$$

$$A^{4n}=(A^4)^n=A^4.A^4...A^4=(-1)^n I$$

$$A^{4n+1}=4^n.4=(-1)^n.A.I=(-1)^n A \quad \text{n}-\text{veces}$$

$$A^4 = A^3.A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-1 & 1-1 \\ 1-1 & -1-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^5 = A^4.A = -IA = -A$$

$$A^6 = A^5.A = -A.A = -A^2$$

$$A^7 = A^6.A = -A^2.A = -A^3$$

$$A^8 = A^7.A = -A^3.A = -A^4 = -(-I) = I$$

Luego $A^{4n+1} = A^{4n}.A = (-1)^n I.A = (-1)^n A$

Como $A^{4n+1} = (-1)^n A$, la respuesta es **a**

(22) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & x \\ z & y \end{bmatrix}$, donde x, y, z no son todos cero. Si AB es la matriz cero, entonces los valores x, y, z son respectivamente.

a) 0,1,0 **b)** 1,1,4 **c)** -1,1,4 **d)** 1,-1,0 **e)** 1,-1,-4

Desarrollo

$AB = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & x \\ z & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+z & x^2+y \\ -4+yz & -x+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, por igualdad se tiene:

$4x + z = 0 \wedge x^2 + y = 0 \wedge -4 + yz = 0 \wedge -x + y^2 = 0$

$[4x + z = 0 \wedge -4 + yz = 0] \wedge [x^2 + y = 0 \wedge -x + y^2 = 0]$

$[4x + z = 0 \wedge yz = 4] \wedge [x^2 = -y \wedge x = y^2]$

$[4x + z = 0 \wedge yz = 4] \wedge [y^4 + y = 0]$

$[4x + z = 0 \wedge yz = 4] \wedge [y = -1 \wedge x = 1]$

$z = -4 \wedge z = -4 \wedge y = -1 \wedge x = 1$

por lo tanto los valores son $x = 1$, $y = -1$, $z = -4$, la respuesta es **e**

(23) Sea $A=[a_{ij}]_{2x2}$ tal que $a_{ij}=\begin{cases}1, & si\ i\neq j\\ 2, & si\ i=j\end{cases}$. Hallar la suma de los elementos de A^n, $n\in N$

a) 2.3^n b) 3.2^n c) 3.4^n d) 5.2^n e) 2^n

Desarrollo

Calculamos los elementos de la matriz $A=[a_{ij}]_{2x2}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+1 & 2+2\\ 2+2 & 1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+4 & 5+8\\ 8+5 & 4+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^2.A^2=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25+16 & 20+20\\ 20+20 & 16+25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41 & 40\\ 40 & 41\end{bmatrix}$$

Si S_n es la suma de todos los elementos de A^n, entonces

$S_1=2+1+1+2=6=2.3$

$S_2=5+4+4+5=18=2.3^2$

$S_3=14+13+13+14=54=2.3^3$

$S_4=41+40+40+41=162=2.3^4$

.

.

.

$S_n=2.3^n$, por lo tanto la respuesta es **a**

(24) Sean las matrices A y B tal que: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}u & v & w\\ 0 & x & y\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}$, encontrar u + v + w + x + y + z si se cumple que AB = I (I matriz identidad)

a) 7 b) 14 c) 21 d) 28 e) 35

Desarrollo

Calculando el producto de las matrices A y B tal que AB = I

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, efectuando las operaciones

$$\begin{bmatrix} u+0+0 & v-x+0 & w-y+z \\ 0+0+0 & 0+\frac{x}{2}+0 & 0+\frac{y}{2}-z \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+\frac{z}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, simplificando

$$\begin{bmatrix} u & v-x & w-y+z \\ 0 & \frac{x}{2} & \frac{y}{2}-z \\ 0 & 0 & \frac{z}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, por igualdad de matrices

$$u=1 \ \wedge \ v-x=0 \ \wedge \ w-y+z=0 \ \wedge \ \frac{x}{2}=1 \ \wedge \ \frac{y}{2}-z=0 \ \wedge \ \frac{z}{4}=1$$

$$u=1 \ \wedge \ v=x \ \wedge \ w-y+z=0 \ \wedge \ x=2 \ \wedge \ y=2z \ \wedge \ z=4$$

$$u=1 \ \wedge \ v=x=2 \ \wedge \ y=8 \ \wedge \ z=4 \ \wedge \ w=4$$

Luego $x+y+z+u+v+w=2+8+4+1+2+4=21$, la respuesta es **c**

(25) Dado $P(x)=x^2-6x+7$, hallar n sabiendo que P(A) = nI donde $A=\begin{bmatrix} 5 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) m e) -m

Desarrollo

Como $P(x) = x^2 - 6x + 7$ entonces $P(A) = A^2 - 6A + 7I$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 5 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 6m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^2 - 6A + 7I = \begin{bmatrix} 25 & 6m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25-30+7 & 6m-6m+0 \\ 0-0+0 & 1-6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \text{ simplificando}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ de donde n = 2, la respuesta es **b**

26 La inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = [b_{ij}]$, calcular la $traz(A^{-1})$

a) 1   b) 3   c) 5   d) 10   e) 9

Desarrollo

Aplicando el teorema 16.22 $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|}$ de donde

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$ entonces $|A| = 1$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = adj(A) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$traz(A^{-1}) = 8 + 2 = 10$, la respuesta es **d**

27 Si A es una matriz no singular, calcular $adj(A^2 + 2A)$ sí $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$

Desarrollo

Sea $B = A^2 + 2A$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^2 = A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

además $B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj(B)$ entonces $adj(B) = |B| B^{-1}$

$$|B| = |A^2 + 2A| = \begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9$$

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj(B) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ por lo tanto

$adj(B) = 9.\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ como $B = A^2 + 2A$

$\therefore \quad adj(A^2 + 2A) = \begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, la respuesta es **b**

28 Sí $\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$. Hallar el valor de M = a + b + c + d

a) -4 **b)** -2 **c)** 0 **d)** 2 **e)** 4

Desarrollo

$\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$, efectuando la operación

$$\begin{bmatrix} 2+3b & 2+3 & 4+b+d & 2b+d \\ a-6 & a+3c & 2a-2+1 & -4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$$, simplificando

$$\begin{bmatrix} 2+3b & 5 & 4+b+d & 2b+d \\ a-6 & a+3c & 2a-1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$$, por igualdad

$$\begin{cases} 2+3b=11 \\ 4+b+d=a \\ 2b+d=0 \\ a-6=-5 \\ a+3c=7 \\ -3=-b \end{cases} \text{ de donde } \begin{matrix} b=3 \\ d=-6 \\ d=-6 \\ a=1 \\ c=2 \\ b=3 \end{matrix}$$, calcular $M = a + b + c + d = 1 + 3 + 2 - 6 = 0$

como $M = 0$, la respuesta es **c**

(29) Hallar $E = x + y + z$ sí: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$, efectuando la operación

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ y+5z \\ x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$, por igualdad de matrices se tiene:

$$\begin{cases} x+2y=1 & \dots (1) \\ y+5z=5 & \dots (2) \\ x+z=2 & \dots (3) \end{cases}$$

restando (1) y (3) se tiene: $2y - z = -1$

Luego con la ecuación (2) se tiene el sistema:

$\begin{cases} 2y - z = -1 \\ y + 5z = 5 \end{cases}$ de donde $\begin{array}{r} 2y - z = -1 \\ -2y - 10z = -10 \\ \hline \end{array}$ sumando

-11z = -11 entonces z = 1, y = 0, x = 1

Luego E = x + y + z = 1 + 0 + 1 = 2, la respuesta es **a**

(30) Si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix}$ es simétrica. Hallar la matriz A^2

a) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 18 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 5 & 7 & 14 \\ -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 5 & 14 & 7 \\ 10 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 6 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Desarrollo

$A = \begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix}$ es simétrica, quiere decir que: $\begin{cases} a-b=2 \\ b-x=-1 \\ a-x=b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a-b=2 \\ 2b+a=-1 \end{array}$

de donde tendremos: $\begin{cases} b=1 \\ a=3 \\ x=2 \end{cases}$

Luego $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, ahora calculamos A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+1 & 2+6-1 & -1+2-4 \\ 2+6-1 & 4+9+1 & -2+3+4 \\ -1+2-4 & -2+3+4 & 1+1+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la respuesta es **a**

(31) La inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -4\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$ si existe es:

a) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 7\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}4 & -10 & -2\\ 0 & -4 & 0\\ 4 & -7 & -3\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

Desarrollo

Como $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{|A|}(CA)^t$, donde

$$CA=\begin{bmatrix}M_{11} & -M_{12} & M_{13}\\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23}\\ M_{31} & -M_{23} & M_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -10 & -2\\ 0 & -4 & 0\\ 4 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-3 & 0 & -4\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=-3(4-0)+0(16-6)-4(0-2)=-12+8=-4$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}4 & -10 & -2\\ 0 & -4 & 0\\ 4 & -7 & -3\end{bmatrix}^t=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0 & 4\\ -10 & -4 & -7\\ -2 & 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto la respuesta es **b**

(32) Halle la traza de la matriz inversa tal que: $2A=|A|\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}^{-1}$

a) 8 b) 6 c) 14 d) 20 e) 22

Desarrollo

Tomando determinante ambos miembros de la ecuación dada

$|2A| = \left| |A| \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \right|$, como A es de orden 2 se tiene:

$2^2 |A| = |A|^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}^{-1}$ de donde $2^2 |A| = |A|^2 (12-10)^{-1}$

$4|A| = |A|^2 2^{-1}$ de donde $4|A| = \frac{|A|^2}{2}$ entonces $|A| = 8$

$2A = 8\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$ entonces $A = 4\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A = 4\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = 4.\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$

Luego la traz (A) = 8 + 6 = 14, la respuesta es **c**

(33) Sí $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & y \\ z & u \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} 12 & 38 \\ 8 & 40 \end{bmatrix}$. Determinar $|B|^{-1}$

a) 6 b) $\frac{1}{11}$ c) 11 d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{8}$

Desarrollo

$AB = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 38 \\ 8 & 40 \end{bmatrix}$, efectuando la operación

$$\begin{bmatrix} 6+xz & 2y+xu \\ 0+8z & 0+8u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 38 \\ 8 & 40 \end{bmatrix}, \text{ por igualdad de matrices}$$

$$\begin{cases} 6+xz=12 \\ 2y+xu=38 \\ 8z=8 \\ 8u=40 \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} xz=6 \\ 2y+xu=38 \\ z=1 \\ u=5 \end{cases} \text{ de donde } \begin{matrix} z=1,\ x=6 \\ 2y+30=38 \ \Rightarrow\ y=4 \end{matrix}$$

$$\text{como } \ B = \begin{bmatrix} 3 & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|B|^{-1} = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{15-4} = \frac{1}{11}, \text{ la respuesta es } \boxed{\textbf{b}}$$

(34) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La suma de los elementos de A^{40} es:

a) 6^{40} **b)** 6^{20} **c)** 6^{15} **d)** 6^{10} **e)** 6^{14}

Desarrollo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6I$$

$$A^4 = A^3.A = 6I.A = 6A$$

$$A^5 = A^4.A = 6A.A = 6A^2$$

$$A^6 = A^3.A^3 = 6I.6I = 6^2 I^2 = 6^2 I$$

$A^7 = A^6.A = 6^2 IA = 6^2 A$

$A^8 = A^7.A = 6^2 A.A = 6^2 A^2$

$A^9 = A^8.A = 6^2 A.A^2 = 6^2 A^3 = 6^2.6I = 6^3 I$

$A^{12} = A^9.A^3 = 6^3 I.6I = 6^4 I$

$A^{15} = A^{12}.A^3 = 6^4 I.6I = 6^5 I$

$$A^{39} = 6^{13} I \text{ . Luego } A^{40} = A^{39} A = 6^{13} A = 6^{13} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego la suma de los elementos de A^{40} es:

$6^{13}(1+2+3) = 6^{13}.6 = 6^{14}$, **la respuesta es** **e**

(35) **Calcular (A + B)(A – B), sí** $A^2 = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **además** $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Desarrollo

(A + B)(A – B) = A(A – B) + B(A – B), por la propiedad distributiva

$$= A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2 - AB + BA$$

$$= -AB + BA = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad (A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, **la respuesta es** **a**

(36) Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ c & 5\end{bmatrix}$ tal que AB = BA, Hallar a.c

a) -12 **b)** -9 **c)** -3 **d)** 3 **e)** 6

Desarrollo

Como AB = BA entonces reemplazando se tiene:

$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\ c & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 1\\ c & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, efectuando el producto de matrices

$\begin{bmatrix}3a-c & 3-5\\ 3a+c & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+3 & -a+1\\ 3c+15 & -c+5\end{bmatrix}$, simplificando

$\begin{bmatrix}3a-c & -2\\ 3a+c & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+3 & -a+1\\ 3c+15 & -c+5\end{bmatrix}$, por igualdad de matrices

$\begin{cases}3a-c=3a+3\\ -2=-a+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-3\\ a=3\end{cases}$ entonces a.c = -9, la respuesta es **b**

(37) El valor del determinante $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$, es:

a) -2 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

Desarrollo

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 7\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=1(20-21)-4(12-14)+7(9-10)$$

= -1 + 8 – 7 = -8 + 8 = 0, la respuesta es **c**

(38) Dada la matriz: $adj(A)=\begin{bmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & k\end{bmatrix}$ y | A | = 4, Hallar el valor de k.

a) -12 **b)** -6 **c)** 6 **d)** 12 **e)** 18

Desarrollo

Como $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$ por definición de matriz inversa

Ahora tomamos determinante a ambos miembros

$|A^{-1}|=|\frac{1}{|A|}adj(A)|$, por igualdad de propiedades de los determinantes se tiene:

$|A|^{-1}=\frac{1}{|A|^3}|adj(A)|$ de donde $|adj(A)|=|A|^2=(-4)^2=16$

como | adj(A) | = 16, reemplazando los datos se tiene:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & k \end{vmatrix}=16 \text{, desarrollando se tiene: } 4\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 10 & k \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -6 & k \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}=16$$

4(9k + 50) + 8(-7k – 30) + 4(-70 + 54) = 16

36k + 200 – 56k – 240 – 64 = 16, simplificando

-20k – 104 = 16 entonces -20k = 120 $\Rightarrow$ $k=-\frac{120}{20}=6$

por lo tanto la respuesta es **b**

39 Sí la matriz A es de orden 9 tal que $|A^{-3}|=64$; el valor de $|A^2|$ es:

a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) 16 d) $\frac{1}{16}$ e) 5

Desarrollo

Como $|A^{-3}|=|A^{-1}|^3=64$ de donde $|A^{-1}|=4$

además $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=4$ entonces $|A|=\frac{1}{4}$

Como $|A^2| = |A|^2 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$, por lo tanto la respuesta es **d**

(40) El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$ es:

a) a.b b) b.c c) c.a d) a + b + c e) abc

Desarrollo

Aplicando el método de reducción de un determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

por la propiedad que el determinante de una matriz triangular superior o inferior su determinante es igual al producto de sus elementos de su diagonal

Por lo tanto la respuesta es **e**

(41) Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$

a) a^2 b) b^2 c) a^2b^2 d) ab e) a + b

Desarrollo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 - f_2 \\ \\ f_3 - f_4 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_4} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}\underline{f_4 - f_1} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix}\underline{f_4 - f_3} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$= ab(1)(-a)(1)(-b) = a^2b^2$. Luego $|A| = a^2b^2$ la respuesta es **c**

(42) Calcular $|A|$; sí $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

a) n! b) n c) 2n d) 3n e) n^2

Desarrollo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$= 1.2.3....n = n!$, por ser el determinante de una matriz triangular superior

Por lo tanto la respuesta es **a**

(43) Calcular "x" en $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & x \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

Desarrollo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & x \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$, haciendo el desarrollo se tiene:

$3(9-2x)-2(21-4x)+5(14-12)=9$

$27-6x-42+8x+10=9$, simplificando $2x-5=9$ entonces $2x=14$

de donde $x=7$, por lo tanto la respuesta es **b**

(44) Calcular el determinante de la matriz A de orden 4 definida por $a_{ij}=\begin{cases} 5\ , & si\ i<j \\ 3\ , & si\ i\geq j \end{cases}$

a) -24 b) -12 c) 0 d) 12 e) 24

Desarrollo

$$A=\left[a_{ij}\right]_{4x4}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix}-1\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -1\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -1\\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(3)(-2)(-2)(-2)=-24$$, La respuesta es **a**

(45) El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 20 & 10 \end{vmatrix}$ es:

a) 19 b) 29 c) -39 d) 39 e) 49

Desarrollo

Aplicando el método del Pibote (reducción de orden).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 20 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 19 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 19 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 19 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 13 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(13)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -13\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -39$$

Por lo tanto la respuesta es **c**

(46) Calcular "x" sí $\begin{vmatrix} x+1 & x & -1 \\ x-1 & x & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 8$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & -1 \\ x-1 & x & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x & -1 \\ 2x & 2x & 0 \\ 2x+1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 2x & 2x \\ 2x+1 & 2x \end{vmatrix}$$

$$= -[4x^2 - 2x(2x+1)] = -[4x^2 - 4x^2 - 2x] = 2x = 8 \quad \text{de donde } x = 4$$

por lo tanto la respuesta es **b**

(47) Calcular el determinante $|A| = \begin{vmatrix} \frac{1+n^2}{1-n^2} & \frac{2n}{1-n^2} \\ \frac{2n}{1-n^2} & \frac{1+n^2}{1-n^2} \end{vmatrix}$

a) n b) n^2 c) 1 d) 2 e) 3

Desarrollo

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1+n^2}{1-n^2} & \frac{2n}{1-n^2} \\ \frac{2n}{1-n^2} & \frac{1+n^2}{1-n^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{(1-n^2)^2}\begin{vmatrix} 1+n^2 & 2n \\ 2n & 1+n^2 \end{vmatrix}$$, por propiedad

$$=\frac{1}{(1-n^2)^2}[(1+n^2)^2-4n^2]=\frac{1+2n^2+n^4-4n^2}{(1-n^2)^2}=\frac{1-2n^2+n^4}{(1-n^2)^2}$$

$=\frac{(1-n^2)^2}{(1-n^2)^2}=1$, luego la respuesta es **c**

(48) Luego de resolver $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, la suma de soluciones es:

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-\frac{3}{4}$ **c)** $-\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{4}{3}$ **e)** 1

Desarrollo

Aplicando el método del PIBOTE (de reducción)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+4}(-1)\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -a \\ 2a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 2a+2 \\ 1 & 1 & -a \\ 2a & 0 & a+1 \end{vmatrix}=-(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a-1 & 2(a+1) \\ 2a & a+1 \end{vmatrix}=[(a-1)(a+1)-2a.2(a+1)]$$

$=-[a^2-1-4a(a+1)]=0=a^2-1-4a^2-4a=0$, simplificando

$3a^2+4a+1=0$, factorizando se tiene: $(3a+1)(a+1)=0$ de donde $a_1=-\frac{1}{3}$, $a_2=-1$

La suma es: $a_1 + a_2 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$, la respuesta es **c**

49 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{bmatrix}$

a) xy **b)** x^2y^2 **c)** x + y **d)** x − y **e)** x^3y^3

Desarrollo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} -1 = xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= xy(-1)^{1+1}(-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = -x^2y(1-y-1) = -x^2y(-y) = x^2y^2$$

como $|A| = x^2y^2$, la respuesta es **b**

50 El valor del determinante siguiente $\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix}$ es:

a) $b^n(a+b)$ **b)** $b^n(na+b)$ **c)** $b^{n-1}(na+b)$

d) $b^{n-1}(a+nb)$ **e)** $b^{n+1}(an+b)$

Desarrollo

A la primera fila le sumamos todas las demás filas, es decir en la forma:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} na+b & na+b & na+b & \dots & na+b \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (na+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix} \begin{matrix} -a \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = (na+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & b & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & b & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & b \end{vmatrix}$$

$= (na+b)1.\underbrace{b.b.b.b...b}_{n-1 \text{ veces } b} = (na+b)b^{n-1}$. Luego la respuesta es **c**

16.36. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, hallar X en: $(A-B)^t + X = 2(B^t + A)$ y dar como respuesta la suma de los elementos de X.

a) 19 b) 17 c) 15 d) 13 e) 11

(2) Hallar el valor de E = x + y + z sí $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(3) Hallar $(X^t + A)^t$, sí $AX = A^t$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(4) Calcular traz (X) si X verifica AX = B, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

(5) Dado el polinomio $P(x) = x^{34} - 2x^9 + 1$, calcular la suma de todos los elementos de P(A) donde $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(6) Hallar ab en: $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & 0 & 2 \\ 3 & 15 & 18 \\ 36 & 0 & -51 \end{bmatrix}$

a) 16 b) -26 c) 36 d) -66 e) 46

(7) Calcular el valor de E = a + b + c, de: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & c & 5 \end{bmatrix}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(8) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ hallar traz (A.B)

a) -1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(9) Si P(x) = 2x + 3 si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar la suma de todos los elementos de $P(A^{-1})$

a) 12 b) 8 c) 0 d) 16 e) -2

(10) Calcular el valor $E = ab - cd$, sí $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

a) 6 b) 8 c) $-\frac{11}{25}$ d) 12 e) 14

(11) Calcular el valor de $E = a + b + c + d$, donde: $\begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & c & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \\ d & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+12 & 29 \\ 7d+4 & d+21 \end{bmatrix}$,

$a,b,c,d \in \mathbb{N}$

a) 13 b) 11 c) 9 d) 7 e) 5

(12) Calcular el valor de $E = x - y$, de la igualdad de matrices donde $x < 5$

$$\begin{bmatrix} x^2+5 & x \\ xy^2+2y & xy \\ (1-xy)(x+y) & xy^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -y \\ 2xy-y & -y \\ 0 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(13) Si A es una matriz que cumple: $(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Halle la traza de la matriz A.

a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 1

(14) Calcular $traz(A^{-1})$ sí $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{3}{7}$ e) 3

(15) Calcular $traz(A^{-3})$ sí $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

a) 7 b) -14 c) 15 d) 13 e) -10

(16) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, calcular la traza de la matriz A^{-4}

a) 9 b) 17 c) 34 d) 24 e) 28

(17) Halle la traza de la matriz A^{-1} sí $A=|A|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

(18) Calcular a + b + m para que A sea la matriz identidad:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2a}{5}-15 & 20-b & 40-a \\ \frac{a}{2}-b & \frac{3b}{5}-11 & \frac{m}{4}-11 \\ \frac{a}{10}-\frac{b}{5} & \frac{a}{40}-1 & \frac{4m}{11}-15 \end{bmatrix}$$

a) 84 b) 94 c) 104 d) 108 e) 112

(19) Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ si $C=A^{50}=[c_{ij}]_{2x2}$, determinar C_{12}.

a) $5^{51}-5$ b) $5^{50}+5$ c) 3.5^{60} d) $5^{65}-5$ e) $5^{47}-5$

(20) Sean A, B y C matrices de orden 2x2 definidas por: $A=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ tales que cumplen la siguiente ecuación matricial 5x – A = 3[A – 4(B + C) – x]. Hallar la $traz(x^{-2})$.

a) $-\frac{1}{169}$ b) $\frac{3}{169}$ c) $\frac{5}{169}$ d) $\frac{7}{169}$ e) $\frac{10}{169}$

(21) Si $x \in R^2$ es solución del sistema: AX = b, calcular $traz(x^t b)$ donde $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) $\frac{1}{2}$

22 Si $A^2 = B$, donde $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}$, calcule la suma de los elementos de la matriz B.

a) 12 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

23 Sí $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7 & 1 & 4\\ 3 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, halle la suma de los elementos de la 2da fila de la matriz A.B

a) 52 b) 62 c) 72 d) 82 e) 92

24 Si $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -5\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$ indique la suma de los elementos de C = A.B y D = B.A.

a) 3 b) 6 c) 9 d) 18 e) 24

25 Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, calcular la suma de los elementos de la matriz AB + I

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

26 Halle los elementos de la tercera fila de la matriz inversa de la siguiente matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}$

a) -2 b) 0 c) 2 d) 4 e) 6

27 Si $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, calcular la diferencia del mayor y menor elemento de la matriz A^{-1}

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

(28) Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & a+b & 0\\ 2 & 5 & a\\ b & x & 3\end{bmatrix}$ simétrica, halle la traza de A^{-1}

a) 11 b) -11 c) -15 d) 15 e) 7

(29) Halle A^{-1} e indique la suma de sus elementos sí: $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 8\end{bmatrix}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(30) Si $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, halle la traza de la matriz $A+A^{-1}$

a) $\frac{37}{6}$ b) $\frac{47}{6}$ c) $\frac{57}{6}$ d) $\frac{67}{6}$ e) $\frac{77}{6}$

(31) Halle la traza de la matriz A^{40} sí $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$

a) -6 b) -3 c) 0 d) 3 e) 6

(32) Halle la traza de la matriz A^{-1} sí $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(33) Para la matriz $A=\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}$ sí $A^{-1}=\frac{1}{m}(A^2-nA+180I)$. Halle m + n

a) 361 b) 351 c) 341 d) 331 e) 321

(34) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}5 & 8 & 4\\3 & 2 & 5\\7 & 6 & 0\end{bmatrix}$, hallar la traza de aquella matriz B; que sumada con la matriz A origina la matriz identidad.

a) 4 b) -4 c) 2 d) -2 e) 5

(35) Si $adj(A)=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-10 & x & 2\\7 & -3 & -1\end{bmatrix}$, donde $|A|=2$, halle x

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(36) Hallar la matriz X, tal que $X.\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ y dar como respuesta la suma de todos los elementos de X

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

(37) Hallar la matriz x, tal que $X.\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\4 & 3 & 2\\1 & -2 & 5\end{bmatrix}$ y dar como respuesta la suma de todos los elementos de X.

a) -4 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(38) Dada la matriz $adj(A)=\begin{bmatrix}4 & -8 & 4\\-7 & 9 & -5\\-6 & 10 & k\end{bmatrix}$ y $|A|=4$, Hallar la matriz A

a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\3 & 0 & 4\\5 & -2 & 5\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 0 & 2\\4 & -2 & 5\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(39) Consideremos la matriz $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & y\\ 1 & 1 & 1 & y & 1\\ 1 & 1 & y & 1 & 1\\ 1 & y & 1 & 1 & 1\\ y & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, hallar la suma de los valores de y, de tal manera que $|B|=0$.

a) 1 b) 4 c) 3 d) -3 e) 6

(40) Determinar la traza de: $(A-17I)^{-1}$, sabiendo que se verifica $A=\begin{bmatrix}p & q & r\\ t & -p & q\\ 0 & 0 & 82\end{bmatrix}$ y $A^2-13A-67I=0$

a) 64 b) 74 c) 84 d) 94 e) 104

(41) Calcular $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 7 & 5\\ 5 & 2 & 3 & 6\\ 5 & -3 & -5 & 1\end{vmatrix}$

a) 0 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

(42) Dada la matriz $A=[a_{ij}]_{4x4}$ donde $a_{ij}=\begin{cases} i \ , \ i>j \\ 1 \ , \ i=j \\ j \ , \ i<j\end{cases}$. Calcular $|A|$

a) 97 b) -97 c) 87 d) 67 e) 77

(43) Sea la matriz que cumple $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & b\\ c & 3 & 2\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$ cuya traza es 7 y el producto de los elementos de su diagonal secundaria es –3, además su determinante es 10. Calcular $\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & c & a\\ b & a & a\end{vmatrix}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

44 Hallar la solución de la ecuación $\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

45 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x$ el valor del determinante $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$

a) x b) 2x c) 3x d) 4x e) 5x

46 La suma de las raíces de la siguiente ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 5 & -2 & 4 \\ x^2 & 25 & 4 & 16 \\ x^3 & 125 & -8 & 64 \end{vmatrix} = 0$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

47 Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{3x3}$ tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 3 - a_{ij} & , si \ i \neq j \\ -a_{ij} & , si \ i = j \end{cases}$. Calcular | A |.

a) $\frac{27}{4}$ b) $\frac{4}{27}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{17}{4}$ e) $\frac{7}{4}$

48 Calcular el determinante de la matriz A de orden 4; sí $a_{ij} = \begin{cases} 5 & si \ i < j \\ 3 & si \ i \geq j \end{cases}$

a) 12 b) 6 c) -6 d) -12 e) -24

49 Calcular el determinante de la inversa de la siguiente matriz $A = [a_{ij}]$ cuyo orden es 6 y su elemento genérico se define así: $a_{ij} = \begin{cases} -1 & si \ i > j \\ 0 & si \ i = j \\ 1 & si \ i < j \end{cases}$

a) -1 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

(50) Sean las matrices $A=[a_{ij}]_{2x2}$ tal que $a_{ij}=\begin{cases}2i-j & , i<j \\ i & , i\geq j\end{cases}$, $B=[b_{ij}]_{2x2}$ tal que $b_{ij}=\begin{cases}i+2j & , i\leq j \\ 2+j & , i>j\end{cases}$ además AX = B, calcular el determinante de X.

a) 2 b) 3 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 1

(51) Calcular el determinante $|A|=\begin{vmatrix}4 & 3 & 2 \\ 12 & 15 & 14 \\ 36 & 75 & 98\end{vmatrix}$

a) 284 b) 384 c) 364 d) 394 e) 404

(52) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix}15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13\end{vmatrix}=0$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(53) Si $A=[a_{ij}]_{nxn}$ tal que $a_{ij}+a_{ji}=0$, n impar, determinar | A |

a) n b) n^2 c) 2n d) 0 e) 1

(54) Calcular $|A|=\begin{vmatrix}x+2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & x+3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & x+5\end{vmatrix}$

a) x^3 b) x + 14 c) $x^3(x+14)$ d) x^4 e) 0

(55) La solución de la ecuación $\begin{vmatrix}x-1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3\end{vmatrix}=0$, es:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

56 Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 15 & 15 & 19 & 20 \\ 15 & 15 & 15 & 21 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \end{vmatrix}$ es:

a) -360 b) -120 c) 120 d) 362 e) 262

57 Calcular $\dfrac{b+c+d}{a}$, sí: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) 6 b) 4 c) 2 d) 1 e) 7

58 Al desarrollar el determinante $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ es:

a) $(a+1)^6$ b) $(a-1)^6$ c) $(a-1)^3$ d) $(a-1)^4$ e) $(a+1)^3$

59 El desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} x+y & x & x & x \\ x & x+y & x & x \\ x & x & x+y & x \\ x & x & x & x+y \end{vmatrix}$ es:

a) $y^3(4x+y)$ b) $x^3(4y+x)$ c) x^3y^3

d) y^2x^3 e) x^2+y^2

60 El valor del siguiente determinante $\begin{bmatrix} a+1 & 3a & b+2a & b+1 \\ 2b & b+1 & 2-b & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a+3 \\ b-1 & 1 & a+2 & a+b \end{bmatrix}$ es:

a) -2 b) 0 c) 2 d) 4 e) 6

16.37. RESPUESTAS.-

1	a	2	b	3	c	4	d	5	c	6	d	7	b	8	a
9	b	10	c	11	a	12	b	13	d	14	c	15	b	16	c
17	b	18	c	19	a	20	a	21	d	22	a	23	c	24	d
25	a	26	b	27	e	28	c	29	a	30	b	31	c	32	b
33	a	34	b	35	b	36	c	37	a	38	c	39	d	40	d
41	a	42	b	43	b	44	c	45	b	46	d	47	a	48	e
49	b	50	c	51	b	52	b	53	d	54	c	55	b	56	a
57	c	58	b	59	a	60	b								

CAPÍTULO XVII

17. SISTEMAS DE ECUACIONES.-

17.1. INTRODUCCIÓN.-

En el estudio de los sistemas de ecuaciones aplicaremos la teoría de matrices y determinantes para obtener la solución de sistemas lineales, así mismo trataremos las condiciones que debe tener los sistemas de ecuaciones para tener solución; también se estudiara la solución de los sistemas lineales de "m" ecuaciones con "n" incógnitas.

En secundaria se estudia la solución de los sistemas lineales mediante los métodos sencillos tales como:

- Método por sustitución.
- Método por igualación.
- Método de reducción (de las sumas o restas).

Estos métodos se siguen utilizando, pero la desventaja de estos métodos está en la demora de obtener la solución; si se tiene "n" ecuaciones con "n" incógnitas aplicaremos el método de Arthur Cayley (1821 – 1895) utilizando matrices y el método de Gabriel Cramer (1704 – 1752) utilizando determinantes.

17.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos ecuación lineal a la expresión dada por:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad \dots (1)$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$, se llaman coeficientes y los $x_1, x_2, \dots, x_n$, se llaman incógnitas.

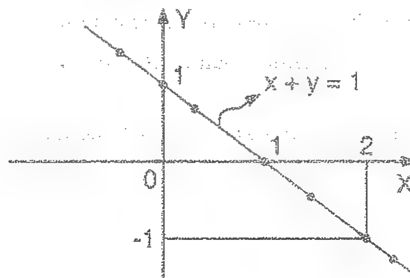
17.3. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL.-

En la solución de una ecuación lineal se presenta los siguientes casos:

1er caso.- En la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, si $a_1 \neq 0$ entonces $x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - ... - \frac{a_n}{a_1}x_n + \frac{b}{a_1}$, al asignar los valores a $x_2, x_3, ..., x_n$, se obtiene un valor para x_1, es decir que una sola ecuación con dos o más incógnitas tiene infinitas soluciones.

Ejemplo.- La ecuación lineal x + y = 1, despejando "y" se obtiene y = 1 – x, ahora demos valores a x

Para x = 0; y = 1; x = 1; y = 0; x = 2; y = -1; etc, etc es decir que tiene infinitas soluciones, porque todos los puntos de la recta x + y = 1 son solución.



2do caso.- Si $a_i = 0$, ∀ i y b ≠ 0, entonces la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, no tiene solución.

Ejemplo.- 0x + 0y = 4, no tiene solución.

3er caso.- Si $a_i = 0$, ∀i y b = 0, entonces la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, cualquier valor de $x_1, x_2, ..., x_n$ es solución.

Ejemplo.- 0x + 0y + 0z = 0, tiene infinitas soluciones, es decir cualquier valor de x, y, z es solución.

17.4. DEFINICIÓN.-

Llamaremos sistemas de ecuaciones a un conjunto de ecuaciones con dos o más incógnitas, que se verifican simultáneamente para ciertos valores asignados a sus incógnitas, existen 2 tipos de sistemas de ecuaciones que son las lineales y las no lineales.

Ejemplos.-

① El sistema $\begin{cases} 7x-4y=13 \\ 5x+2y=19 \end{cases}$ estas ecuaciones se verifican simultáneamente para los valores x = 3, y = 2.

② El sistema $\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 2x+5y-7z=-9 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$ estas ecuaciones se verifican simultáneamente para los valores x = 1, y = 2, z = 3.

③ El sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=3 \end{cases}$ estas ecuaciones se verifican simultáneamente para los valores de x = 2, y = 6, sin embargo esta no es una ecuación lineal.

17.5. SOLUCIÓN DE UN SISTEMA.-

Es el conjunto de valores que toman las incógnitas con la propiedad de verificar a cada una de las ecuaciones del sistema, y que estas soluciones si existen dependen de la cantidad de incógnitas, es decir:

1ro. Cuando el sistema tiene dos incógnitas, si existe solución será de la forma (x_1, x_2), que se denomina par ordenado.

2do. Cuando el sistema tiene tres incógnitas, si existe solución será de la forma (x_1, x_2, x_3) que se denomina terna ordenada.

3ro. En general si el sistema tiene n incógnitas una solución será de la forma $(x_1, x_2, ..., x_n)$, que se denomina n – ada ordenada.

17.6. CONJUNTO SOLUCIÓN: C.S.-

Al conjunto de todas las soluciones de un sistema se denomina conjunto solución del sistema y este es único.

17.7. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.-

Los sistemas de ecuaciones se clasifican de acuerdo a ciertas características: de acuerdo a la solución y de acuerdo al tipo de ecuaciones.

1ro. DE ACUERDO A LA SOLUCIÓN.- Los sistemas de ecuaciones de acuerdo a la solución se clasifican en compatibles o incompatibles dependiendo si existe o no solución.

i) SISTEMA COMPATIBLE.- Los sistemas compatibles son aquellos que al menos admiten una solución y que también se les llama sistemas consistente.

Los sistemas compatibles a su vez pueden ser: sistemas compatibles determinados y sistemas compatibles indeterminados.

a) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.- Es cuando presenta un número finito de soluciones, en estos sistemas se tiene igual número de ecuaciones así como de incógnitas.

Ejemplo.-

① $\begin{cases} 5x+6y=20 \\ 4x-3y=-23 \end{cases}$ este sistema tiene una sola solución $x=-2,\ y=5$. Luego el C.S = {(-2,5)}

② $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$ este sistema no lineal tiene dos soluciones

para $x=1,\ y=2 \Rightarrow (1,2)$

$x=2,\ y=1 \Rightarrow (2,1)$. Luego el C.S. = {(1,2),(2,1)}

b) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.-

Es cuando presenta un número infinito de soluciones, y esto ocurre por lo general cuando el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

Ejemplo.- $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x+4y+3z=11 \end{cases}$ es compatible indeterminado al eliminar z se tiene $y=2-x$

Para $x=1,\ y=1,\ z=2$

x = 2, y = 0, z = 3

.   .   .

.   .   .

Luego el C.S. = {(1,1,2),(2,0,3),...}

ii) SISTEMA INCOMPATIBLE.- Son aquellos sistemas que no admiten solución alguna y esto ocurre por lo general cuando el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas, a estos sistemas también se le llaman inconsistentes o absurdos.

En Resumen.-El sistema lineal $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

a) Tiene solución única si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

b) Tiene infinitas solución $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

c) No tiene solución $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Ejemplo.-

① $\begin{cases} 6x + 3y = 7 \\ 12x + 6y = 2 \end{cases}$ a la primera ecuación se multiplica por 2 y se obtiene $\begin{cases} 12x + 6y = 14 \\ 12x + 6y = 2 \end{cases}$, de donde 14 = 2 (absurdo) entonces el sistema no tiene solución.

② $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$, en R x R, despejando "y" de la segunda ecuación $y = 6 - x$ y reemplazamos en la primera ecuación: $x^2 + (6 - x)^2 = 4$ entonces $x^2 - 6x + 16 = 0$ lo cual no tiene solución en R, porque su discriminante es menor que cero.

2do. DE ACUERDO AL TIPO DE ECUACIONES.- De acuerdo al tipo de ecuación, los sistemas pueden ser lineales o no lineales.

i) **SISTEMAS LINEALES.-** Son aquellos sistemas formados por ecuaciones lineales y su nombre se debe a que estas ecuaciones en la geometría analítica representan a una recta.

Ejemplo.-

① $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ \sqrt{3}x+2y=1 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+2y-z=6 \\ x-4y+7z=5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 6x-y+3z=1 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ z+y-z+2w=1 \\ x-y+z-w=2 \end{cases}$

En general un sistema lineal se expresa así:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

ii) **SISTEMAS NO LINEALES.-** Son aquellos sistemas en donde por lo menos una de sus ecuaciones es no lineal.

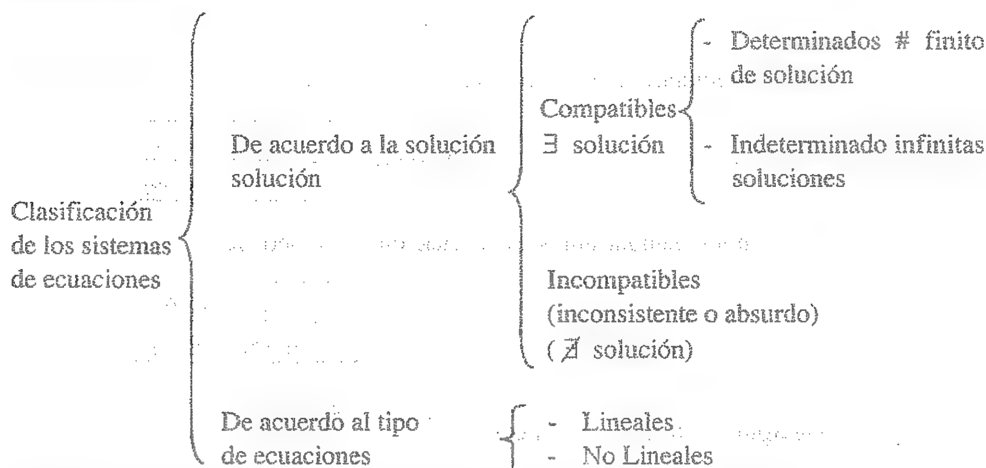
Ejemplos.-

① $\begin{cases} x^2+2xy-y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ sistemas polinomial de grado polinomial.

② $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2}+\dfrac{3y}{y-3}=4 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ sistema algebraico no polinomial.

③ $\begin{cases} \log_2 x-\log_2^2 x=2 \\ x.\log_3 y=4 \end{cases}$ sistema no algebraico (trascendentes).

RESUMEN



17.8. MÉTODOS PARA RESOLVER UN SISTEMA LINEAL.-

Los sistemas de ecuaciones lineales han sido resueltos por diversos métodos, nosotros estudiaremos los más importantes.

1) SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.-

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \quad ...(1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \quad ...(2) \end{cases} \quad ... (\alpha)$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son números reales, x e y son las incógnitas.

Resolveremos estos sistemas por los siguientes métodos.

1er. **MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.-** Este método consiste en despejar de una de las ecuaciones el valor de una de las incógnitas en términos de la otra incógnita y el resultado se reemplaza en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita, el valor obtenido de esta ecuación se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema para obtener el valor de la otra incógnita, es decir de la ecuación (1), si $a_{12} \neq 0$, despejamos y.

$$y=\frac{b_1-a_{11}x}{a_{12}}$$

al reemplazar en la ecuación (2) se obtiene:

$$a_{21}x+a_{22}(\frac{b_1-a_{11}x}{a_{12}})=b_2 \quad \text{de donde} \quad \boxed{x=\frac{a_{12}b_2-a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}}$$

ahora reemplazamos en la ecuación (1) se obtiene:

$$a_{11}(\frac{a_{12}b_2-a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}})+a_{12}y=b_1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{a_{21}b_1-a_{11}b_2}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}}$$

Ejemplo.- Resolver el sistema $\begin{cases} 3x+4y=8 & \dots (1) \\ 8x-9y=-77 & \dots (2) \end{cases}$

Desarrollo

Despejamos una cualquiera de las incógnitas, por ejemplo y, en una de las ecuaciones, despejamos de la ecuación (2) 9y = 8x + 77 de donde $y=\frac{8x+77}{9}$

Este valor de y se sustituye en la ecuación (1)

$3x+4(\frac{8x+77}{9})=8$, resolviendo esta ecuación 27x + 32x + 308 = 72

59x = 72 – 308, simplificando 59x = -236 de donde $x=-\frac{236}{59}=-4$ $\therefore$ x = -4

reemplazando x = -4, en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene: 3(-4) + 4y = 8 $\Rightarrow$ -12 + 4y = 8

4y = 20 de donde y = 5 **Rpta.** $\begin{cases} x=-4 \\ y=5 \end{cases}$

2do. MÉTODO POR IGUALACIÓN O COMPARACIÓN.-

Este método consiste en despejar el valor de la misma incógnita de ambas ecuaciones para luego igualarlas, obteniéndose una ecuación con una incógnita, el valor obtenido de esta ecuación se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema para determinar el valor de la otra incógnita.

Es decir: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & ...(1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & ...(2) \end{cases}$

De (1), si $a_{11} \neq 0$, despejamos y $\therefore \quad y = \dfrac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}}$

De (2), si $a_{22} \neq 0$, despejamos y $\therefore \quad y = \dfrac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}}$

Igualando estos resultados:

$$\frac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}} = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} \text{ de donde } \boxed{x = \frac{b_2a_{12} - b_1a_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}}$$

al reemplazar en la ecuación (2) se obtiene:

$$a_{21}\left(\frac{b_2a_{12} - b_1a_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}\right) + a_{22}y = b_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}}$$

Ejemplo.- Resolver el sistema $\begin{cases} 7x + 9y = 42 & ...(1) \\ 12x + 10y = -4 & ...(2) \end{cases}$

Desarrollo

Despejamos una cualquiera de las incógnitas: por ejemplo y en ambas ecuaciones

Despejamos "y" en (1); $9y = 42 - 7x$ de donde $y = \dfrac{42 - 7x}{9}$

Despejamos "y" en (2); $10y = -4 - 12x$, de donde $y = \dfrac{-4 - 12x}{10}$

Ahora se igualan entre si los dos valores de "y" que hemos obtenido:

$$\frac{42 - 7x}{9} = \frac{-4 - 12x}{10}$$

de donde se obtiene una sola ecuación con una incógnita;

Resolviendo la ecuación $10(42 - 7x) = 9(-4 - 12x)$

420 – 70x = -36 – 108x ⇒ 108x – 70x = -36 – 420 ⇒ 38x = -456 de donde x = -12

reemplazando este valor de "x" en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene: 7(-12) + 9y = 42 de donde 9y = 42 + 84

9y = 126 por lo tanto y = 14. Luego la respuesta es $\begin{cases} x=-12 \\ y=14 \end{cases}$

3er. MÉTODO DE LAS SUMAS O RESTAS (REDUCCIÓN).-

El método consiste en multiplicar cada una de las ecuaciones del sistema por un factor no nulo que son los coeficientes de la incógnita que se va ha eliminar, para luego sumarla o restarla con la finalidad de eliminar a dicha incógnita, el valor obtenido de esta incógnita se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema para determinar el valor de la otra incógnita.

Es decir: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 & \dots (1) \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 & \dots (2) \end{cases}$

A la ecuación (1) multiplican por a_{22} y a la ecuación (2) multiplicamos por $-a_{12}$, es decir: $\begin{cases} a_{11}a_{22}x+a_{12}a_{22}y=b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x-a_{12}a_{22}y=-b_2a_{12} \end{cases}$

sumando miembro a miembro se tiene:

$$a_{11}a_{22}x-a_{21}a_{12}x=b_1a_{22}-b_2a_{12} \Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$\therefore \boxed{x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}=\frac{b_2a_{12}-b_1a_{22}}{a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}}}$$

al reemplazar en la ecuación (2) se obtiene el valor de y.

$$a_{21}\left(\frac{b_2a_{12}-b_1a_{22}}{a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}}\right)+a_2y=b_2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{a_{21}b_1-a_{11}b_2}{a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}}}$$

Ejemplo.- Resolver el sistema $\begin{cases} 18x+5y=-11 & \dots (1) \\ 12x+11y=31 & \dots (2) \end{cases}$

Desarrollo

A la ecuación (1) multiplicamos por 11 y a la ecuación (2) lo multiplicamos por -5, es decir: $198x + 55y = -121$

$-60x - 55y = -155$, sumando miembro a miembro

$$138x = -276 \quad \text{de donde} \quad x = -\frac{276}{138} = -2$$

al reemplazar el valor de x en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la ecuación (1) se tiene: $18(-2) + 5y = -11$, de donde $5y = -11 + 36$

$5y = 25 \Rightarrow y = 5$. Luego la respuesta es $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

17.9. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.-

Veremos geométricamente cuando se tiene solución única, infinitas soluciones o que el sistema sea inconsistente. Esto lo veremos mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.- Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

Desarrollo

Sumando las dos ecuaciones $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$ entonces $2x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 6}$

El valor de $x = 6$, reemplazamos en $x + y = 5$

$6 + y = 5$, de donde $\boxed{y = -1}$ luego el par es $(6,-1)$ satisface al sistema y vemos que es el único par de números que verifican a las dos ecuaciones, por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única.

Ejemplo 2.- Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$

Desarrollo

Se observa que estas dos ecuaciones son equivalentes y para ver esto es suficiente multiplicar la primera ecuación por 2 y se obtiene la segunda ecuación $2x - 2y = 14$.

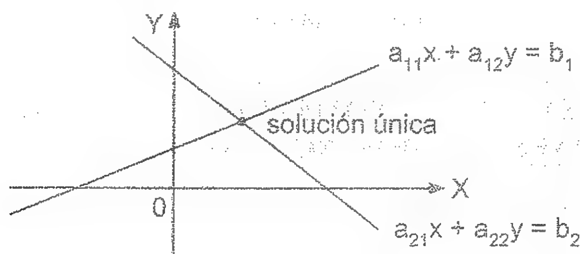
Luego $x - y = 7$, entonces $y = x - 7$, por lo tanto el par $(x, x - 7)$ es una solución del sistema para cualquier número real x, es decir que el sistema tiene infinitas soluciones por ejemplo $(7,0), (1,-6), (-1,-8), (-2,-9), \ldots$

Ejemplo 3.- Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - y = 7 & ...(1) \\ 2x - 2y = 13 & ...(2) \end{cases}$

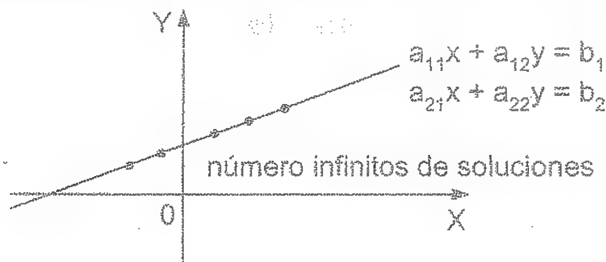
Desarrollo

A la primera ecuación multiplicamos por 2, es decir: $2x - 2y = 14$, esta ecuación contradice a la segunda ecuación por lo tanto el sistema no tiene solución.

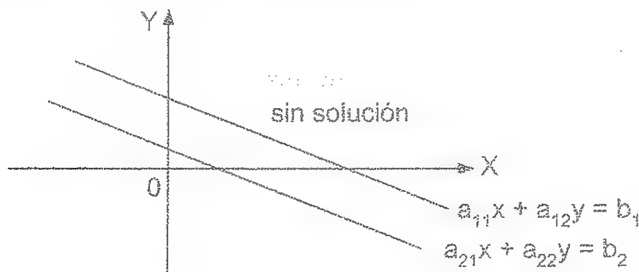
Del ejemplo 1 mostrado se deduce que si las rectas no son paralelas se interceptan en un sólo punto, en este caso el sistema tiene solución única.



Del ejemplo 2 si las rectas son paralelas y coincidentes sus intersecciones es un número infinito de puntos, en este caso el sistema tiene infinitas soluciones.



Del ejemplo 3 si las rectas son paralelas y distintas, en este caso no tiene punto de intersección, por lo tanto el sistema no tiene solución.



17.10. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS.-

Consideremos el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad \ldots (\beta)$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, son números reales x, y, z, son las incógnitas.

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se puede obtener aplicando cualquiera de los métodos estudiados tales como, el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción mediante el criterio siguiente:

1ro. Se combina dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas y con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

2do. Se combina la tercera ecuación con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.

3ro. Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se han obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.

4to. Los valores de las incógnitas obtenidas se sustituyen en una de las ecuaciones dadas de tres incógnitas, con la cual se halla la tercera incógnita.

Ejemplo.- Resolver el sistema $\begin{cases} 3x+2y+z=8 & \ldots (1) \\ 4x-3y-z=2 & \ldots (2) \\ x+y-z=12 & \ldots (3) \end{cases}$

Desarrollo

Combinando (1) y (2) para eliminar z

$$\begin{array}{r} 3x+2y+z=8 \\ 4x-3y-z=2 \\ \hline \end{array}$$

sumando $7x-y=10$ ... (4)

combinamos la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas, vamos a combinar con (1) para eliminar z.

$$\begin{array}{r} 3x+2y+z=8 \\ x+y-z=12 \\ \hline \end{array}$$

sumando $4x+3y=20$ ... (5)

ahora tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido (4) y (5) y formamos un sistema

$$\begin{cases} 7x-y=10 & \text{... (4)} \\ 4x+3y=20 & \text{... (5)} \end{cases}$$

resolviendo este sistema, eliminamos y, multiplicamos por 3 a la ecuación (4)

$$\begin{array}{r} 21x-3y=30 \\ 4x+3y=20 \\ \hline \end{array}$$

sumando $25x=50$ de donde $x=\frac{50}{25}=2$ $\boxed{\therefore\ x=2}$

reemplazando $x=2$ en la ecuación (5) se tiene:

$$4(2)+3y=20 \text{ de donde } 3y=12 \qquad \boxed{\therefore\ y=4}$$

reemplazando $x=2$, $y=4$ en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene: $3(2)+2(4)+z=8 \Rightarrow 6+8+z=8$ de donde $z=-6$

Luego la respuesta es: $\boxed{x=2,\ y=4,\ z=-6}$

17.11. EL MÉTODO DE ARTHUR CAYLEY.-

Este método consiste en resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando las matrices (matriz inversa), este método fue desarrollado por el Matemático Ingles Arthur Cayley (1821 – 1895) y en reconocimiento a su aporte científico dicho método lleva su nombre.

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

al sistema de ecuaciones dadas, lo expresaremos en forma matricial $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

$\boxed{AX = B}$ de donde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

La solución del sistema se obtiene: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Luego por la igualdad de matrices se tiene la solución.

Ejemplo.- Resolver el sistema: $\begin{cases} 7x + 9y = 42 \\ 12x + 10y = -4 \end{cases}$

Desarrollo

Expresando al sistema en forma matricial: $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ -4 \end{bmatrix}$, despejando

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 42 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{70-108}\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 42 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{38}\begin{bmatrix} 420+36 \\ -504-28 \end{bmatrix} = -\frac{1}{38}\begin{bmatrix} 456 \\ -532 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{456}{38} \\ \frac{532}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

como $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 14 \end{bmatrix}$, por igualdad de matrices se tiene x = -12; y = 14 que es la solución ahora veremos para el caso en que el sistema tiene tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \ldots (\beta)$$

al sistema de ecuaciones dadas expresamos en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{AX = B}$, de donde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

La solución del sistema se obtiene: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Luego por igualdad de matrices se tiene la solución.

Ejemplo.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

Desarrollo

Expresando el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}, \text{ despejando } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

calculando la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ mediante la matriz adjunta

$$CA = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -18 & -18 \\ 6 & 11 & 1 \\ 6 & 1 & 11 \end{bmatrix}, \text{ por matriz de cofactor}$$

$$|A| = [12 \quad -18 \quad -18][2 \quad -1 \quad -1] = 24 + 18 + 18 = 60$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{|A|}(CA)^t = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{60} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}+\frac{11}{10}+\frac{11}{10} \\ -\frac{12}{10}+\frac{121}{60}+\frac{11}{60} \\ -\frac{12}{10}+\frac{11}{60}+\frac{121}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego por igualdad de matrices se tiene: $x = 3$; $y = 1$; $z = 1$ que es la solución del sistema.

17.12. MÉTODO DE GABRIEL CRAMER.-

Este método consiste en resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando los determinantes, este método fue desarrollado por el matemático Suizo Gabriel Cramer (1704 – 1752) y en reconocimiento a su aporte científico dicho método lleva su nombre. Este método se aplica a los sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y el determinante de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero, veremos el método de Cramer para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad \ldots (\alpha)$$

calculando el determinante de los coeficientes $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

calculando los determinantes de las incógnitas, que se obtienen combinando los coeficientes de la incógnita por los términos independientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Luego la solución viene dado por: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 18-(-20) = 18+20 = 38$$

calculando los determinantes de las incógnitas

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = -27-(-65) = -27+65 = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 78-(-36) = 78+36 = 114$$

La solución del sistema es dado por: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{38}{38} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{114}{38} = 3$

Luego el conjunto solución $C.S = \{(1,3)\}$

En forma similar veremos para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \ldots (\beta)$$

calculando el determinante de los coeficientes: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

calculando los determinantes delas incógnitas, que se obtiene combinando los coeficientes de las incógnitas por los términos independientes.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Luego la solución viene dado por:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \; ; \; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \; ; \; z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x+7y+5z=-2 \\ 6x+3y+7z=6 \\ x-y+9z=-21 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes del sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix} \overset{+}{4} & \overset{-}{7} & \overset{+}{5} \\ 6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \end{vmatrix}=4(27+7)-7(54-7)+5(-6-3)=136-329-45=136-374=-238$$

calculando los determinantes de las incógnitas

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \overset{+}{-2} & \overset{-}{7} & \overset{+}{5} \\ 6 & 3 & 7 \\ -21 & -1 & 9 \end{vmatrix}=-2(27+7)-7(54+147)+5(-6+63)$$

$$=-68-1407+285=-1475+285=-1190$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} \overset{+}{4} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{5} \\ 6 & 6 & 7 \\ 1 & -21 & 9 \end{vmatrix}=4(54+147)-(-2)(54-7)+5(-126-6)$$

$$=804+94-660=898-660=238$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} \overset{+}{4} & \overset{-}{7} & \overset{+}{-2} \\ 6 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -21 \end{vmatrix}=4(-63+6)-7(-126-6)-2(-6-3)$$

$$=-228+924+18=-228+942=714$$

La solución del sistema es dado por:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-1190}{-238}=5\,,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{238}{-238}=-1\,,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{714}{-238}=-3$$

Luego el conjunto solución es: C.S = {(5,-1,-3)}

17.13. MÉTODO DE GAUSS.-

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando el método de Gauss se hace de la siguiente forma:

1ro. Se escribe una tabla formada por los elementos de la matriz A de los coeficientes del sistema (colocando en el lado izquierdo de la línea vertical) y la matriz de los términos independientes b (colocando al lado derecho de la línea vertical), es decir:

$$\left[\, A \mid b \,\right]$$

2do. Se efectúa las operaciones elementales de filas en ambas matrices de la tabla hasta que la matriz A se convierta en una matriz identidad I, la matriz b se convierte en la solución del sistema.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones por el método de Gauss $\begin{cases} 18x+5y=-11 \\ 12x+11y=31 \end{cases}$

Desarrollo

Formando la tabla con la matriz de los coeficientes del sistema $A=\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$ y la matriz de los términos independientes $b=\begin{bmatrix} -11 \\ 31 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 18 & 5 & -11 \\ 12 & 11 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to f_1 - f_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & -42 \\ 12 & 11 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to f_2 - 2f_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & -42 \\ 0 & 23 & 115 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to \frac{1}{23} f_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & -42 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to f_1 + 6f_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to \frac{1}{6} f_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \\ x & y & \end{array}$$

El conjunto solución es C.S = {(-2,5)}

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$$

Desarrollo

Formando la tabla con la matriz A de los coeficientes del sistema $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y la matriz de los términos independientes $b=\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|cl} 5 & -1 & -1 & 0 & \longrightarrow f_1-4f_2 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & \\ 4 & 3 & 2 & 16 & \longrightarrow f_3-4f_2 \\ \hline 1 & -9 & -13 & -56 & \\ 1 & 2 & 3 & 14 & \longrightarrow f_2-f_1 \\ 0 & -5 & -10 & -40 & \\ \hline 1 & -9 & -13 & -56 & \\ 0 & 11 & 16 & 70 & \longrightarrow f_2+2f_3 \\ 0 & -5 & -10 & -40 & \longrightarrow -\frac{1}{5}f_3 \\ \hline 1 & -9 & -13 & -56 & \\ 0 & 1 & -4 & -10 & \\ 0 & 1 & 2 & 8 & \longrightarrow f_3-f_2 \\ \hline 1 & -9 & -13 & -56 & \\ 0 & 1 & -4 & -10 & \\ 0 & 0 & 6 & 18 & \longrightarrow \frac{1}{6}f_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & -13 & -56 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longrightarrow f_1+13f_3 \\ \longrightarrow f_2+4f_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longrightarrow f_1+9f_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

de donde $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$
x y z

el conjunto solución es C.S. = {(1,2,3)}

17.14. MÉTODO DE ROUCHE – FROBENIUS.-

Este método se aplica a los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas y para esto consideremos el sistema lineal.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \ldots (\alpha)$$

donde $A = [a_{ij}]$ es la matriz de los coeficientes del sistema (α) es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$X = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es la matriz de las incógnitas

$B = [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ es la matriz de los términos independientes

$A_a : [A \vdots b]$, es la matriz aumentada, es decir: $A_a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

ahora consideremos las siguientes propiedades:

① Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (α) sea consistente, es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz aumentada. Es decir: el sistema (α) es consistente $\Leftrightarrow r(A) = r(A_a)$.

② Si el sistema (α) es consistente, se presentan los siguientes casos:

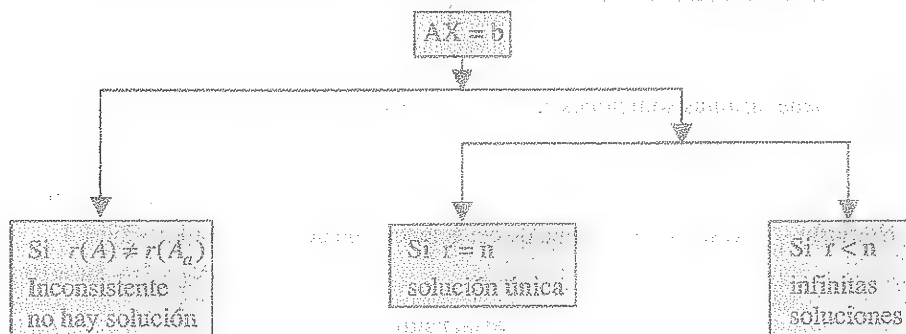
a) Que el sistema (α) tenga una única solución esto ocurre cuando el número de incógnitas del sistema es igual al rango de la matriz aumentada, es decir: el sistema (α) tiene solución única si $r(A) = r(A_a) = n$.

b) Que el sistema (α) tenga más de una solución (existen infinitas soluciones) esto ocurre cuando el número de incógnitas del sistema (α) es mayor que el rango de la matriz aumentada, es decir: El sistema (α) tendrá infinitas soluciones si $r(A) = r(A_a) = k < n$.

OBSERVACIÓN.- Si k < n, entonces (n − k) variables o incógnitas del sistema (α) toman valores arbitrario, estas variables o incógnitas que toman valores arbitrarios se conocen con el nombre de variables libres, variables independientes o parámetros.

③ Si el rango de la matriz de los coeficientes es distinto del rango de la matriz aumentada, en este caso se dice que el sistema (α) es inconsistente, es decir: Si $r(A) \neq r(A_a)$ entonces el sistema (α) es inconsistente (no existe solución).

Ahora veremos una representación grafica.



Ejemplo.- Para que valores de a, b el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$

Tiene: **a)** solución única **b)** No tiene solución

c) Infinitas soluciones.

Desarrollo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & b \\ 5 & -8 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \longrightarrow f_1-f_3, \text{ restar a la fila } f_1 \text{ la fila } f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1-a & b+1 \\ 5 & -8 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \longrightarrow f_2-5f_1, \text{ restar a la fila } f_2 \text{ cinco veces la fila } f_1 \\ \longrightarrow f_3-2f_1, \text{ restar a la fila } f_3 \text{ dos veces la fila } f_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1-a & b+1 \\ 0 & 7 & 5a+4 & -5b-2 \\ 0 & 7 & 3a-2 & -2b-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow f_3-f_2, \text{ restar a la fila } f_3 \text{ la fila } f_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1-a & b+1 \\ 0 & 7 & 5a+4 & -5b-2 \\ 0 & 0 & -2a-6 & 3b-1 \end{array}\right)$$

a) solución única: Si $r(A)=r(A_a)=3 \iff a\neq -3$

b) No tiene solución si $a=-3$ y $b\neq \frac{1}{3}$

c) Tiene infinitas soluciones si $a=-3$ y $b=\frac{1}{3}$

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y-3z-4w=6 \\ x+3y+z-2w=4 \\ 2x+5y-2z-5w=10 \end{cases}$

Desarrollo

$$\begin{array}{cccc|cl}
1 & 2 & -3 & -4 & 6 & \\
1 & 3 & 1 & -2 & 4 & \longrightarrow f_2 - f_1 \text{ , restar de } f_2 \text{ la fila } f_1 \\
2 & 5 & -2 & -5 & 10 & \longrightarrow f_3 - 2f_1 \text{ , restar a la fila } f_3 \text{ dos veces la fila } f_1 \\
\hline
1 & 2 & -3 & -4 & 6 & \\
0 & 1 & 4 & 2 & -2 & \\
0 & 1 & 4 & 3 & -2 & \longrightarrow f_3 - f_2 \text{ , restar a } f_3 \text{ una vez la fila } f_2 \\
\hline
1 & 2 & -3 & -4 & 6 & \\
0 & 1 & 4 & 2 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

como $r(A) = r(A_a) = 3$ entonces el sistema es consistente pero como r(A) = 3 < 4 (número de incógnitas) por lo tanto hay infinitas soluciones, y el número de variables libres es $4 - 3 = 1$

Luego $w = 0$, $y + z = -2 \Rightarrow y = -2 - z$

$$x + 2y - 3z = 6 \Rightarrow x = 3z - 2y + 6 = 3z + 4 + 2z - 6 \Rightarrow x = 5z + 10$$

Luego para $z = t$ se tiene: $\begin{cases} x = 10 + 5t \\ y = -2 - t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$, $t \in R$

17.15. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEO.-

Un sistema de ecuaciones lineales es homogénea cuando cada una de sus ecuaciones lineales el termino independiente es cero.

Ejemplo.- Los siguientes sistemas son homogéneos

① $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Consideremos un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \ldots (\gamma)$$

analizando el sistema de ecuaciones (γ) se tiene:

① El sistema (γ) siempre tiene por lo menos una solución (llamada solución trivial o impropias) de la forma $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ por lo tanto es consistente. Luego $r(A) = r(A_a)$.

② Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (γ) tenga más de una solución es que r(A) = k < n, donde n es el número de incógnitas. En este caso el sistema también posee soluciones diferentes de la solución trivial las cuales son llamadas soluciones no triviales o propia, para hallar estas soluciones se aplica el método que se usa en el caso de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneos.

③ Si en el sistema (γ) se tiene m = n (número de ecuaciones = número de incógnitas), entonces una condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga soluciones no triviales es que | A | = 0, puesto que en este caso r(A) < n, para el caso de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, la solución es única: x = y = z = 0

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, el sistema se reduce a dos ecuaciones independientes, la tercera seria combinaciones lineal de ellos, o a una sola ecuación, las otras dos seria diferentes, en ambos casos el sistema homogéneo tendría infinitas soluciones y seria $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} t\,,\quad y=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} t\,,\quad z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} t$$

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-3y=0 \\ 5x+y=0 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes del sistema

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=1-(-15)=16\neq 0$, por lo tanto el sistema tiene solución trivial x= 0, y= 0

Ejemplo.- Resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x-y-3z=0 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes de las incógnitas del sistema.

$$\Delta=\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=1(3+2)-(-3-2)+(-1+1)=10\neq 0$$

por lo tanto el sistema tiene solución única, la trivial x = y = z = 0

Ejemplo.- Resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} x+3y=0 \\ 3x+9y=0 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes de las incógnitas del sistema

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=9-9=0$, por lo tanto el sistema es compatible indeterminando (infinitas soluciones)

La solución se obtiene reduciendo el sistema a una sola ecuación x + 3y = 0 ⟹ x = -3y entonces la solución es de la forma.

(x,y) = (-3y,y) = y(-3,1), y ∈ R una solución no trivial es (-3,1)

Ejemplo.- Resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} 5x+3y-3z=0 \\ 3x-y-z=0 \\ x-5y+z=0 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes de las incógnitas del sistema.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1-5)-3(3+1)-3(-15+1)=0,$$ por lo tanto el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) la resolución se obtiene mediante el siguiente procedimiento se toma dos de las ecuaciones: $\begin{cases} 5x+3y-3z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases}$

se elimina una de las incógnitas y se despeja de las dos que quedan una en función de la otra, y esto se consigue multiplicando la 2da ecuación por 3 y se tiene:

$\begin{cases} 5x+3y-3z=0 \\ 9x-3y-3z=0 \end{cases}$, sumando se tiene: $14x-6z=0$ de donde $z=\frac{7x}{3}$

ahora reemplazando $z=\frac{7x}{3}$ en la ecuación $x-5y+z=0$

$x-5y+\frac{7x}{3}=0$ de donde $y=\frac{2x}{3}$

Luego la solución es: $(x,y,z)=(x,\frac{2x}{3},\frac{7x}{3})=\frac{x}{3}(3,2,7)=t(3,2,7)$

$\therefore$ C.S $=\{t(3,2,7)\ /\ t\in R\}$

17.16. RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES.-

Los sistemas de ecuaciones no lineales son aquellos donde al menos una de las ecuaciones no es lineal, también se conoce como sistemas de ecuaciones de segundo grado y de grado superior.

Se tiene una gran variedad de este tipo de sistemas, siendo las más usuales los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siendo una de ellas lineal y la otra de segundo grado cuya solución se obtiene despejando una de las incógnitas de la ecuación lineal y luego se reemplaza en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación de una incógnita.

también se tiene sistemas de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas y cuya solución se obtiene mediante una transformación para lograr una ecuación con una incógnita.

En forma similar para los sistemas de tres ecuaciones o más con tres o más incógnitas que se resolverán utilizando transformaciones adecuadas para llegar a uno de los casos antes mencionados.

A continuación abordaremos los casos más usuales o importantes.

1ro. CUANDO EL SISTEMA PRESENTA UNA SUMA Y UN PRODUCTO.-

Para esta forma se sistemas de ecuaciones, se sugiere construir una ecuación de segundo grado en la cual sus soluciones reflejan las soluciones del sistema, esto ilustraremos mediante un ejemplo.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=9 & \dots (1) \\ xy=15 & \dots (2) \end{cases}$

Desarrollo

Formando la ecuación de segundo grado: $t^2+at+b=0$ ... (α)

donde x e y son las raíces en la variable t

Luego por las propiedades de las raíces de una ecuación.

$$\begin{cases} x+y=-a=9 \\ xy=b=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=15 \end{cases} \quad \dots (\beta)$$

al reemplazar (β) en (α) se tiene: $t^2-9t+15=0$

de donde $t=\dfrac{9\pm\sqrt{81-60}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{2}$, por lo tanto

$t_1 = \frac{9+\sqrt{21}}{2}$, $t_2 = \frac{9-\sqrt{21}}{2}$; la solución para el sistema será la asignación así:

$t_1 = \frac{9+\sqrt{21}}{2} = x$, $t_2 = \frac{9-\sqrt{21}}{2} = y$ o también $t_2 = \frac{9-\sqrt{21}}{2} = x$, $t_1 = \frac{9+\sqrt{21}}{2} = y$

ambas parejas de soluciones cumplen y que verifican al sistema.

OTRA FORMA DE DESARROLLO

$$\begin{cases} x+y=9 & \dots (1) \\ xy=15 & \dots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) despejamos una de las incógnitas por ejemplo y = 9 – x, que reemplazando en la ecuación (2) se tiene: xy = x(9 – x) = 15, de donde $x^2 - 9x + 15 = 0$, cuya solución es:

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-60}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$, que reemplazando en y = 9 – x se tiene $y = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$

obsérvese que: cuando $x = \frac{9+\sqrt{21}}{2}$, a "y" le corresponde $y = \frac{9-\sqrt{21}}{2}$, de igual manera cuando $x = \frac{9-\sqrt{21}}{2}$, a "y" le corresponde $y = \frac{9+\sqrt{21}}{2}$

2do. SISTEMAS CUADRÁTICOS QUE COMPRENDEN UNA ECUACIÓN LINEAL.-

La solución para este tipo de sistemas de ecuaciones se obtiene mediante sustitución sucesivas hasta obtener una ecuación con una incógnita, este criterio ilustraremos en el presente ejemplo.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2 + 11y^2 = 45 & \dots (1) \\ x+y=3 & \dots (2) \end{cases}$

Desarrollo

De la ecuación (2) despejamos y = 3 – x, y que al reemplazar en la ecuación (1) se tiene:

$x^2 + 11(3-x)^2 = 45$, efectuando la operación $x^2 + 99 - 66x + 11x^2 = 45$, simplificando

$2x^2-11x+9=0$, ahora factorizamos (2x – 9(x – 1) = 0, de donde $x = 1$, $x=\frac{9}{2}$

para $x = 1$, $y = 3 - 1 = 2$ entonces (1,2)

$x=\frac{9}{2}$, $y=3-\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}$ entonces $(\frac{9}{2},-\frac{3}{2})$

Luego el conjunto solución es $\{(1,2),(\frac{9}{2},-\frac{3}{2})\}$

3ro. SISTEMAS CUADRÁTICOS QUE COMPRENDEN ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2+by^2=c$, DONDE x e y SON LAS INCÓGNITAS.-

La solución de este tipo de sistemas de ecuaciones se obtiene en forma similar a los sistemas lineales.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x^2-2y^2=-6 & \dots (1) \\ 7x^2-2y^2=10 & \dots (2) \end{cases}$

<u>**Desarrollo**</u>

A la ecuación (1) se multiplica por -1

$$-3x^2+2y^2=6$$

sumando $\underline{7x^2-2y^2=10}$

$$4x^2=16 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad \text{de donde } x=\pm 2$$

reemplazando $x = \pm 2$ en la ecuación (2) se tiene:

$7(4)-2y^2=10$ de donde $y^2=9$ entonces $y=\pm 3$

Luego el conjunto solución es: {(2,3),(2,-3),(-2,3),(-2,-3)}

4to. SISTEMA DE ECUACIONES QUE PRESENTA UNA SUMA DE CUADRADOS Y UN PRODUCTO.-

Para obtener la solución de este tipo de sistema de ecuaciones se trata de obtener una relación que involucre a una ecuación lineal, ilustraremos este criterio mediante un ejemplo.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \dots(1) \\ xy=2 & \dots(2) \end{cases}$

Desarrollo

A la ecuación (2) se multiplica por 2

$$x^2+y^2=5$$

sumando $\underline{\quad 2xy=4 \quad}$

$x^2+2xy+y^2=9$, se tiene un trinomio cuadrado perfecto

$(x+y)^2=9$, ahora extrayendo la raíz cuadrada $\boxed{x+y=\pm 3}$

Si $x+y=3$, entonces $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ estamos en el 1er caso

Luego despejamos "y" de la ecuación $x+y=3 \Rightarrow y=3-x$

Ahora reemplazamos en la ecuación $xy=2$, es decir:

$xy=x(3-x)=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$, factorizando $(x-2)(x-1)=0$ de donde $x=2$, $x=1$

si $x=2$, $y=1$ de donde $(2,1)$ es solución

si $x=1$, $y=2$ de donde $(1,2)$ es solución

Si $x+y=-3$, entonces $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$, estamos en el primer caso

Luego despejamos "y" de la ecuación $x+y=-3 \Rightarrow y=-3-x$

Ahora reemplazamos en la ecuación $xy=2$, es decir:

$xy=x(-3-x)=2 \Rightarrow x^2+3x+2=0$, factorizando

$(x+2)(x+1)=0$ de donde $x=-1$, $x=-2$

si $x=-1$, $y=-3+1=-2$, entonces $(-1,-2)$ es solución

si $x=-2$, $y=-3+2=-1$, entonces $(-2,-1)$ es solución

Luego el conjunto solución es $\{(2,1),(1,2),(-1,-2),(-2,-1)\}$

5to. SISTEMA DE ECUACIONES CUADRÁTICOS HOMOGÉNEOS.-

Son los sistemas en donde sus ecuaciones son de la forma $ax^2+bxy+cy^2=d$, y para obtener la solución se hace el cambio y = mx, con lo cual se obtiene una ecuación en términos de m, ilustraremos este criterio mediante un ejemplo.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 & \dots (1) \\ 6x^2+xy-y^2=50 & \dots (2) \end{cases}$

Desarrollo

De acuerdo al criterio indicado y = mx ... (3)

Reemplazando en las ecuaciones (1) y (2) se tiene: $\begin{cases} 2x^2+3mx^2+m^2x^2=70 \\ 6x^2+mx^2-m^2x^2=50 \end{cases}$

simplificando y despejando x^2 se tiene:

$$\begin{cases} (2+3m+m^2)x^2=70 \\ (6+m-m^2)x^2=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{70}{2+3m+m^2} & \dots (4) \\ x^2=\dfrac{50}{6+m-m^2} & \dots (5) \end{cases}$$

de donde $\dfrac{70}{2+3m+m^2}=\dfrac{50}{6+m-m^2} \Rightarrow 7(6+m-m^2)=5(2+3m+m^2)$

$$42+7m-7m^2=10+15m+5m^2 \Rightarrow 12m^2+8m-32=0$$

$$3m^2+2m-8=0 \Rightarrow (3m-4)(m+2)=0 \Rightarrow m=-2,\ m=\frac{4}{3}$$

si m = -2, reemplazando en (4) se tiene: $x^2=\dfrac{70}{2-6+4}=\dfrac{70}{0},\ \nexists$

si $m=\dfrac{4}{3}$, reemplazando en (4), se tiene: $x^2=\dfrac{70}{2+4+\frac{16}{9}}=\dfrac{70}{\frac{54+16}{9}}=\dfrac{630}{70}=9 \Rightarrow x=\pm 3$

ahora reemplazamos en (3), $y=\dfrac{4}{3}(\pm 3)=\pm 4$

Luego el conjunto solución es $\{(3,4),(-3,-4)\}$

6to. CASOS VARIADOS DE SISTEMA DE ECUACIONES.-

En este tipo de sistema de ecuaciones se trata de combinar las ecuaciones con ayuda de los productos notables.

Ilustraremos en este caso con los siguientes ejemplos.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 & \dots (1) \\ x+xy+y=3 & \dots (2) \end{cases}$

Desarrollo

Sumando la ecuación (1) y (2) se tiene:

$x^2+2xy+y^2+x+y=6$, lo que es lo mismo escribir así

$(x+y)^2+(x+y)-6=0$, al factorizar se obtiene

$(x+y+3)(x+y-2)=0 \Rightarrow x+y+3=0 \lor x+y-2=0$

si $x+y+3=0 \Rightarrow x+y=-3$, al reemplazar en la ecuación (2)

$x+xy+y=3$ se tiene $-3+xy=3 \Rightarrow \boxed{xy=6}$

además como $x+y=-3 \Rightarrow y=-3-x$ que reemplazamos en la ecuación $xy=6$ es decir: $xy=x(-3-x)=6 \Rightarrow x^2+3x+6=0$

mediante la formula de la ecuación cuadráticas se tiene: $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-24}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}i}{2}$

si $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}i}{2}$, $y_1=-3-\dfrac{-3+\sqrt{15}i}{2}=\dfrac{-3-\sqrt{15}i}{2}$

$x_2=\dfrac{-3-\sqrt{15}i}{2}$, $y_2=-3-\dfrac{-3-\sqrt{15}i}{2}=\dfrac{-3+\sqrt{15}i}{2}$

si $x+y-2=0 \Rightarrow x+y=2$, al reemplazar en la ecuación (2)

$x+xy+y=3$ se tiene $2+xy=3 \Rightarrow \boxed{xy=1}$

como $x+y=2 \Rightarrow y=2-x$ que reemplazamos en la ecuación $xy=1$; es decir:

$xy = x(2-x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0$

de donde $x = 1,\ y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow x = 1, y = 1$

Luego el conjunto solución es: $\{(\frac{-3+\sqrt{15}i}{2}, \frac{-3-\sqrt{15}i}{2}), (\frac{-3-\sqrt{15}i}{2}, \frac{-3+\sqrt{15}i}{2}), (1,1)\}$

17.17. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Si x e y son números reales positivos y se tiene que: $\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 18 \\ 9x - 4y = 108 \end{cases}$. Hallar el valor de x + y.

a) 34 b) 28 c) 24 d) 13 e) 25

Desarrollo

$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 18 & \dots (1) \\ 9x - 4y = 108 & \dots (2) \end{cases}$, el sistema de ecuaciones dada

a la ecuación (2) $9x - 4y = 108$, expresamos en la forma

$(3\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2 = 108$, por diferencia de cuadrados se tiene:

$$(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 108 \qquad \dots (3)$$

reemplazando (1) en (3) se tiene: $18(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 108$ de donde $3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 6$

pero $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 18$

$3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 6$, sumando ambos miembros

$6\sqrt{x} = 24$ entonces $\sqrt{x} = 4$ de donde $x = 16, y = 9$

por lo tanto $x + y = 16 + 9 = 25$, la respuesta es **e**

② Si $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$; $x + y = 20$; $x > 10$ entonces $\frac{x}{y}$, $y > 0$ es:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

Desarrollo

Transformado el sistema de ecuaciones, mediante la sustitución $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$ de donde $x=a^2$, $y=b^2$, que reemplazando en las ecuaciones dadas se tiene:

$$\begin{cases} a-b=2 & \ldots (1) \\ a^2+b^2=20 & \ldots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) $a-b=2$ se tiene $b=a-2$

que reemplazando en la ecuación (2) obtenemos $a^2+(a-2)^2=20$ desarrollando se tiene

$a^2-2a-8=0$, factorizando $(a-4)(a+2)=0$ de donde $a=4$, $a=-2$

se considera $a=4$ puesto que $x=a^2=16>10$

como $b=a-2=4-2=2$ de donde $b=2$

entonces $\begin{matrix} x=a^2=4^2=16 \\ y=b^2=2^2=4 \end{matrix}$ de donde $\frac{x}{y}=\frac{16}{4}=4$, por lo tanto la respuesta es **c**

③ ¿Qué valor debe tener "a" para que "x" sea igual a "y" en el siguiente sistema?
$$\begin{cases} ax+4y=119 \\ 5x-ay=34 \end{cases}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Resolvemos el sistema mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 119 & 4 \\ 34 & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 4 \\ 5 & -a \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & 119 \\ 5 & 34 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 4 \\ 5 & -a \end{vmatrix}}, \text{ por condición } x=y$$

de donde $\begin{vmatrix} 119 & 4 \\ 34 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 119 \\ 5 & 34 \end{vmatrix}$, desarrollando $-119a-136=34a-595$, simplificando

$153a = 459$ de donde $a = \frac{459}{153} = 3$, la respuesta es **c**

(4) **Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, para qué valor de "r" el sistema no tiene solución** $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ rx + 3y = 7 \end{cases}$

a) 3 **b)** 2 **c)** 5 **d)** $-\frac{4}{5}$ **e)** $-\frac{6}{5}$

Desarrollo

Un sistema sin solución es un sistema absurdo, el cual posee la siguiente condición $\Delta = 0$, es decir el determinante de los coeficientes del sistema debe ser igual a cero, es decir:

$|\Delta| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ r & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5r = 0$ de donde $r = -\frac{6}{5}$, la respuesta es **e**

(5) Para qué valores de m el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 7y = m \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$, tiene soluciones positivas.

a) $\frac{26}{3} \le m \le \frac{91}{5}$ **b)** $\frac{26}{3} < m \le \frac{91}{5}$ **c)** $\frac{26}{3} \le m \le \frac{91}{3}$

d) $\frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$ **e)** $9 < m < 1$

Desarrollo

Las incógnitas x e y lo obtendremos mediante la regla de Cramer

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m & 7 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5m - 91}{10 - 21} = \frac{91 - 5m}{11} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{26 - 3m}{10 - 21} = \frac{3m - 26}{11}$$

de la condición del problema se tiene que $x > 0$ y $y > 0$

$$x = \frac{91-5m}{11} > 0 \Rightarrow m < \frac{91}{5} \quad \text{... (1)}$$

$$y = \frac{3m-26}{11} > 0 \Rightarrow m > \frac{26}{3} \quad \text{... (2)}$$

Luego de (2) y (1) se tiene: $\frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$, la respuesta es **d**

(6) En el sistema: $\begin{cases} x-2y=b-2 \\ 2x+y=b+1 \end{cases}$ ¿Cuál es el valor de b, para tener x = 3y?

a) 8 b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 2

Desarrollo

Como el sistema es: $\begin{cases} x-2y=b-2 & \text{... (1)} \\ 2x+y=b+1 & \text{... (2)} \end{cases}$

Como la condición es x = 3y reemplazamos en (1) y (2)

$$\begin{cases} 3y-2y=b-2 \\ 6y+y=b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=b-2 \\ y=\frac{b-1}{7} \end{cases} \Rightarrow b-2=\frac{b+1}{7}$$

$7b-14=b+1 \Rightarrow 6b=15 \Rightarrow b=\frac{5}{2}$, como $b=\frac{5}{2}$, la respuesta es **d**

(7) En el sistema $\begin{cases} 3xa+7y=1 \\ 2xa+5y=2 \end{cases}$. Hallar los valores de "a" para que el sistema sea compatible determinado.

a) $a<0$ b) $a>0$ c) $a\neq 0$ d) $a=3$ e) $a\neq 3$

Desarrollo

Un sistema de ecuaciones es compatible determinado si el determinante de sus coeficientes es diferente de cero, es decir: $\begin{vmatrix} 3a & 7 \\ 2a & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ de donde $15a-14a\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$

Por lo tanto la respuesta es **c**

(8) Determinar el valor de k para que el sistema $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ 3x+ky+z=0 \end{cases}$ sea indeterminado.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Desarrollo

Un sistema lineal homogéneo es indeterminado si el determinante de sus coeficientes es igual a cero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-5} & \overset{+}{3} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-k)-(-5)(1-3)+3(k+3)=0$$

de donde $-2-2k-10+3k+9=0$ entonces $k=3$, por lo tanto la respuesta es **b**

(9) Determinar el valor de k para que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (k+1)x+y=3 \\ 2x+(k-1)y=1 \end{cases}$, sea compatible.

a) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ b) 3, -3 c) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ d) 2, -2 e) 1, -1

Desarrollo

El sistema de ecuaciones lineales es incompatible si $\frac{k+1}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{3}{1}$ de donde

$$\frac{k+1}{2}=\frac{1}{k-1} \Rightarrow k^2-1=2 \Rightarrow k^2=3$$

como $k^2=3$ entonces $k=\sqrt{3}$ o $k=-\sqrt{3}$ y como con estos valores cumple que $\frac{k+1}{2}\neq 3$, $\frac{1}{k-1}\neq 3$, por lo tanto los valores que debe tomar k para que el sistema sea incompatibles $k=\sqrt{3}$ o $k=-\sqrt{3}$, luego la respuesta es **a**

(10) Determinar los valores de m y n para que el sistema $\begin{cases} mx+3y=10 \\ 20x+12y=n \end{cases}$, sea incompatible.

a) m = 3, n ≠ 30 b) m = 5, n ≠ 40 c) m = n = 2

d) m = 2, n ≠ 2 e) m = 7, n = 5

Desarrollo

Se sabe que un sistema lineal es incompatible si se cumple:

$\frac{m}{20}=\frac{3}{12}\neq\frac{10}{n}$ de donde se tiene que: $\frac{m}{20}=\frac{3}{12}$ y $\frac{3}{12}\neq\frac{10}{n}$ entonces

$m=\frac{20(3)}{12}$ y $3n\neq 120 \Rightarrow m=5$ y $n\neq 40$, por lo tanto la respuesta es **b**

(11) Resolver el sistema siguiente $\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=2 \\ z+x=18 \end{cases}$ y dar como respuesta E = xyz

a) 285 b) -285 c) 385 d) -385 e) 155

Desarrollo

Del sistema dado: $\begin{cases} x+y=6 & \dots (1) \\ y+z=2 & \dots (2) \\ z+x=18 & \dots (3) \end{cases}$ sumando

2x + 2y + 2z = 26 de donde se tiene: x + y + z = 13 ... (4)

(2) en (4): x + 2 = 13 ⇒ x = 11

(3) en (4): y + 18 = 13 ⇒ y = -5

(1) en (4): 6 + z = 13 ⇒ z = 7

reemplazando los valores: xyz = (11)(-5)(7) = -385, la respuesta es **d**

(12) El sistema dado: $\begin{cases} (m+1)x+(m+8)y=7 \\ 3x+my=3 \end{cases}$ será indeterminado para $m=m_1$, e incompatible para $m=m_2$, el valor de $E=4m_1+5m_2$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

El sistema lineal dado es indeterminado si se cumple

$$\frac{m+1}{3}=\frac{m+8}{m}=\frac{7}{3} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} \dfrac{m+1}{3}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{m+8}{m}=\dfrac{7}{3} \end{cases} \quad \text{entonces} \quad m=6=m_1$$

el sistema lineal dado es incompatible si se cumple

$$\frac{m+1}{3}=\frac{m+8}{m}\neq\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{m+1}{3}=\frac{m+8}{m} \quad \text{entonces} \quad m^2-2m-24=0$$

$(m-6)(m+4)=0$ de donde $m=6$, $m=-4$

Luego para $m=-4$, se cumple $\frac{m+1}{3}\neq\frac{7}{3}$, $\frac{m+8}{m}\neq\frac{7}{3}$ por lo tanto $m=-4=m_2$

Calculando $E=4m_1+5m_2=4(6)+5(-4)=24-20=4$

Por lo tanto la respuesta es **b**

(13) Calcular el valor de E = a + p de tal manera que el sistema $\begin{cases}(a-1)x+4y=10 \\ 2x+(p+1)y=5\end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

El sistema lineal dado, tiene infinitas soluciones si es Indeterminado y para esto debe cumplirse

$$\frac{a-1}{2}=\frac{4}{p+1}=\frac{10}{5} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{10}{5} \\ \dfrac{4}{p+1}=\dfrac{10}{5} \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} a=5 \\ p=1 \end{cases}$$

Luego $E=a+p=5+1=6$, la respuesta es **c**

(14) Hallar el valor positivo de m para que el sistema $\begin{cases} mx+(1-m)y+z=0 \\ (1+m)x+my+2z=0 \\ (1-m)x+(1+m)y+3z=0 \end{cases}$, tenga mas de una solución.

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{1}{5}$

Desarrollo

Como el sistema es homogéneo, entonces para obtener mas de una solución de cumplir que $\Delta = 0$, es decir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1-m & 1 \\ 1+m & m & 2 \\ 1-m & 1+m & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} m & 1-m & 1 \\ 1-m & 3m-2 & 0 \\ 1-4m & -2+4m & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} 1-m & 3m-2 \\ 1-4m & 4m-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-m & 3m-2 \\ 1-4m & 4m-2 \end{vmatrix} = (1-m)(4m-2)-(3m-2)(1-4m)$$

$$= (-4m^2+6m-2)-(-12m^2+11m-2) = 8m^2-5m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{5}{8}$$

por lo tanto la respuesta es **b**

(15) Si el sistema $\begin{cases} (\lambda-2)x+y=2 \\ 6x+(\lambda-1)y=6 \end{cases}$ es indeterminado, hallar el valor de λ.

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4 e) 6

Desarrollo

Calculando el determinante de los coeficientes se tiene:

$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 6 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-6=0$ de donde $\lambda^2-3\lambda-4=0$, factorizando

$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$ entonces $\lambda = 4$; $\lambda = -1$

Si $\lambda = 4$, $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$ son paralelas coincidentes, entonces tiene infinitas soluciones (indeterminado)

Si $\lambda = -1$, $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$ son paralelas no coincidentes, no tiene solución

Por lo tanto la respuesta es **c**

(16) Para qué valores de "m" el sistema: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$ no tiene solución.

a) 4 **b)** $m \neq 2$ **c)** $m \neq -3$, $m \neq 0$ **d)** $m \neq 3$ **e)** -2

Desarrollo

El sistema lineal no tiene solución si se cumple

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{-3m} \neq \frac{1}{2m+3} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{m} = \dfrac{m}{-3m} = -\dfrac{1}{3} \ \text{ de donde } \ m = -3 \\ \dfrac{m}{-3m} \neq \dfrac{1}{2m+3} \ \text{ de donde } \ m \neq -3 \ ; \ m \neq 0 \end{cases}$$

para $m \neq -3$ se cumple la condición dada, por lo tanto la respuesta es **c**

(17) Si $y > 1$, hallar la suma de valores enteros de λ en el sistema lineal $\begin{cases} 2x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x + y = 2 \end{cases}$

a) -2 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 4 **e)** 6

Desarrollo

Aplicando la regla de cramer se tiene: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{\lambda - 2\lambda}{2 - \lambda^2} = \dfrac{-\lambda}{2 - \lambda^2}$

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{4 - \lambda^2}{2 - \lambda^2} > 1$ entonces se tiene:

$\frac{(4-\lambda^2)-(2-\lambda^2)}{2-\lambda^2}>0$, simplificando se tiene:

$\frac{4-\lambda^2-2+\lambda^2}{2-\lambda^2}>0$ entonces $\frac{2}{2-\lambda^2}>0$, de donde se tiene:

$2-\lambda^2>0 \Rightarrow \lambda^2<2 \Rightarrow -\sqrt{2}<\lambda<\sqrt{2} \Rightarrow \lambda$: -1,0,1

y la suma es: -1 + 0 + 1 = 0. Por lo tanto la respuesta es **b**

(18) Hallar el conjunto de valores de "a" para que el sistema $\begin{cases}(2-a)x-y+z=0\\ 2x-(a+1)y+(a+1)z=0\\ -ax-y-z=0\end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

a) {0} b) {-1} c) {0,-1} d) {0,1} e) {1}

Desarrollo

Como el sistema es homogéneo, entonces tendrá infinitas soluciones si el determinante de los coeficientes es cero.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2-a & -1 & 1\\ 2 & -(a+1) & a+1\\ -a & -1 & -1\end{vmatrix}=0,$$ mediante propiedades de determinantes se tiene:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2-a & -1 & 1\\ 2 & -(a+1) & a+1\\ -a & -1 & -1\end{vmatrix}\overset{-1}{=}\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & -(a+1) & a+1\\ -a & -1 & -1\end{vmatrix}\overset{-1}{=}\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & -(a+1) & a-1\\ -a & -1 & a-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}(2)\begin{vmatrix}-(a+1) & a-1\\ -1 & a-1\end{vmatrix}=2[-(a^2-1)+(a-1)]=2(-a^2+a)=0$$

de donde $a^2-a=0$ factorizando $a(a-1)=0$ entonces $a=0$, $a=1$

Luego el conjunto de valores de a es {0,1}, por lo tanto la respuesta es **d**

(19) Determinar la relación entre a y b para que el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ ax+by=5b \\ 5x-3y=7 \end{cases}$, tenga solución única.

a) a = 5b b) a = 3b c) a = 2b d) a = 4b e) a = b

Desarrollo

Del sistema dado: $\begin{cases} x+y=3 & \dots (1) \\ ax+by=5b & \dots (2) \\ 5x-3y=7 & \dots (3) \end{cases}$

De las ecuaciones (1) y (3) se tiene:

$\begin{cases} x+y=3 \\ 5x-3y=7 \end{cases}$ entonces $\begin{matrix} 3x+3y=9 \\ 5x-3y=7 \end{matrix}$, sumando 8x = 16 de donde $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

ahora los valores obtenido reemplazamos en (2) es decir como ax + by = 5b entonces

2a + b = 5b ⇒ 2a = 4b de donde a = 2b, por lo tanto la respuesta es **c**

(20) Calcular el valor de E = xyz, del sistema lineal $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 3x-4y+z=9 \\ 5x+2y+3z=9 \end{cases}$

a) -4 b) -2 c) 0 d) 2 e) 4

Desarrollo

Para calcular los valores de x, y, z, aplicamos la regla de cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1, 3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = -(55+11) = -66$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 9 & -4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3, 3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 11 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-3)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -3(0+22) = -66$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 9 & 0 & -2 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(11)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 11(6-0) = 66$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 9 & 5 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-3)\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = -3(99-55) = -132$$

Luego $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-66}{-66} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{66}{-66} = -1$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-132}{-66} = 2$

Luego E = xyz = (1)(-1)(2) = -2, la respuesta es **b**

(21) Resolver el sistema $\begin{cases} x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = 27 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$. Luego calcular $x^2 + 2y$

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) -1

Desarrollo

Del sistema dado: $\begin{cases} x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = 27 & \dots (1) \\ 3x + 2y = 7 & \dots (2) \end{cases}$

De la ecuación $\underbrace{x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3}_{} = 27$

$$(x+2y)^3 = 27 \quad \text{de donde} \quad x + 2y = 3$$

Luego con la ecuación (2) formamos el siguiente sistema:

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ entonces $\begin{array}{l} -x - 2y = -3 \\ 3x + 2y = 7 \end{array}$ sumando 2x = 4 de donde x = 2, 2y = 1

$\therefore \quad x^2 + 2y = 4 + 1 = 5$, la respuesta es **a**

(22) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y dar el valor de xy: $\begin{cases} x - 5xy + y = 0 \\ 3x - 12xy + 2y = 0 \end{cases}$

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{8}$

Desarrollo

Al sistema dado expresamos en la forma:

$$\begin{cases} x+y=5xy & \dots (1) \text{ (multiplica por -2)} \\ 3x+2y=12xy & \dots (2) \end{cases}$$

$\begin{cases} -2x-2y=-10xy \\ 3x+2y=12xy \end{cases}$, sumando ambas ecuaciones $x = 2xy$ de donde $x - 2xy = 0$

$x(1-2y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = \frac{1}{2}$

si $x = 0$, $y = 0$ y si $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$. Luego $xy = 0$ o $xy = \frac{1}{6}$, la respuesta es **c**

(23) Hallar el valor mínimo de "b" de tal modo que el siguiente sistema de 2 ecuaciones tenga una sola solución: $\begin{cases} x^2+2y^2-4=0 \\ 2x-y+b=0 \end{cases}$

a) $-3\sqrt{3}$ b) $-3\sqrt{2}$ c) $-\sqrt{2}$ d) 0 e) $\sqrt{2}$

Desarrollo

$$\begin{cases} x^2+2y^2-4=0 & \dots (1) \\ 2x-y+b=0 & \dots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (2) $2x - y + b = 0$ se tiene $y = 2x + b$

que reemplazamos en la ecuación (1): $x^2+2(2x+b)^2-4=0$, desarrollando se tiene:

$x^2+2(4x^2+4bx+b^2)-4=0c$, simplificando $9x^2+8bx+2b^2-4=0$, esta ecuación tiene una solución si el discriminante es cero, es decir:

$\Delta=(8b)^2-4(9)(2b^2-4)=0$, efectuando se tiene:

$64b^2-72b^2+144=0 \Rightarrow 8b^2=144 \Rightarrow b^2=18$ de donde $b=3\sqrt{2} \vee b=-3\sqrt{2}$ el valor mínimo de b es $-3\sqrt{2}$, luego la respuesta es **b**

(24) Hallar el valor de m en el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2+mxy=2 \\ x+y=8 \end{cases}$ para que la diferencia de soluciones de x sea igual a $2\sqrt{14}$

a) -19 b) 19 c) 29 d) -29 e) 17

Desarrollo

Sea $\begin{cases} x^2+y^2+mxy=2 & \text{... (1)} \\ x+y=8 & \text{... (2)} \end{cases}$

De la ecuación (2) x + y = 8 de donde y = 8 – x, reemplazamos en (1)

$x^2+(8-x)^2+mx(8-x)=2$, simplificando se tiene:

$(2-m)x^2+(8m-16)x+62=0$, $m \neq 2$

de la relación entre las raíces y los coeficientes se tiene:

$x_1+x_2=-\dfrac{8m-16}{2-m}=\dfrac{8(m-2)}{(m-2)}=8 \Rightarrow \boxed{x_1+x_2=8}$

$x_1.x_2=\dfrac{62}{2-m}$, aplicando la identidad de Legendre se tiene:

$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2$ donde $\boxed{x_1-x_2=2\sqrt{14}}$

ahora reemplazamos $x_1+x_2=8$ y $x_1-x_2=2\sqrt{14}$ en la ultima ecuación

$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2$ es decir $8^2-(2\sqrt{14})^2=4(\dfrac{62}{2-m}) \Rightarrow 64-56=\dfrac{248}{2-m}$

$8=\dfrac{248}{2-m} \Rightarrow 1=\dfrac{31}{2-m} \Rightarrow$ 2 – m = 31 de donde m = -29

por lo tanto la respuesta es $\boxed{d}$

(25) La suma de todas las "x" mas la suma de todas las "y" que satisfacen al sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x^2+3y^2+x-2y=20 \\ 2x^2+2y^2+5x+3y=9 \end{cases}$ es:

a) 1 b) 0 c) 2 d) -1 e) -2

Desarrollo

Sea $\begin{cases} 3x^2+3y^2+x-2y=20 & \text{... (1) (multiplicando por 2)} \\ 2x^2+2y^2+5x+3y=9 & \text{... (2) (multiplicando por -3)} \end{cases}$

$$6x^2+6y^2+2x-4y=40$$

$$-6x^2-6y^2-15x-9y=-27 \text{, sumando}$$

$$-13x-13y=13, \text{ simplificando}$$

$x+y=-1$ entonces $y=-x-1$, reemplazando en (1)

$3x^2+3(-x-1)^2+x-2(-x-1)=20$, simplificando

$3(2x^2+3x-5)=0$ factorizando se tiene: $(2x+5)(x-1)=0$ de donde $x=-\frac{5}{2} \vee x=1$

para $x_1=1$, $y_1=-1-1=-2$; para $x_2=-\frac{5}{2}$, $y_2=\frac{3}{2}$

calculando la suma: $x_1+x_2+y_1+y_2=1-\frac{5}{2}-2+\frac{3}{2}=-2$

por lo tanto la respuesta es **e**

26 Luego de resolver el sistema $\begin{cases} x^2+y^2+6xy=153 \\ 2x^2+2y^2-3xy=36 \end{cases}$ indique el valor de $|x-y|$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

$\begin{cases} x^2+y^2+6xy=153 & \text{... (1)} \\ 2x^2+2y^2-3xy=36 & \text{... (2) (multiplicando por 2)} \end{cases}$

$$x^2+y^2+6xy=153$$

$$4x^2+4y^2-6xy=72 \text{, sumando}$$

$5x^2+5y^2=225$ de donde $x^2+y^2=45$

como $x^2+y^2+6xy=153$ entonces $45+6xy=153 \Rightarrow 2xy=36$; como $x^2+y^2=45$

de donde $x^2+y^2-2xy=45-2xy \Rightarrow (x-y)^2=45-36$ entonces

$(x-y)^2=9 \Rightarrow |x-y|=3$ por lo tanto la respuesta es **b**

(27) La suma de todos los valores para x e y y que satisfacen el sistema $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=41$; $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=901$ es:

a) $\frac{40}{390}$ b) $\frac{82}{390}$ c) $\frac{80}{390}$ d) $\frac{72}{390}$ e) $\frac{41}{390}$

Desarrollo

En el sistema: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=41\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=901\end{cases}$, hacemos $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$

Obteniéndose: $\begin{cases}a+b=41 & \ldots(1)\\ a^2+b^2=901 & \ldots(2)\end{cases}$

De la ecuación (1) $a+b=41$ despejamos $b=41-a$

Que reemplazamos en (2): $a^2+(41-a)^2=901$, simplificando

$2(a^2-41a+390)=0$, factorizando se tiene: $(a-26)(a-15)=0$ de donde $a=26$, $a=15$

si $a=26$, $b=41-26=15 \Rightarrow x_1=\frac{1}{26}$, $y_1=\frac{1}{15}$

$a=15$, $b=41-15=26 \Rightarrow x_2=\frac{1}{15}$, $y_2=\frac{1}{26}$

sumando $x_1+x_2+y_1+y_2=\frac{1}{26}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{26}=\frac{2}{15}+\frac{1}{13}=\frac{82}{390}$

por lo tanto la respuesta es **b**

(28) Sean x_0; y_0 las soluciones positivas del siguiente sistema de ecuaciones $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}$; $x^2-y^2=7$, entonces el valor de $2x_0+3y_0$ es:

a) 15 b) 17 c) 18 d) 19 e) 12

Desarrollo

Del sistema: $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12} & \dots (1) \\ x^2-y^2=7 & \dots (2) \end{cases}$

En la ecuación (1) hacemos $a=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{a}$

Como $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}$ entonces $a+\frac{1}{a}=\frac{25}{12}$ entonces

$12a^2-25a+12=0$ factorizando se tiene:

$(3a-4)(4a-3)=0$ de donde $a=\frac{4}{3} \vee a=\frac{3}{4}$

si: $a=\frac{x}{y}=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{4x}{3}$ reemplazando en (2)

$x^2-\frac{16x^2}{9}=7$ se observa que $x \notin R$ puesto que $x^2-\frac{16x^2}{9}=-\frac{7x^2}{9}=7$

luego si $a=\frac{4}{3}=\frac{x}{y} \Rightarrow y=\frac{3x}{4}$ reemplazando en (2)

$x^2-\frac{9x^2}{16}=7$ entonces $x^2=16$ de donde $x=4 \vee x=-4$

si $x=4$, $y=3$ son las soluciones positivas

Luego $2x_0+3y_0=2(4)+3(3)=8+9=17$, la respuesta es **b**

(29) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones: $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{a+b}{a-b}$; $xy=ab(a^2+b^2)$, entonces el valor de $\sqrt{2}(x-y)$ es igual a:

a) $(a-b)^2$ b) $(a+b)^2$ c) $2(a-b)^2$ d) $2(a+b)^2$ e) a – b

Desarrollo

Se tiene: $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{a+b}{a-b} & \text{... (1)} \\ xy=ab(a^2+b^2) & \text{... (2)} \end{cases}$

De la ecuación (1) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$, aplicando la propiedad de proporciones:

Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$, simplificando

$\frac{x}{y}=\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}$ de donde $2abx=y(a^2+b)^2$ por lo tanto $x=\frac{y(a^2+b^2)}{2ab}$ ... (3)

ahora reemplazamos (3) en (2) obteniéndose

$xy=ab(a^2+b^2)$ entonces $\frac{y(a^2+b^2)}{2ab}y=ab(a^2+b^2)$

$y^2=2a^2b^2$ de donde $y=\sqrt{2}ab$

$x=y(\frac{a^2+b^2}{2ab})=\sqrt{2}ab(\frac{a^2+b^2}{ab}) \Rightarrow x=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}}$

como nos piden $\sqrt{2}(x-y)=\sqrt{2}(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}ab)=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$\therefore \sqrt{2}(x-y)=(a-b)^2$ la respuesta es **a**

(30) Sea la terna (a,b,c) solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 7x+4y-4z=7 \\ 7y+5z=12 \\ 11y+8z=19 \end{cases}$, entonces la suma a + b + c es igual a:

a) -3 b) -2 c) 1 d) 2 e) 3

Desarrollo

Tenemos el sistema $\begin{cases} 7x+4y-4z=7 & \text{... (1)} \\ 7y+5z=12 & \text{... (2)} \\ 11y+8z=19 & \text{... (3)} \end{cases}$

De la ecuación (2) se tiene: $z=\frac{12-7y}{5}$, reemplazando en la ecuación (3)

$11y+8(\frac{12-7y}{5})=19$, efectuando: $55y + 96 - 56y = 95$ simplificando $y = 1$ y $z = 1$

Como $7x + 4y - 4z = 7$ entonces $7x + 4 - 4 = 7$ de donde $x = 1$

Luego $a = b = c = 1$ de donde $a + b + c = 1 + 1 + 1 = 3$, por lo tanto la respuesta es **e**

(31) Dado el sistema: $\begin{cases} x^2+4y^2=25 \\ x+2y=7 \end{cases}$ si $2y > x$, entonces el valor de $\frac{x}{y}$ es:

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{8}{3}$ e) 3

Desarrollo

Tenemos el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=25 & \text{... (1)} \\ x+2y=7 & \text{... (2)} \end{cases}$

De la ecuación (2) se tiene $y=\frac{7-x}{2}$, reemplazando en (1)

$x^2+4(\frac{7-x}{2})^2=25$ simplificando $x^2-7x+12=0$, factorizando

$(x-4)(x-3)=0$ de donde $x_1=3 \vee x_2=4$

como $y=\frac{7-x}{2}$ entonces $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=4$, $y_2=\frac{3}{2}$

por condición $2y > x$, $2(2) > 3$ si se cumple

$$2(\frac{3}{2}) > 4 \quad (\rightarrow/\leftarrow) \text{ no cumple}$$

Luego para $x_1=3$, $y_1=2$ se tiene $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, la respuesta es **b**

(32) Hallar el valor de x en el sistema de ecuaciones $\begin{cases}(a+c)x+(a+b)z-(b+c)x=2a^3\\(a+b)z+(b+c)x-(a+c)y=2b^3\\(b+c)x+(a+c)y-(a+b)z=2c^3\end{cases}$

a) b^2-bc+c^2 b) b^2-bc+a^2 c) a^2-ac+c^2

d) a^2-ab+b^2 e) ab + bc – ac

Desarrollo

Como $\begin{cases}(a+c)x+(a+b)z-(b+c)x=2a^3 & \text{... (1)}\\(a+b)z+(b+c)x-(a+c)y=2b^3 & \text{... (2)}\\(b+c)x+(a+c)y-(a+b)z=2c^3 & \text{... (3)}\end{cases}$

Ahora sumamos (1), (2) y (3) obteniendo

$(a+c)x+(b+c)x+(a+b)z=2a^3+2b^3+2c^3$ ... (4)

de la ecuación (1) $(a+c)x+(a+b)z=(b+c)x+2a^3$ ... (5)

ahora reemplazamos (5) en (4)

$(b+c)x+2a^3+(b+c)x=2a^3+2b^3+2c^3$

$2(b+c)x=2b^3+2c^3$ de donde $x=\frac{b^3+c^3}{b+c}$

Luego $x=\dfrac{b^3+c^3}{b+c}=\dfrac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b+c}=b^2-bc+c^2$

Por lo tanto la respuesta es **a**

(33) Dado el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=58 \\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=2.9 \end{cases}$. Hallar el mayor valor de x

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

Como $\begin{cases} x^2+y^2=58 & \dots (1) \\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=2.9 & \dots (2) \end{cases}$

De la ecuación (2) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=2.9$

$(x+y)^2+(x-y)^2=2.9(x+y)(x-y)$, efectuando

$$x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2=\frac{29}{10}(x^2-y^2) \Rightarrow 2x^2+2y^2=\frac{29}{10}(x^2-y^2)$$

$$20x^2+20y^2=29x^2-29y^2 \Rightarrow 49y^2=9x^2$$

$y^2=\dfrac{9x^2}{49}$ que reemplazamos en la ecuación (1)

$x^2+\dfrac{9x^2}{49}=58$ de donde $\dfrac{58x^2}{49}=58 \Rightarrow x^2=49$

de donde $x=\pm 7$ el mayor valor es $x=7$, por lo tanto la respuesta es **c**

(34) ¿Qué valor debe darse a "m" para que el sistema: $\begin{cases} y+mx=2 \\ x+y=10 \\ x+my=3 \end{cases}$, admite solución única?

a) 2 b) $-\frac{1}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{3}$ e) 1

Desarrollo

Como $\begin{cases} y+mx=2 & \dots (1) \\ x+y=10 & \dots (2) \\ x+my=3 & \dots (3) \end{cases}$

Al sumar (1) y (3) se tiene: $y + mx + x + my = 5$

de donde $y(m + 1) + x(m + 1) = 5$, agrupando $(x + y)(m + 1) = 5$ ... (4)

ahora reemplazamos (2) en (4) obteniéndose

$10(m + 1) = 5$ de donde $m = -\frac{1}{2}$, la respuesta es **b**

(35) Resolver el sistema $\begin{cases} 12(x+y)=5xy \\ 18(y+z)=5yz \\ 36(x+z)=13xz \end{cases}$ y dar como respuesta el valor de $E = 4x + y - z$.

a) 13 b) 11 c) 9 d) 7 e) 5

Desarrollo

Al sistema de ecuaciones dado, expresamos en la forma.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12} \\ \frac{y+z}{yz}=\frac{5}{18} \\ \frac{x+z}{xz}=\frac{13}{36} \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12} & \dots (1) \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18} & \dots (2) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{13}{36} & \dots (3) \end{cases}$$

ahora sumamos las tres ecuaciones (1), (2) y (3)

$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{5}{12}+\frac{5}{18}+\frac{13}{36}$, simplificando se tiene:

$$2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=\frac{38}{36} \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36} \qquad \ldots (4)$$

reemplazando (2) en (4) $\frac{1}{x}+\frac{5}{18}=\frac{19}{36}$ de donde $x = 4$

reemplazando (3) en (4) $\frac{13}{36}+\frac{1}{y}=\frac{19}{36}$ de donde $y = 6$

reemplazando (1) en (4) $\frac{5}{12}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36}$ de donde $z = 9$

calculando $E = 4x + y - z = 16 + 6 - 9 = 13$, la respuesta es **a**

(36) Resolver el sistema dado $\begin{cases} x+y=-8 \\ x-2y=7 \end{cases}$, mediante matrices y dar como respuesta el valor de $E = x + y$.

a) -5 b) -3 c) -8 d) 5 e) 6

Desarrollo

Al sistema dado expresamos en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{de donde} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \ldots (1)$$

ahora calculamos su inversa: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Luego $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ reemplazando en (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{16}{3}+\frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3}-\frac{7}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ de donde x = -3, y = -5

E = x + y = -3 – 5 = -8, la respuesta es **c**

(37) Después de resolver el sistema $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ x-2y=1 \end{cases}$ mediante matrices indicar el valor de E =xy

a) 5 b) 10 c) 7 d) 12 e) 15

Desarrollo

Al sistema de ecuaciones dado expresamos en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de donde } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-4-5}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}, \text{ ahora reemplazamos en (1)}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{9}+\frac{5}{9} \\ \frac{20}{9}-\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

como $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces x = 5, y = 2

y el valor de E = xy = (5)(2) = 10, la respuesta es **b**

(38) Calcular xyz al resolver: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

Al sistema de ecuaciones dado expresamos en la forma matricial

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 3\\ 3\end{bmatrix}, \text{ de donde } \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\ 3\\ 3\end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow CA=\begin{bmatrix}M_{11} & -M_{12} & M_{13}\\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23}\\ M_{31} & -M_{32} & M_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & -3 & 6\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}$

Además $|A| = 1+2+0=3$

$$A^{-}1=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{|A|}(CA)^t=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

ahora esto reemplazamos en la ecuación (1)

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3+2\\ 4-3+1\\ 0+6-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

como $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ de donde $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

por lo tanto la respuesta es $xyz = (1)(2)(3) = 6$, luego la respuesta es **c**

(39) Luego al resolver el sistema: $\begin{cases}2x-y+3z=1\\ 5x+4y-6z=7\\ x+5y+11z=8\end{cases}$ indicar el valor de $x+y+z$.

a) 2 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

Al sistema de ecuaciones dado expresamos en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ de donde } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 11 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ entonces $CA = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & -61 & 21 \\ 26 & 19 & -11 \\ -6 & 27 & 13 \end{bmatrix}$

Además $|A| = 2(74) - (1)(-61) + 3(21) = 148 + 61 + 63 = 272$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 11 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{272}(CA)^t = \frac{1}{272}\begin{bmatrix} 74 & -61 & 21 \\ 26 & 19 & -11 \\ -6 & 27 & 13 \end{bmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{272}\begin{bmatrix} 74 & 26 & -6 \\ -61 & 19 & 27 \\ 21 & -11 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{136} & \frac{13}{136} & -\frac{3}{136} \\ -\frac{61}{272} & \frac{19}{272} & \frac{27}{272} \\ \frac{21}{272} & -\frac{11}{272} & \frac{13}{272} \end{bmatrix}, \text{ reemplazando en (1)}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{136} & \frac{13}{136} & -\frac{3}{136} \\ -\frac{31}{272} & \frac{19}{272} & \frac{27}{272} \\ \frac{21}{272} & -\frac{11}{272} & \frac{13}{272} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{136} + \frac{91}{136} - \frac{24}{136} \\ \frac{61}{272} + \frac{133}{272} + \frac{216}{272} \\ \frac{21}{272} - \frac{77}{272} + \frac{104}{272} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{17} \\ \frac{18}{17} \\ \frac{3}{17} \end{bmatrix} \text{ de donde } x = \frac{13}{17}, \quad y = \frac{18}{17}, \quad z = \frac{3}{17}$$

calculando $x+y+z=\frac{13}{17}+\frac{18}{17}+\frac{3}{17}=\frac{34}{17}=2$, por lo tanto la respuesta es **a**

40 Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases}\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11} & \text{...(1)}\\ 3x-2y+5z=280 & \text{...(2)}\end{cases}$ y dar como respuesta E = 2x − y + z

a) 50 b) 60 c) 70 d) 80 e) 90

Desarrollo

Aplicando el criterio de razones iguales se tiene:

$\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11}=k$ de donde x = 5k, y = 7k, z = 11k

ahora esto reemplazamos en la ecuación (2) 56k = 280 $\Rightarrow k=\frac{280}{56}=5$

como k = 5 entonces x = 25, y = 35, z = 55

E = 2x − y + z = 50 − 35 + 55 = 70, la respuesta es **c**

41 Después de resolver las ecuaciones $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b-c}\\ \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}\end{cases}$ dar como respuesta E = x + y.

a) a + b + c b) a − b c) 2a d) 2b e) 2c

Desarrollo

Como $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b-c} & \text{... (1)}\\ \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c} & \text{... (2)}\end{cases}$

Aplicando la propiedad de proporciones a la ecuación (1):

$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ entonces $\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}$

$\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}=\frac{a+(b-c)}{a-(b-c)}$; simplificando $\frac{x}{y}=\frac{a+b-c}{a-b+c}$ de donde $x=(\frac{a+b-c}{a-b+c})y$

ahora reemplazamos en la ecuación (2)

$\frac{(\frac{a+b-c}{a-b+c})y+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}$, efectuando se tiene:

$(\frac{a+b-c}{a-b+c})(a+c)y+c(a+c)=(a+b)(y+b)$

$[(\frac{a+b-c}{a-b+c})(a+c)-(a+b)]y=b(a+b)-c(a+c)$

$\frac{(a+b-c)(a+c)-(a-b+c)(a+b)}{a-b+c}y=ab+b^2-ac-c^2$, operando

$\frac{a^2+ab-ac+ac+bc-c^2-a^2+ab-ac-ab+b^2-bc}{a-b+c}y=ab+b^2-ac-c^2$

$\frac{ab+b^2-ac-c^2}{a-b+c}y=ab+b^2-ac-c^2$, simplificando $\frac{y}{a+b+c}=1$ de donde y= a – b + c

como $x=\frac{a+b-c}{a-b+c}y=\frac{a+b-c}{a-b+c}(a-b+c)=a+b-c$

como x = a + b – c
y = a – b + c, sumando se tiene E = x + y = 2a , la respuesta es **c**

(42) Resolver el sistema $\begin{cases}\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=a\\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=b\end{cases}$, sabiendo que $a\neq b$ y dar como respuesta el valor de $E=x^2-y^2$.

a) $\frac{4}{a^2-b^2}$ b) ab c) a^2+b^2 d) $\frac{1}{a+b}$ e) $\frac{1}{a-b}$

Desarrollo

Como $\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=a & \text{... (1)}\\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x-y}=b & \text{... (2)}\end{cases}$ sumando ambos miembros

$$\frac{2}{x-y}=a+b\text{, de donde } x-y=\frac{2}{a+b} \qquad \text{... (3)}$$

al sistema dado escribimos en la forma: $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=a$

$-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x-y}=-b$, sumando ambos miembros

$$\frac{2}{x+y}=a-b\text{, de donde } x+y=\frac{2}{a-b} \qquad \text{... (4)}$$

ahora multiplicamos (3) y (4) miembro a miembro

$$(x-y)(x+y)=(\frac{2}{a+b})(\frac{2}{a-b})=\frac{4}{a^2-b^2}$$

$\therefore \quad E=x^2-y^2=\dfrac{4}{a^2-b^2}$, la respuesta es **a**

(43) Sabiendo que $(x_0;y_0;z_0;t_0)$ es el conjunto solución del sistema de ecuaciones:
$\begin{cases}\sqrt{5}(x+t)+\sqrt{7}(y+z)=\sqrt{210}\\ \sqrt{3}(y+t)+\sqrt{5}(z+x)=5\sqrt{6}\\ \sqrt{2}(z+t)+\sqrt{3}(x+y)=3\sqrt{10}\\ x+y+z+t=\sqrt{30}\end{cases}$. Luego halle: $16x_0.y_0.z_0.t_0$

a) -625 b) -900 c) -400 d) -100 e) -1600

Desarrollo

Como $\begin{cases} \sqrt{5}(x+t)+\sqrt{7}(y+z)=\sqrt{210} & \dots (1) \\ \sqrt{3}(y+t)+\sqrt{5}(z+x)=5\sqrt{6} & \dots (2) \\ \sqrt{2}(z+t)+\sqrt{3}(x+y)=3\sqrt{10} & \dots (3) \\ x+y+z+t=\sqrt{30} & \dots (4) \end{cases}$

De (4) se tiene: $x+t=\sqrt{30}-(y+z)$, se reemplaza en (1)

$\sqrt{5}(\sqrt{30}-(y+z))+\sqrt{7}(y+z)=\sqrt{210}$, simplificando $(y+z)=\sqrt{30}$ ... (5)

de (4) se tiene: $y+t=\sqrt{30}-(x+z)$, se reemplaza en (2)

$\sqrt{3}(\sqrt{30}-(x+z))+\sqrt{5}(z+x)=5\sqrt{6}$, simplificando $x+z=\sqrt{30}$ ... (6)

de (4) se tiene: $z+t=\sqrt{30}-(x+y)$, se reemplaza en (3)

$\sqrt{2}(\sqrt{30}-(x+y))+\sqrt{3}(x+y)=3\sqrt{10}$, simplificando $x+y=\sqrt{30}$ ... (7)

ahora reemplazamos (5) en (1) y se obtiene:

$\sqrt{5}(x+t)+\sqrt{7}\sqrt{30}=\sqrt{210}$ de donde $\sqrt{5}(x+t)+\sqrt{210}=\sqrt{210}$

al simplificar $\sqrt{5}(x+t)=0$ de donde $x = -t$

ahora sumamos (5), (6) y (7) y se obtiene:

$2x+2y+3z=3\sqrt{30}$ de donde $x+y+z=\frac{3}{2}\sqrt{30}$, que reemplazamos en (4)

$\frac{3}{2}\sqrt{30}+t=\sqrt{30}$ de donde $t=-\frac{\sqrt{30}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{30}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{30}}{2} \\ z=\frac{\sqrt{30}}{2} \end{cases}$

$\therefore \quad 16xyzt=16(-\frac{\sqrt{30}}{2})(\frac{\sqrt{30}}{2})(\frac{\sqrt{30}}{2})(\frac{\sqrt{30}}{2})=-900$, la respuesta es **b**

(44) Se tiene el sistema $\begin{cases}(\sqrt[3]{5}x)^3+(\sqrt{7}x)^2+9x+2=0\\(\sqrt[3]{5}y)^3+(\sqrt{7}y)^2+9y+2=0\\(\sqrt[3]{5}z)^3+(\sqrt{7}z)^2+9z+2=0\end{cases}$. Luego de resolver indique el valor numérico de (x + y + z + xyz)

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{9}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) -3 e) -2

Desarrollo

En el sistema dado efectuamos la operación dada

$$\begin{cases}(\sqrt[3]{5}x)^3+(\sqrt{7}x)^2+9x+2=0\\(\sqrt[3]{5}y)^3+(\sqrt{7}y)^2+9y+2=0\\(\sqrt[3]{5}z)^3+(\sqrt{7}z)^2+9z+2=0\end{cases} \text{ de donde } \begin{cases}5x^3+7x^2+9x+2=0 & \dots(1)\\5y^3+7y^2+9y+2=0 & \dots(2)\\5z^3+7z^2+9z+2=0 & \dots(3)\end{cases}$$

del sistema consideremos las ecuaciones en la variable t

$5t^3+7t^2+9t+2=0$, donde x,y,z son sus raíces

Luego por la relación entre coeficientes y sus raíces se tiene $x+y+z=-\frac{7}{5}$; $xyz=-\frac{2}{5}$,

por lo tanto al sumar se tiene: $x+y+z+xyz=-\frac{7}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{9}{5}$, la respuesta es **b**

(45) La media aritmética de 3 números es $\frac{3}{2}$. La relación entre el 1ro y 2do número es de 1 a 2 y la relación entre el 2do y 3ro número es de 1 a 3. El producto de dichos números es:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 3

Desarrollo

Sean $\begin{cases}x=\text{primer número}\\y=\text{segundo número}\\z=\text{tercer número}\end{cases}$; por condición del problema se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}=\dfrac{3}{2} & \ldots (1) \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2} & \ldots (2) \\ \dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{3} & \ldots (3) \end{cases}$$

de la ecuación (2) y (3) se tiene $y = 2x$, $z = 3y = 6x$ ... (4)

ahora reemplazamos (4) en (1) se tiene: $\dfrac{x+2x+6x}{3}=\dfrac{3}{2}$ de donde $\dfrac{9x}{3}=\dfrac{3}{2}$

entones $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$. Luego $xyz=\dfrac{3}{2}$, la respuesta es **b**

(46) Un industrial gasta diariamente 150,000 soles para el pago de los jornales de 40 operarios de una clase y 75 de otra, pero con el mismo gasto desea duplicar el número de operaciones de la primera clase y reducir a 25 los de la segunda. ¿Cuál será el nuevo jornal de un operario de cada clase?

a) 1500 y 1200 b) 150 y 120 c) 15000 y 12000

d) 940 y 1500 e) 1200 y 940

Desarrollo

Sean x = el jornal de la 1ra clase de operarios

y = el jornal de la 2da clase de operarios

Luego de la condición del problema se tiene: $40x + 75y = 150,000$ ... (1)

al duplicar los operarios de la 1ra clase y reduciendo los de la 2da

$$80x + 25y = 150,000 \quad \ldots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 40x+75y=150,000 \\ 80x+25y=150,000 \end{cases} \quad \ldots (\alpha)$$

resolviendo el sistema (α) por la regla de cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 150,000 & 75 \\ 150,000 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 75 \\ 80 & 25 \end{vmatrix}}=\frac{150,000(25-75)}{1000-6000}=1500$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 40 & 150,000 \\ 80 & 150,000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 75 \\ 80 & 25 \end{vmatrix}}=\frac{150,000(40-80)}{1000-6000}=1200$$

con los jornales son 1500 y 1200 la respuesta es **a**

(47) A una iglesia asisten 399 personas entre hombres, mujeres y niños. Si el número de hombres es el quíntuplo del de mujeres y el de las mujeres es el triple que el de los niños ¿Cuántos hombres hay?

a) 367 b) 98 c) 234 d) 298 e) 315

Desarrollo

Sean x = N° de hombres ; y = N° de mujeres ; z = N° de niños

De la condición del problema: $x + y + z = 399$ ... (1)

$x = 5y;\ y = 3z;\ x = 15z$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) y se tiene:

$15z + 3z + z = 399$ simplificando $19z = 399$ de donde $z=\frac{399}{19}=21$

Luego $x = 15z = 15(21) = 315$, la respuesta es **e**

(48) Los pasajes en microbús valen S/ 0.25 y S/ 0.13 para adultos y universitarios respectivamente. Luego de una vuelta en que viajaran 255 personas, se recaudo S/ 52.35 ¿Cuántos universitarios viajaron?

a) 95 b) 80 c) 90 d) 100 e) N.A.

Desarrollo

Por datos se tiene: x = N° de pasajeros adultos

y = N° de pasajeros universitarios

de las condiciones del problema tenemos:

$$\begin{cases} x+y=255 \\ 0.25x+0.13y=52.35 \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} x+y=255 & \ldots (1) \\ 25x+13y=5235 & \ldots (2) \end{cases}$$

multiplicando a la ecuación (1) por 25 y a la (2) por –1 se tiene:

25x + 25y = 6375

-25x – 13y = -5235, sumando ambas ecuaciones

12y = 1140 de donde $y = \frac{1140}{12} = 95$

Luego 95 universitarios viajaron, la respuesta es **a**

(49) La diferencia de capitales de dos personas A y B es igual a S/ 6400. Si la primera coloca su dinero al 4% y la segunda al 5% y ambos reciben el mismo interés después de cierto tiempo ¿Cuál es la suma de sus capitales? **(Admisión 1992 – UNMSM)**

a) S/ 56,700 **b)** S/ 57,600 **c)** S/ 56,200

d) S/ 56,400 **e)** S/ 57,400

Desarrollo

C_A = capital de la persona A; al colocar el 4% su interés será $\frac{4C_A}{100}$

C_B = capital de la persona B; al colocar el 5% su interés será $\frac{5C_B}{100}$

como los intereses son iguales, es decir: $\frac{4C_4}{100} = \frac{5C_B}{100}$ de donde $4C_A = 5C_B$ ... (1)

por condición del problema, la diferencia de capitales es: $C_A - C_B = 6400$ ... (2)

Luego de (1) y (2) se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4C_A - 5C_B = 0 \\ C_A - C_B = 6400 \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} C_A = 32,000 \\ C_B = 25,600 \end{cases}$$

como $C_A + C_B = 57,600$, la respuesta es **b**

(50) **Una caja contiene 2240 nuevos soles en billetes de 20 y 100 nuevos soles, hay doble números de los primeros que de los segundo billetes ¿Cuántos hay de cada billete?**

a) 32 y 16 **b)** 24 y 12 **c)** 31 y 15 **d)** 48 y 24 **e)** 30 y 15

Desarrollo

Por datos del problema: x = N° de billetes de 20 soles

y = N° de billetes de 100 soles

de la condición del problema se tiene: $\begin{cases} 20x + 100y = 2240 & \dots (1) \\ x = 2y & \dots (2) \end{cases}$

ahora reemplazamos (2) en (1) y se obtiene:

40y + 100y = 2240 de donde 140y = 2240 entonces y = 16, x = 32

por lo tanto la respuesta es **a**

17.18. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.-

I. Resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales aplicando los métodos indicados, inclusive la regla de cramer, la forma matricial y el método de Gauss y dar la respuesta que se indica.

(1) $\begin{cases} 7x - 8y = 101 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$, dar como respuesta x – y

a) 13 b) 3 c) 4 d) -16 e) 16

(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 38 \end{cases}$ dar como respuesta x + y

a) 4 b) 8 c) 14 d) 12 e) 16

(3) $\begin{cases} 10x+9y=8 \\ 8x-15y=-1 \end{cases}$, calcular $x-y$

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) 6 d) $\frac{1}{6}$ e) 2

(4) $\begin{cases} 3x+3\sqrt{y}=16 \\ 8x-2\sqrt{y}=36 \end{cases}$, calcule xy

a) 10 b) $\frac{56}{27}$ c) 15 d) 18 e) 24

(5) $\begin{cases} x-y=-18 \\ 10x-2y=-12 \end{cases}$, calcular $\frac{y}{x}$ si $x \neq 0$

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(6) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 3x+3y=-12 \end{cases}$, calcular xy

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(7) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+7y=-1 \end{cases}$, calcular $x+y$

a) -3 b) 3 c) 2 d) -2 e) 1

(8) $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=-10 \\ \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=49 \end{cases}$, calcular $\frac{x}{y}$

a) $\frac{17}{8}$ b) $\frac{8}{17}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{8}{7}$ e) 1

(9) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=2 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-2 \end{cases}$, calcular $\frac{y}{x}$

a) 1 b) -1 c) 3 d) -3 e) 4

10) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 11 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} = 16 \end{cases}$, calcular $\dfrac{x}{y}$

a) $\dfrac{7}{20}$ b) $\dfrac{20}{7}$ c) $\dfrac{3}{10}$ d) $\dfrac{10}{3}$ e) 1

11) $\begin{cases} \dfrac{10}{x} - \dfrac{10}{y} = 2 \\ \dfrac{8}{x} - \dfrac{15}{y} = -1 \end{cases}$, calcular $\dfrac{y}{x}$

a) $\dfrac{13}{20}$ b) $\dfrac{20}{13}$ c) $\dfrac{13}{10}$ d) $\dfrac{10}{13}$ e) 1

12) $\begin{cases} 2x - 3y + 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ 4x + 6y + 4z = 5 \end{cases}$, el valor de $\dfrac{x}{yz}$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

13) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$, calcular x + y + z

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

14) $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$, calcular xyz

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

15) $\begin{cases} 4x - 2y + 5z = -34 \\ 7x + 5y - z = 17 \\ 3x - y + z = -21 \end{cases}$, calcular y + x

a) 1 b) 5 c) 3 d) 2 e) 6

(16) $\begin{cases} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{cases}$, calcular xyz

a) -30 b) 30 c) 20 d) -20 e) 10

(17) $\begin{cases} 7x+3y-4z=-35 \\ 3x-2y+5z=38 \\ x+y-6z=-27 \end{cases}$, calcular xyz

a) 30 b) -30 c) 15 d) 12 e) 10

(18) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=6 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=7 \end{cases}$, calcular $\dfrac{x}{yz}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(19) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{z}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$, calcular $\dfrac{xz}{y}$

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

(20) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{2}{z}=-6 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=3 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{y}-\dfrac{6}{z}=31 \end{cases}$, calcular $\dfrac{z}{xy}$

a) 1 b) 2 c) 12 d) 4 e) 5

(21) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+4y+2z=3 \\ 2x+5y+3z=4 \end{cases}$, calcular xyz

a) $\nexists$ b) 1   c) 3   d) 5   e) 7

(22) $\begin{cases} 15x+2y+3z=24 \\ 6x+y=12 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases}$, indicar $\frac{1}{y}$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{2}$

II. Ejercicios sobre Compatibilidad e Incompatibilidad.-

(23) Calcular el valor de k, de modo que el sistema lineal $\begin{cases} (k-1)x=-y \\ x=2y \end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

a) 2   b) $\frac{1}{2}$ c) 3   d) $\frac{1}{3}$ e) 1

(24) Si el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (2+3a)x-(2b-3)y=2 \\ (a-16)x+(4b-1)y=-6 \end{cases}$, es indeterminado, el valor de a + b es:

a) 1   b) 3   c) 5   d) 7   e) 9

(25) La suma de los valores de "n" que hacen que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} nx+y=1 \\ x+y=2 \\ x-y=n \end{cases}$, sea compatible es:

a) -1   b) 1   c) -3   d) 3   e) 2

(26) Para qué valor de "a", el sistema lineal $\begin{cases} (a+3)x+(2a+3)y=18 \\ (a-3)x+(a-1)y=6 \end{cases}$, no admite solución:

a) -2   b) -1   c) 1   d) 2   e) 3

(27) ¿Qué valor debe asignarse al parámetro "a" de tal manera que el sistema $\begin{cases}(2a+2)x+5y=7\\(a+2)x+4y=8\end{cases}$, no admite solución?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(28) Calcular la suma de todos los valores de "n" que hacen que el sistema $\begin{cases}x+(n+1)y=0\\(1-n)x+ny=1+n\\(1+n)x+(12-n)y=-n-1\end{cases}$, sea compatible.

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

(29) En el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}nx-6y=5n-3\\2x+(n-7)y=29-7n\end{cases}$, el valor de n para que el sistema sea incompartible.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(30) El valor de α para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(3-\alpha)+5y=4\\(\alpha-2)x+2y=6\end{cases}$, sea incompatible es:

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{9}{7}$ c) $\frac{12}{7}$ d) $\frac{16}{7}$ e) $\frac{17}{7}$

(31) Halle los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}x+y+2z=3\\x+2y-z=1\\by+z=a\end{cases}$, tenga infinitas soluciones, indique a + b.

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) 4

(32) Halle "n" para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}mx+y=3\\6x+(m-1)y=2m\end{cases}$, sea inconsistente.

a) 3 b) -3 c) -3 y 3 d) 2 y -2 e) 1

(33) Calcule m^2+n^2, si el sistema $\begin{cases} mx+ny=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$, es indeterminado

a) 100 b) 80 c) 60 d) 40 e) 20

(34) ¿Para que valores de k el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ky=3 \\ kx+4y=6 \end{cases}$, tiene solución única?

a) $k \neq -2, k \neq 3$ b) $k \neq -2, k \neq 2$ c) $k \neq -3, k \neq 3$

d) $k \neq -3, k \neq 2$ e) $k \neq -2, k \neq -3$

(35) Sea "m" un entero tal que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ mx-y=37 \\ 3x+8y=m \end{cases}$, sea compatible si x_0, y_0 es la solución dicho sistema, hallar el valor de $E=m-(x_0+y_0)$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

(36) ¿Para que valor de λ el sistema siguiente $\begin{cases} \lambda x+y=0 \\ \lambda y+z=1 \\ \lambda z+x=\lambda \end{cases}$, admite, infinitas soluciones?

a) 1 b) 0 c) 2 d) -1 e) -2

(37) Para que valor de "m" el sistema tiene infinitas soluciones $\begin{cases} x+2y=3 \\ (2m+1)x+7y=\dfrac{21}{2} \end{cases}$

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) 1

(38) Para que valor de "m" el sistema tiene infinitas soluciones $\begin{cases} x+my=7 \\ 4x+(m+1)y=28 \end{cases}$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) -3 e) 1

(39) Hallar el valor de "k" para que el sistema $\begin{cases} (k-2)x-(k+7)y=2k-1 \\ 4x-(k+2)y=3k-14 \end{cases}$, sea inconsistente.

a) -4 b) 4 c) 3 d) -2 e) -3

(40) Hallar el conjunto de valores de "m" para que el sistema $\begin{cases} x+4y+16z=1 \\ x+my+m^2z=4 \\ 3x+15y+75z=9 \end{cases}$, tenga solución única.

a) {4,5} b) R – {4,5} c) {3,5} d) {1,4} e) ϕ

(41) Dado el sistema $\begin{cases} 2x+ny=3 \\ mx+3y=2 \end{cases}$, si es indeterminado, calcular $(\frac{2}{m})^3-(\frac{n}{3})^3$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

(42) Halle (m + n) de modo que el sistema $\begin{cases} (m+1)x+4y=10 \\ 2x+ny=5 \end{cases}$, presente infinitas soluciones

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(43) Calcular a – b, si el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ ax-by=10 \end{cases}$, admite infinitas soluciones.

a) 40 b) 50 c) 70 d) 80 e) 90

(44) Si el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3kx+2y+1=0 \\ (2k+1)x-8y-3=0 \end{cases}$, admite solución única, el parámetro k es:

a) $k \in \mathbb{R}$ b) $k \in R-\{\frac{1}{14}\}$ c) $\{\frac{1}{7},\frac{1}{14}\}$ d) $k \in \langle \frac{1}{14},\frac{1}{7} \rangle$ e) 7

(45) Calcular el valor de "a" de modo que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+ax=y \\ x+y=1 \end{cases}$, tenga solución única, indicar la suma de los valores

a) -3 b) -2 c) -1 d) 0 e) 1

(46) Halle "m" para que el sistema tenga infinitas soluciones $\begin{cases} x+my=1 \\ mx-3my=2m+3 \end{cases}$

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) 5

(47) Si el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+(a+1)y=7 \\ 2ax-13=-ay-3y \\ 3ax+(a+8)y=22 \end{cases}$, es compatible determinado, halle el valor de a $(a \neq 0)$

a) 6 b) 4 c) 2 d) 1 e) 0

(48) ¿Qué valores reales toma "n" para que el sistema: $\begin{cases} (n-1)x+(n-2)y=n+1 \\ (2n+1)x+(n+2)y=4 \end{cases}$, sea compatible determinado?

a) $\{0,4\}$ b) $n \in \mathbb{R}-\{0,4\}$ c) $n \in \mathbb{R}$ d) $\{3,5\}$ e) $n=0$

(49) Si el siguiente sistema de incógnitas x e y $\begin{cases} (t^2-3m+4)x+ty=2m \\ mx+3y=m \end{cases}$; $t,m \in \mathbb{R}$ tiene infinitas soluciones, calcular $m+t$.

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

(50) Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+y+z=40 \\ 3y-z=40 \end{cases}$ sabiendo que x,y,z están en progresión aritmética, halle $x+y+z$.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 3 e) 5

(51) ¿Para cuantos valores reales de k el siguiente sistema $\begin{cases} by+cz=k+1 \\ bx-z=k^2+1 \\ cx+y=k^3+1 \end{cases}$, presenta solución única?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

(52) Determinar la suma de todos los valores de "k" que hacen que el sistema: $\begin{cases} x+(k+1)y=0 \\ (1-k)x+ky=1+k \\ (1+k)x+(12-k)y=-(1+k) \end{cases}$, sea compatible.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(53) En el sistema $\begin{cases} 5x-2y=m \\ x+9y=m \end{cases}$ ¿Qué valores debe asignarse a "m" para que x exceda en 7 a y.

a) 27 b) 37 c) 47 d) 57 e) 67

(54) Si $\begin{cases} \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{18} \\ 3x+5y+z=34 \end{cases}$, el valor de $E = x + y + z$ es:

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30

(55) Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=16 \\ x+z=22 \\ y+z=28 \end{cases}$, calcular $E = z - x - y$

a) 3 b) 1 c) 5 d) 7 e) 9

(56) Si el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (n-5)x+21y=105 \\ 2x+3y=m-1 \end{cases}$ es incompatible, es cierto que:

a) $m = 16, n = 19$ b) $m \neq 16, n \neq 19$ c) $m = 16, n \neq 19$

d) $m \neq 16, n = 19$ e) N.A:

(57) Halle el valor de "n" para que en el sistema $\begin{cases} 3x+7y+2z=1 \\ 2x+3y+7z=1 \\ nx+2y+3z=0 \end{cases}$, se cumple que: $y = z$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(58) En el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (k+1)x-y=k \\ x+ky=k+1 \end{cases}$ ¿Qué valor debe tomar "k" para que el sistema tenga solución única?

a) $k=2$ b) $k=5$ c) $k \in R$ d) $k \in R-\{2,5\}$ e) $k=0$

(59) Halle m y n para que el sistema $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ (m-1)x+(n-2)y=4 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones e indicar m + n

a) 35 b) 30 c) 25 d) 20 e) 15

(60) Calcular el valor de "a" de tal manera que el sistema $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y+az=-1 \end{cases}$, no tenga solución única.

a) 1, 3 b) 1, -3 c) -1, 3 d) -1, -3 e) 1, -1

(61) Hallar el valor de k ≠ 0, de tal manera que el sistema $\begin{cases} x+y-z=kx \\ 2x-ky=2z \\ x-y=(1+k)z \end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

a) 0; 2 b) 0; -2 c) 2; -2 d) 1; 0 e) -1; -1

(62) ¿Qué valor debe tener "k" para que el siguiente sistema $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+ky+z=-k \\ x+ky-z=2 \end{cases}$, tenga infinitas soluciones?

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(63) Hallar los valores de a y b para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y-z=1 \\ by+z=a \end{cases}$, dar como respuesta "a + b"

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

(64) Para qué valores de los parámetros α y β el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=1 \\ 2x+4y+\alpha z=\beta \end{cases}$, es indeterminado y dar como respuesta α + β.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(65) Dado el sistema de incógnitas x e y; $\begin{cases} (n-4)x+ny=1 \\ nx+(n-4)y=1 \end{cases}$ si x_0, y_0 es solución. Halle $\frac{1}{x_0 y_0}$.

a) -16 b) -8 c) 8 d) 16 e) 18

(66) Luego de resolver el sistema: $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$ donde a, b y c son números reales diferentes, halle x

a) ab b) bc c) abc d) a e) b

(67) Si x_0, y_0 son soluciones del sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{b}=2a \end{cases}$ calcular x_0+y_0

a) ab b) a^2 c) b^2 d) a^2-b^2 e) a^2+b^2

(68) Resolver el sistema $\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=3(a^2+b^2) \\ ax-by=2(a^2+b^2) \end{cases}$ e indicar el valor de x.

a) 2a + b b) a + 2b c) 2a – b d) a – 2b e) ab

(69) Si $x_0; y_0$ es la solución del sistema: $\begin{cases} \dfrac{m}{x-a}+\dfrac{n}{y-b}=\dfrac{m-n}{b-a} \\ \dfrac{r}{x-a}-\dfrac{p}{y-b}=\dfrac{r+p}{b-a} \end{cases}$, calcular: $ab-x_0y_0$

a) ab b) -ab c) 0 d) a + b e) $\dfrac{a}{b}$

(70) Luego de resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) \end{cases}$, indicar el valor de "y".

a) a + b b) a – b c) ab d) 2a – b e) b – 2a

III. Ejercicios de sistemas no lineales.

(71) Sean x_0, y_0 las soluciones positivas del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$, entonces el valor de $2x_0+3y_0$ es:

a) 15 b) 17 c) 18 d) 19 e) 12

(72) Hallar la suma de las soluciones del sistema $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

(73) Indicar el número de soluciones reales del sistema $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2} \\ x+xy+y=9 \end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 3 d) 5 e) 6

(74) Indicar cuantas soluciones reales tiene el sistema $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=28 \end{cases}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(75) Indicar cuantas soluciones reales del sistema $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ 2x^2+xy+y^2=2 \end{cases}$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

(76) Indicar el número de soluciones del sistema $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(77) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy(x+y)=420 \\ x^3+y^3=468 \end{cases}$, hallar $2x+2y$

a) 12 b) 22 c) 16 d) 18 e) 24

(78) Hallar $x+y+z$, si x,y,z son las soluciones positivas del sistema $\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=8 \\ xz=21 \end{cases}$

a) 18 b) 20 c) 12 d) 25 e) 15

(79) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}=\dfrac{1}{15} \\ 15\sqrt{x+y}+15\sqrt{x-y}=8(x^2-y^2)^{0.5} \end{cases}$, el valor de xy es de:

a) 17 b) 24 c) 68 d) 136 e) 272

(80) Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$, indique el números de soluciones.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(81) La suma de todos los valores de x e y que satisfacen el sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=41 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=901 \end{cases}$ es:

a) $\dfrac{20}{195}$ b) $\dfrac{41}{195}$ c) $\dfrac{40}{195}$ d) $\dfrac{36}{195}$ e) $\dfrac{72}{195}$

(82) Indique el valor de: 5x + 7y, al resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2x-y}}-\dfrac{1}{3\sqrt{2x+y}}=\dfrac{1}{24} \\ 15\sqrt{2x+y}+4\sqrt{2x-y}=3\sqrt{4x^2-y^2} \end{cases}$

a) 223 b) 213 c) 197 d) 193 e) 191

(83) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37 \\ x+y=7 \end{cases}$, indique: (y – x)

a) -1 b) 1 c) -2 d) 2 e) 3

(84) Resuelva el sistema: $\begin{cases} x^2+x^2y^2+y^2=49 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$ señale el mayor valor de: (x – y)

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) 5

(85) Al resolver el sistema: $\begin{cases} (x+3y)(2x+y)+3x+5y=-5 \\ 7x+3y=-3 \end{cases}$ halle un valor de (x + y)

a) $-\dfrac{11}{9}$ b) $\dfrac{7}{9}$ c) $\dfrac{13}{9}$ d) $\dfrac{5}{9}$ e) $\dfrac{1}{9}$

(86) Siendo (a y b) una solución del sistema $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \end{cases}$, halle a + b.

a) 5 b) 3 c) 1 d) -2 e) -4

(87) Indicar el menor valor de "y" luego de resolver el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ x+y=3 \end{cases}$.

a) -2 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(88) Si x_0 ; y_0 son las soluciones positivas del sistema $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 \\ 6x^2+xy-y^2=50 \end{cases}$, calcular el valor de: $2x_0+y_0$

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(89) Calcular el producto de todos los valores reales obtenidas para "x" al resolver el sistema $\begin{cases} x^2y^2+xy=6 \\ x+y=3 \end{cases}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(90) Halle el producto x_0y_0, siendo $(x_0;y_0)$ una solución del sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{x+y}-1=0 \end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(91) Luego de resolver el sistema: $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x-1)(y+2) \\ 8x+5=9y+2 \end{cases}$ halle $\dfrac{x}{y}$

a) $\dfrac{135}{127}$ b) $\dfrac{145}{127}$ c) $\dfrac{155}{127}$ d) $\dfrac{165}{127}$ e) $\dfrac{175}{127}$

(92) Luego de resolver el sistema $\begin{cases} x^2-y\sqrt{xy}=-b \\ x\sqrt{xy}-y^2=b \end{cases}$ calcular $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) 5

(93) Al resolver el sistema: $\begin{cases} (3x-y)(3x+y)=35 \\ (x-2y)(x-5y)=0 \end{cases}$, de un valor de x^2-y^2

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(94) Luego de resolver el sistema en R^+ : $\begin{cases} x+y=3 \\ \sqrt{x^2+25}+\sqrt{y^2+1}=3\sqrt{5} \end{cases}$, halle 4xy

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

(95) ¿Cuántas soluciones posee el sistema $\begin{cases} \sqrt{x^2}-y=1 \\ x-\sqrt{y^2}=3 \end{cases}$?

a) 0 b) 2 c) 1 d) infinitos e) 3

(96) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{a+b}{a-b} \\ xy=ab(a^2+b^2) \end{cases}$, entonces el valor de $\sqrt{2}(x-y)$ es igual a:

a) $(a-b)^2$ b) $(a+b)^2$ c) $2(a-b)^2$ d) $2(a+b)^2$ e) a − b

(97) Al resolver el sistema $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y=5 \\ (x-2)(y-3)=0 \end{cases}$, indique el valor de "y".

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(98) Halle la suma de todos los valores de x que satisfacen el sistema $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y)=65 \\ x^2+y^2+x+y=13 \end{cases}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(99) Calcular el valor mayor de 3x − 2y del sistema $\begin{cases} x^2(1+y^2)+y^2=49 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

(100) Halle α si el sistema $\begin{cases} x^2-y^2=3xy \\ x^4+y^4=\alpha x^2y^2 \end{cases}$, es indeterminado

a) 3 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

101 Encuentre los valores de "b" para los cuales el sistema siguiente $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y = x + b \end{cases}$, posee una única solución.

a) $\{\sqrt{6};-\sqrt{6}\}$ b) $\{\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$ c) $\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$

d) $\{\sqrt{5};-\sqrt{5}\}$ e) $\{\sqrt{7};-\sqrt{7}\}$

102 Encuentre el valor de "a" para que el sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x + y + z = a \end{cases}$, tenga una solución en R^3

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{1}{5}$

103 Se tiene el sistema $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = mx \end{cases}$, encuentre los valores de m de tal manera que el sistema tenga mas de una solución.

a) $-\dfrac{\sqrt{7}}{3} < m < \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ b) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3} < m < \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ c) $1 < m < 2$

d) $-1 < m < 1$ e) $m \in R$

104 Si el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 5 = kx \end{cases}$, admite una solución única; ¿Qué valor asume x?

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{5}{4}$ d) $\dfrac{7}{4}$ e) $\dfrac{9}{4}$

105 Al resolver el sistema $\begin{cases} xy^2 + y = 21 \\ x^2y^4 + y^2 = 333 \end{cases}$, dar un valor para xy.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{1}{6}$

106 Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy(x+y) = 420 \\ x^3 + y^3 = 468 \end{cases}$. Hallar 2x + 2y.

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30

107 Indique el número de soluciones del sistema $\begin{cases} xy^2 + xy + z = -1 \\ x^2y + yz + x = 1 \\ zxy^2 - xy = z + 1 \end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 3 d) 1 e) infinitas

108 Señale la suma de los valores de x luego de resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz = 9 \\ xz = -1 \end{cases}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

109 Indicar el número de soluciones reales del sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xz + yz = (xy+1)^2 \end{cases}$

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

110 Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$, indicando el valor de x.

a) $\frac{a-1}{a+2}$ b) $\frac{a+1}{a+2}$ c) $-\frac{a+1}{a+2}$ d) $\frac{1}{a+1}$ e) $\frac{1}{a+2}$

111 Luego de resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^3 + (5-x)^3 + (x-5-y)^3 = 6 \\ 5y - xy = 2 \end{cases}$, calcule x – y.

a) 2 b) 3 c) 6 d) 8 e) 10

112 Resolver el sistema: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{3}{xy} + 1 \end{cases}$ y dar un valor de xy.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

113 ¿Cuántas soluciones posee el sistema? $\begin{cases} xyz = 5 - x \\ xyz = 4 + y \\ xyz = 3 - z \end{cases}$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 1 e) 2

114 Resolver el sistema $\begin{cases} 5xy = 12(x+y) \\ 5yz = 18(y+z) \\ 13xz = 36(x+z) \end{cases}$, indicar el valor $\dfrac{yz}{x}$

a) 6 b) 24 c) 12 e) 36 e) 54

115 La suma de todas las "x" mas la suma de todas las "y" que satisfacen el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + x - 2y = 20 \\ 2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y = 9 \end{cases}$, es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

116 Luego de resolver el sistema: $\begin{cases} x^2 + xy + xz - x = 2 \\ y^2 + xy + yz - y = 4 \\ z^2 + xz + yz - z = 6 \end{cases}$, indicar el valor de "y".

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{5}{3}$ e) 1

117 Halle x si se cumple que: $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y} + \dfrac{5}{y+2x} = 2 \\ \dfrac{4}{3x-y} - \dfrac{3}{y+2x} = 17 \end{cases}$

a) $-\dfrac{1}{7}$ b) 7 c) 3 d) 5 e) -1

118 Dado el sistema $\begin{cases} (t^2-1)x^2 + tx + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ halle el número de valores de t para que el sistema tenga solución única.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 7

(119) Resuelva en R^- el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+2xy+3xz=50 \\ xy+2y^2+3yz=10 \\ 2x+2yz+3z^2=10 \end{cases}$. Halle: x + y + z.

a) 1 b) -3 c) -7 d) 5 e) 2

(120) Resolver el sistema en R^+: $\begin{cases} x+y=\dfrac{xyz}{15} \\ z+x=\dfrac{11xyz}{120} \\ y+z=\dfrac{13xyz}{120} \end{cases}$ y de cómo respuestas x + y – z

a) 4 b) 8 c) 12 d) 0 e) 2

(121) Luego de resolver el sistema: $\begin{cases} x^2+xz=8-x(y+1) \\ x^2+yz=12-y(x+1) \\ z^2+xz=10-z(y+1) \end{cases}$, halle el menor valor de x + y + z.

a) -6 b) 6 c) -5 d) 5 e) 3

(122) Luego de resolver el sistema $\begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=81 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=3 \end{cases}$, calcule x – y.

a) 51 b) 61 c) 71 d) 81 e) 91

(123) Halle la diferencia del mayor valor de x con el menor valor de z, que verifique el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=35 \\ xy=15 \end{cases}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(124) Luego de resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y=2z \\ 9z-7x=6y \\ x^3+y^3+z^3=216 \end{cases}$, indicar el valor de x:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 8 e) 9

(125) Resolver el sistema: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x^2+y^2-z^2=9 \\ x^3+y^3-z^3=-11 \end{cases}$, indicar un valor de y^{x-z}

a) 81 b) 71 c) 61 d) 51 e) 41

(126) Calcular el valor de x – y, si $\begin{cases} (x+y)^3+(x-y)^3=64 \\ x^2+3y^2=-\dfrac{16y}{x} \end{cases}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 5) 5

(127) Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}=-\dfrac{7}{5} \end{cases}$ y dar como respuesta el valor de (x + y)

a) 1 b) -1 c) 2 d) 3 e) 4

(128) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=16 \\ x-y+z=4 \end{cases}$, calcule $x^2+xy-4z$

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

(129) Si $x, y \in R^+$, tales que: $\begin{cases} x+y=3 \\ \sqrt{1+x^2}+\sqrt{9+y^2}=5 \end{cases}$, calcule $(\dfrac{1}{x}+\dfrac{12}{y})$.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(130) Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{x+1}=1 \\ \dfrac{x+y+z}{y+2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+y+z}{z+3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$, indique el valor de 4x + 2y + 3z

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(131) Si una sala tuviera 2m. más de largo y 3m. más de ancho, el área sería $40m^2$ mayor de lo que es ahora, y si tuviera 2m. menos de largo y 3m. más de ancho, el área sería $8m^2$ mayor que ahora. Hallar las dimensiones de la sala.

a) 8m y 5m b) 10m y 4m c) 20m y 2m

d) 15m y 4m e) 40m y 1m

(132) Hallar tres números tales que la suma del primero y el segundo excede en 46 al tercero; la suma del primero y el tercero excede en 28 al segundo, y la suma del segundo y el tercero excede en 10 al primero dar como respuesta la suma de los tres números.

a) 65 b) 75 c) 85 d) 95 e) 55

(133) La suma de las dos cifras de un número es 9, y si el número se le resta 27, las cifras se invierten, hallar el número:

a) 54 b) 45 c) 36 d) 63 e) 72

(134) Un hombre compro cierto número de libros. Si hubiera comprado 2 libros más por el mismo dinero, cada libro le habría costado S/ 1 menos, y si hubiera comprado 4 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado S/ 4 más ¿Cuántos libros compro?

a) 12 b) 10 c) 8 d) 14 e) 13

(135) Si al numerador de una fracción se le resta 2, el valor de la fracción es $\frac{1}{5}$, y si el denominador se le resta 1, el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$. Hallar la fracción.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{2}{3}$

(136) La diferencia entre la cifra de las unidades y la cifra de las decenas de un número es 7, y si el número se suma con el número que resulta de invertir sus cifras, la suma es 99, hallar el número.

a) 18 b) 81 c) 29 d) 92 e) 16

137 Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 2 y el resto 9, y si el menor se divide 6 veces por el mayor, el cociente s 2 y el resto 16. Hallar la suma de los números.

a) 20 b) 40 c) 60 d) 80 e) 90

138 Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 3, y si el menor se divide 10 veces por el mayor, el cociente es 3 y el resto 17. Hallar la suma de los números.

a) 48 b) 58 c) 68 d) 78 e) 88

139 La edad de Ana excede en 33 años a la edad de Rosa, y si la edad de Ana se divide entre el triple de la de Rosa, el cociente es 1 y el resto 17. Hallar la edad de Rosa.

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

140 Si un número de dos cifras se disminuye en 13 y esta diferencia se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 6, y si el número, disminuirlo en 21, se divide por la cifra de las unidades disminuirla en 1, el cociente es 26. Hallar el número.

a) 73 b) 63 c) 83 d) 53 e) 93

17.19. RESPUESTAS.-

1	a	2	c	3	d	4	b	5	c	6	b	7	a	8	a
9	b	10	a	11	b	12	c	13	b	14	c	15	b	16	a
17	b	18	c	19	b	20	c	21	a	22	c	23	b	24	c
25	a	26	b	27	a	28	d	29	b	30	d	31	a	32	c
33	b	34	b	35	a	36	d	37	b	38	c	39	a	40	b
41	a	42	c	43	d	44	b	45	b	46	a	47	c	48	b
49	e	50	b	51	a	52	b	53	c	54	c	55	b	56	d
57	b	58	c	59	a	60	b	61	c	62	a	63	b	64	b
65	a	66	c	67	d	68	a	69	c	70	b	71	b	72	d
73	a	74	b	75	c	76	c	77	e	78	e	79	d	80	b
81	b	82	a	83	b	84	c	85	a	86	c	87	a	88	b
89	c	90	a	91	d	92	c	93	b	94	d	95	a	96	a
97	b	98	c	99	c	100	d	101	a	102	a	103	b	104	b
105	e	106	d	107	a	108	b	109	d	110	c	111	c	112	b
113	a	114	a	115	b	116	c	117	a	118	b	119	c	120	d
121	a	122	d	123	b	124	b	125	a	126	d	127	b	128	d
129	b	130	a	131	a	132	c	133	d	134	b	135	b	136	a
137	c	138	c	139	b	140	a								

CAPÍTULO XVIII

18. NÚMEROS COMPLEJOS.-

18.1. ECUACIONES SIN SOLUCIÓN EN R.-

Consideremos la siguiente ecuación $x^2+2=0$ al resolver esta ecuación nos encontramos que no existe solución en R, debido a que: $\forall$ x $\in$ R, $x^2 \geq 0$, luego $x^2+2>0$, $\forall x \in R$.

GENERALIZANDO.- Consideremos la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, con coeficientes reales, no tiene solución en R. Sí el discriminante es menor que cero, es decir: $\Delta = b^2-4ac<0$.

Luego para resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$, ampliaremos a otro conjunto llamado el conjunto de los " Números Complejos".

18.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos números complejos a todo par ordenado de números reales el cual denotaremos por z = (a , b).

Al conjunto de los números complejos denotaremos por:

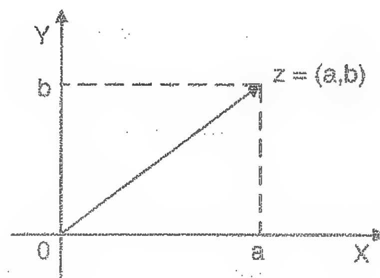
$$C = R \times R = \{ (a,b) / a \in R \wedge b \in R \}$$

18.3. DEFINICIÓN.-

La parte real de un número complejo es su primera componente y la parte imaginaria es su segunda componente, luego tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales. Si z = (a,b) es un número complejo, entonces la parte real de z = (a,b) denotaremos por: Re(z) = a, y la parte imaginaria de z = (a,b) denotaremos por: Im(z) = b

18.4. EL PLANO COMPLEJO.-

Entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano, existe una correspondencia biunívoca, de tal manera que todo número complejo z = (a,b) se puede representar geométricamente por un segmento orientado (flecha), que tiene su origen, en el origen de coordenadas y su extremo en el punto (a,b).



18.5. TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Un número complejo es real o puramente real, si y solo si, su parte imaginaria es cero; un número complejo es imaginario puro, si y solo si, su parte real es cero. Es decir:

$z = (a,b)$ un número complejo es real $\leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = b = 0$

Notación: $z = (a,0) = a, \ \forall a \in R$

$z = (a,b)$ un número complejo es imaginario puro $\leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = a = 0$

Notación: $z = (a,b) = bi, \ \forall b \in R - \{0\}$

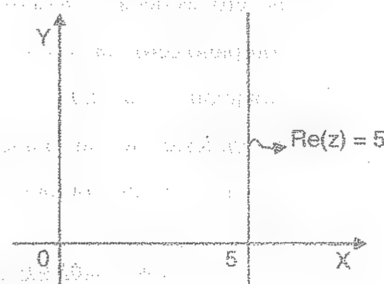
Ejemplo.- Determinar analíticamente y gráficamente los complejos $z = (x,y)$, tal que verifiquen:

a) $\operatorname{Re}(z) = 5$ **b)** $\operatorname{Im}(z) \leq 4$

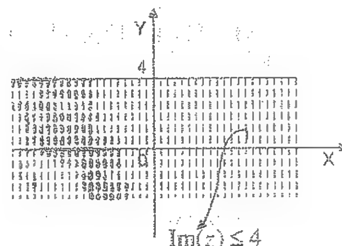
c) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 3$ **d)** $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1$

Desarrollo

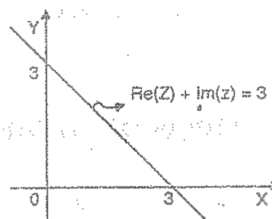
a) Sea $z = (x,y)$ un número complejo, entonces $\operatorname{Re}(z) = x$, pero como $\operatorname{Re}(z) = 5$, entonces $x = 5$, es una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa $x = 5$.



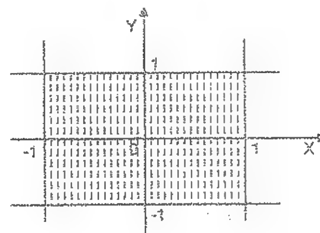
b) Sea $z = (x,y)$ un número complejo entonces $Im(z) = y$, pero como $Im(z) \leq 4$ entonces $y \leq 4$, que corresponde al semiplano que contiene al origen, cuyo borde es la recta de la ecuación $y = 4$ (ver gráfica).



c) Sea $z = (x,y)$ un número complejo de donde $Re(z) = x \wedge Im(z) = y$, pero como $Re(z) + Im(z) = 3$, entonces $x + y = 3$, que nos representa la recta que pasa por los puntos (3,0), (0,3).



d) Sea $z = (x,y)$ un número complejo, de donde $Re(z)=x \wedge Im(z) = y$ pero como $-1 \leq Re(z) \leq 1 \wedge -1 \leq Im(z) \leq 1$ entonces $-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1$



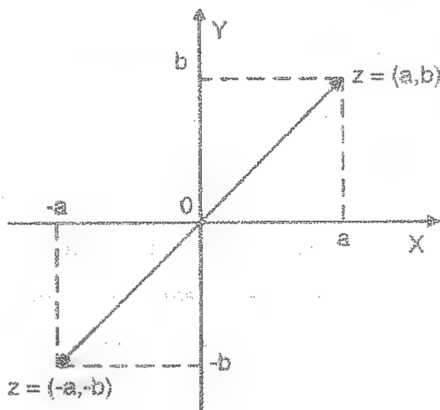
18.6. CERO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Un número complejo es cero; si, tanto su parte real, como su parte imaginaria es cero, es decir: $z = (a,b)$ es un número complejo cero $\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$.

Notación: $z = (0,0)$

El opuesto de un número complejo $z = (a,b)$ es definido por:

$$-z = -(a,b) = (-a,-b)$$



18.7. OPERACIONES EN COMPLEJOS.-

1ro. IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Dos números complejos son iguales cuando tienen iguales su parte real y su parte imaginaria, Es decir:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo.- $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (2,3)$ son iguales porque $2 = 2 \wedge 3 = 3$ $(z_1 = z_2)$

Ejemplo.- $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (3,5)$ no son iguales porque $2 \neq 3 \wedge 3 \neq 5$ $(z_1 \neq z_2)$

Luego: $(a,b) \neq (c,d) \Leftrightarrow a \neq c$ y/o $b \neq d$

2do. SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

La suma de dos números complejos, es un número complejo, que tiene por parte real a la suma de las partes reales de los sumandos y por parte imaginaria a la suma de las partes imaginarias de las mismas.

Es decir: Sí $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ entonces la suma:

$$z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$$

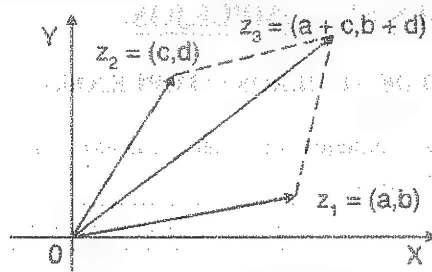
Ejemplo.- Calcular la suma de (2,4) y (3,5) es decir:

$$(2,4) + (3,5) = (2+3, 4+5) = (5,8)$$

3ro. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos, entonces se tiene:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = z_3$$



4to. PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean z_1, z_2, z_3 números complejos, entonces:

P_1 .- Propiedad de Clausura: $z_1 + z_2 \in C$

P_2 .- Propiedad Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

P_3 .- Propiedad Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

P_4 .- Propiedad de Existencia y Unidad del Neutro Aditivo:

Existe el elemento neutro $w \in C$ tal que: $z + w = z$, $\forall\, z \in C$, donde $w = (0,0)$

P_5 .- Propiedad de Existencia del Universo Aditivo, para cualquier $z \in C$ existe otro elemento que denotaremos por $-z$, tal que $z + (-z) = (0,0)$.

5to. SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos, definimos la diferencia de z_1 y z_2 por:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \text{, es decir;}$$

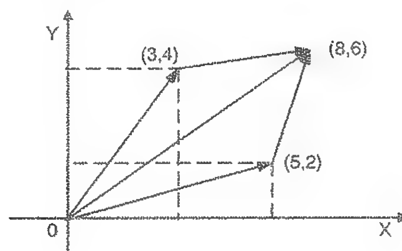
$$\boxed{z_1 - z_2 = (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)}$$

Ejemplos.- Efectuar las operaciones indicadas analíticamente y gráficamente.

① $(3,4) + (5,2)$

Desarrollo

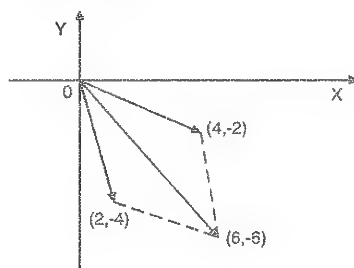
$(3,4) + (5,2) = (3 + 5, 4 + 2) = (8,6)$



(2) $(4,-2) + (2,-4)$

Desarrollo

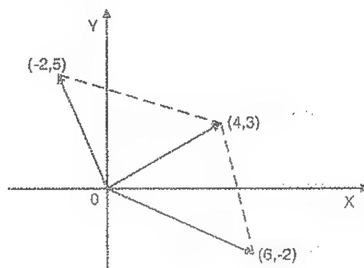
$(4,-2) + (2,-4) = (4 + 2, -2 - 4) = (6,-6)$



(3) $(6,-2) - (2,-5)$

Desarrollo

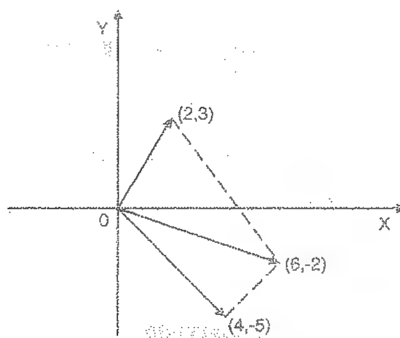
$(6,-2) - (2,-5) = (6,-2) + (-2,5) = (6 - 2, -2 + 5) = (4,3)$



(4) $(2,3) - (-4,5)$

Desarrollo

$(2,3) - (-4,5) = (2,3) + (4,-5) = (2 + 4, 3 - 5) = (6,-2)$



6to. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos, al producto de z_1 y z_2 definiremos por:

$$z_1.z_2 = (a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Ejemplo.- Sean $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (1,5)$

Luego $z_1.z_2 = (2,3).(1,5) = (2-15, 10+3) = (-13,13)$

7mo.PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1, z_2, z_3 \in C$, números complejos, entonces:

P_1 .- Propiedad de la Clausura: $z_1.z_2 \in C$

P_2 .- Propiedad Conmutativa: $z_1.z_2 = z_2.z_1$

P_3 .- Propiedad Asociativa: $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$

P_4 .- Propiedad Distributiva: $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

P_5 .- Propiedad de Existencia y unicidad del neutro multiplicativo. Existe un único número complejo u tal que $u.z = z$, $\forall$ z $\in$ C siendo u = (1,0)

P_6 .- Propiedad de Existencia y unicidad del inverso multiplicativo: Para cada número complejo $z \neq (0,0)$, $\exists\ \alpha \in C$ tal que, $z.\alpha = u$ siendo $\alpha = z^{-1}$; $u = (1,0)$

P_7 .- Para $z \in C$, $k \in R$, $k.z = k.(a,b) = (ka, kb)$.

Demostraremos la propiedad P_6, las otras propiedades dejamos como ejercicio para el lector.

Sea $z = (a,b) \neq (0,0)$, suponiendo $\alpha = (x,y)$ tal que, $z.\alpha = u$, siendo $u = (1,0)$, es decir:

$(a,b).(x,y) = (1,0)$, que al efectuar la operación se tiene:

$(ax - by, ay + bx) = (1,0)$, por definición de igualdad tenemos

$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene: $x = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Observamos que:

$(a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a \neq 0$ y/o $b \neq 0$, entonces $a^2+b^2 \neq 0$, por lo tanto:

$$\alpha = (x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

Ejemplo.- Sí $z = (3,5) \Rightarrow z^{-1} = \left(\dfrac{3}{34}, -\dfrac{5}{34}\right)$

8vo. UNIDAD Y RECÍPROCO.-

El elemento neutro multiplicativo es la unidad compleja y denotaremos por $u = (1,0)$ ó también: $1 = (1,0)$.

El inverso multiplicativo α de un número complejo $z = (a,b) \neq (0,0)$ se llama recíproco de z y denotaremos por:

$$\alpha = z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

OBSERVACIÓN.- El número complejo (a,0) se identifica con el número real a, y denotaremos como (a, 0) = a, en forma intercambiable.

9no. DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1, z_2 \in C$, siendo $z_2 \neq (0,0)$, la división de z_1 y z_2 definiremos por: $\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1}$ de esta definición obtenemos la regla para la división.

Sí $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d) \neq (0,0)$, entonces: $z_2^{-1} = (\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2})$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} = (a,b).(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}) = (\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$$

Luego: $$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$$

18.8. UNIDAD IMAGINARIA.-

El número complejo imaginario puro de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y denotamos por: i = (0,1).

OBSERVACIÓN.- La multiplicación de un número complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes, es decir:

$(b,0).i = (b,0).(0,1) = (0,b)$

18.9. FORMA STÁNDAR (RECTANGULAR O BINÓMICA) DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sea z = (a,b) un número complejo, por definición de suma tenemos :

z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a (1,0) + b (0,1) = a + bi

Luego z = a + bi es la forma estándar (rectangular o binómica) del número complejo z.

18.10. TEOREMA.-

Demostrar que: $i^2 = -1$

Demostración

$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$ por lo tanto $i^2 = -1$, de donde $i = \sqrt{-1}$

OBSERVACIÓN.-

Analizando el numero i^n, $\forall$ n $\in$ Z

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i = i$

$i^6 = i^4.i^2 = (1)(-1) = -1$

$i^7 = i^4.i^3 = (1)(-i) = -i$

$i^8 = i^4.i^4 = (1)(1) = 1$

$i^9 = i^8.i = (1)(i) = i$

$i^{10} = i^8.i^2 = (1)(-1) = -1$

$i^{11} = i^8.i^3 = (1)(-i) = -i$

$i^{12} = i^8.i^4 = (1)(1) = 1$

.

.

.

Observamos que las potencias enteras de i se repiten cada cuatro veces y que toman uno de los cuatro valores i, -1, -i, 1

También observamos principalmente que: $i^4 = 1$, $i^8 = 1$, $i^{12} = 1$; etc. esto quiere decir que la unidad imaginaria elevada a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

Por lo tanto se tiene $i^{\overset{o}{4}} = 1$ o también $i^{\pm\overset{o}{4}} = 1$ de este resultado decimos que $i^{\overset{o}{4}+1} = i$, $i^{\overset{o}{4}+2} = -1$, $i^{\overset{o}{4}+3} = -i$, de donde podemos generalizar en la forma siguiente:

$$i^{\overset{o}{4}+k} = i^k \ ; \ \forall\, k \in Z$$

como consecuencia de estos resultados se deduce:

1). $i^{-(\overset{o}{4}-k)} = i^k$, $\forall\, k \in Z$ 2). $i^{-k} = (-1)^k i^k$, $\forall\, k \in Z$

OBSERVACIÓN.- De los resultados obtenidos se deduce:

1) $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

2) $i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0$, $\forall\, k \in Z$

3) $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$, $\forall\, k \in Z$

4) Mediante las propiedades aritméticas se tiene:

a) $2^n = \overset{o}{4}$, $\forall\, n \geq 2$ b) $(\overset{o}{4} + r)^n = \overset{o}{4} + r^n$, $\forall\, n \in N$, $r \in Z$

Ejemplo.- Si k es un entero negativo, calcular el valor de $[\frac{1+i}{\sqrt{2}}]^{4k+6}$

Desarrollo

Como $k \in Z_0^+$, entonces se tiene:

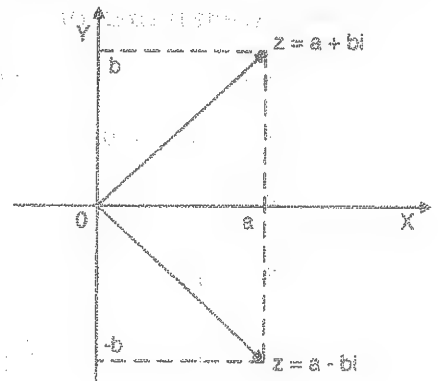
$$[\frac{1+i}{\sqrt{2}}]^{4k+6} = [(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2]^{2k+3} = (\frac{2i}{2})^{2k+3} = i^{2k+3} = (i^2)^{k+1} i = (-1)^{k+1} i$$

Luego el equivalente de la expresión es: $(-1)^{k+1} i$

18.11. LA CONJUGACIÓN EN C.-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos conjugado de z = a + bi al número complejo a – bi, al cual representaremos por $\bar{z} = a - bi$

b) **DEFINICIÓN.-** Dos números complejos son conjugados si difieren solamente en sus partes imaginarias en los signos.



Los números complejos conjugados caracterizan puntos simétricos respecto al eje real, así: Si z = a + bi su conjugada es: $\bar{z} = a - bi$

c) **PROPIEDADES:** Sean $z_1, z_2, \in C$, Entonces:

P_1.- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

P_2.- $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

P_3.- $z_1 = \bar{\bar{z}}_1$

P_4.- $(\overline{z_1})^{-1} = \overline{(z_1^{-1})}$, $z_1 \neq (0,0)$

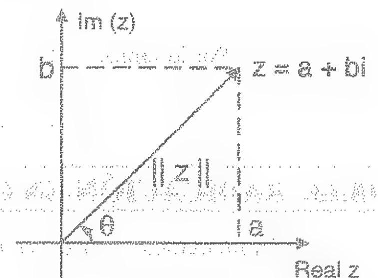
P_5.- $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq (0,0)$

P_6.- $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$

18.12. MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

El módulo de un número complejo z = a + bi es un número real positivo definido por:

$$\| z \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Geométricamente; el módulo de un número complejo z = a + bi, es la longitud del segmento orientado que representa a z = a + bi

Ejemplo.- Sí $z = 3 + 4i \Rightarrow \| z \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

a) **PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS**

Sean $z_1, z_2, z_3 \in C$, entonces:

P_1.- Sí $z_1 \neq (0,0) \Rightarrow \|z_1\| > 0$

P_2.- Sí $\|z_1\| = 0 \Rightarrow z_1 = (0,0)$

P_3.- Sí $\|z_1\| = \|-z_1\| = \|\overline{z_1}\|$

P_4.- Sí $\|z_1\|^2 = z_1.\overline{z_1}$

P_5.- $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

P_6.- $\|\dfrac{z_1}{z_2}\| = \dfrac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, $z_2 \neq (0,0)$

P_7.- $\|z_1.z_2\| = \|z_1\|.\|z_2\|$

P_8.- $Re(z) \leq \|z\|$, $Im(z) \leq \|z\|$

P_9.- $\|\sqrt[n]{z}\| = \sqrt[n]{\|z\|}$, $\forall$ n $\in$ N, n ≥ 2

P_{10}.- $|\|z_1\| - \|z_2\|| \leq \|z_1 - z_2\|$

P_{11}.- $\|z\|^n = \|z^n\|$

P_{12}.- $\|\dfrac{z}{\bar{z}}\| = 1$

Demostraremos la propiedad P_5, los demás dejamos para el lector:

$$\|z_1 + z_2\|^2 = (z_1 + z_2).(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2).(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1.\overline{z_1} + z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1} + z_2.\overline{z_2} = \|z_1\|^2 + z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1.\overline{z_2}} + \|z_2\|^2$$

$$= \|z_1\|^2 + 2Re(z_1.\overline{z_2}) + \|z_2\|^2 \leq \|z_1\|^2 + 2\|z_1\|.\|\overline{z_2}\| + \|z_2\|^2$$

$$= \|z_1\|^2 + 2\|z_1\|.\|z_2\| + \|z_2\|^2 = (\|z_1\| + \|z_2\|)^2$$

Por lo tanto: $\|z_1 + z_2\|^2 \leq (\|z_1\| + \|z_2\|)^2$

$$\therefore \quad \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

18.13. RADICACIÓN EN C.-

Estudiaremos la raíz cuadrada de un número complejo en la forma binómica, y la forma general que corresponde a la fórmula de Moivre trataremos más adelante.

a) **DEFINICIÓN.-** La raíz cuadrada de un número complejo z es un número complejo w tal que $w^2 = z$.

OBSERVACIÓN.- En base a la raíz cuadrada de números reales positivos, demostraremos que la raíz cuadrada de un número complejo siempre existe.

b) TEOREMA.- Demostrar que la raíz cuadrada de z = a + bi es el número complejo w = x + iy, donde: $x = \pm\sqrt{\frac{\|z\|+a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{\|z\|-a}{2}}$

Demostración

Si x + iy es la raíz cuadrada de z = a + bi entonces $(x+iy)^2 = a+bi$, aplicando módulos $\|x+iy\|^2 = \|a+bi\|$ de donde $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ pero $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$ entonces $x^2+y^2 = \|z\|$ ... (1)

Como $(x+iy)^2 = a+bi$, desarrollando se tiene $x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi$, por igualdad

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \dots (2) \\ 2xy = b & \dots (3) \end{cases}$$

Luego de (1) y (2) se tiene el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2 = \|z\| \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$ entonces $\begin{cases} 2x^2 = \|z\|+a \\ 2y^2 = \|z\|-a \end{cases}$

de donde $x = \pm\sqrt{\frac{\|z\|+a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{\|z\|-a}{2}}$

Aquí se obtiene cuatro pares de números reales, de los cuales seleccionaremos dos; mediante la ecuación (3).

Si $b > 0 \Rightarrow$ x, y se eligen con el mismo signo.

Si $b < 0 \Rightarrow$ x, y se eligen con distinto signo.

Ejemplo.- Resolver la ecuación en C; $z^2 = 2i$

Desarrollo

Resolver esta ecuación es equivalente a sacar la raíz cuadrada de $z^2 = 2i$ de donde

$a = 0$, $b = 2$, $\| w \| = 2$, donde $w = 2i$, como $x = \pm\sqrt{\frac{\| z \| + a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{\| z \| - a}{2}}$

Luego $x = \pm\sqrt{\frac{2+0}{2}} = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{\frac{2-0}{2}} = \pm 1$

como $b = 2 > 0 \Rightarrow z = \sqrt{2i} = x + iy = \pm(1+i)$

Ejemplo.- Resolver la raíz de $z^2 = 6 - 8i$

Desarrollo

Sea $w = 6 - 8i \Rightarrow a = 6$, $b = -8$, $\| w \| = 10$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\| w \| + a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{10+6}{2}} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{\| w \| - a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{10-6}{2}} = \pm\sqrt{2}$$

como $b = -8 < 0$, x e y se eligen con signos distintos es decir: $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Luego $z = \sqrt{6-8i} = \pm\sqrt{2}(2-i)$

Ejemplo.- Resolver la ecuación $z^2 = -3 - 4i$

Desarrollo

Sea $w = -3 - 4i \Rightarrow a = -3$, $b = -4$, $\| w \| = 5$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\| w \| + a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 1 \quad ; \quad y = \pm\sqrt{\frac{\| w \| - a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm 2$$

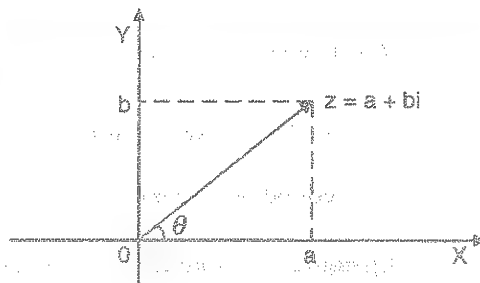
Como $b = -4 < 0$, x e y se eligen con signo distinto, es decir (1,-2) , (-1,2)

Luego $z = x + iy = \pm(1 - 2i)$

18.14. FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Sea $z = a + bi$, un número complejo distinto de cero, entonces el módulo de z es $r = \| z \| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$

Denotaremos por θ el ángulo formado por el segmento orientado que representa al número complejo z, con el eje X, en sentido antihorario.



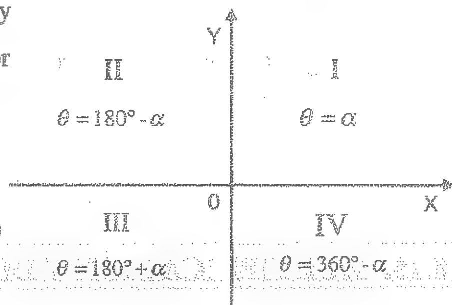
Luego del gráfico se tiene: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Como $z = a + bi$, al reemplazar a y b se tiene: $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

Que es llamado forma trigonométrica o forma polar del número complejo z.

Al ángulo "θ" se le llama argumento de z y $r = \| z \|$ es el módulo de z que denotaremos por

$$\theta = \arg(z) \quad , \quad r = \| z \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



por lo tanto: $z = a + bi = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$$r = \| z \| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo.- Expresar $z = 1 + \sqrt{3}i$ en forma trigonométrica o polar.

Desarrollo

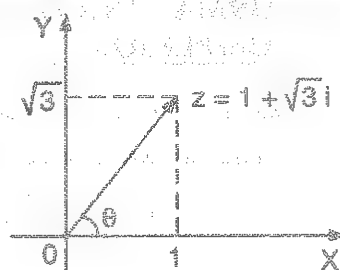
Calculamos su módulo y su argumento

$r = \|z\| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \text{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{1}) \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$

$z = 1+\sqrt{3}i = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$z = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$



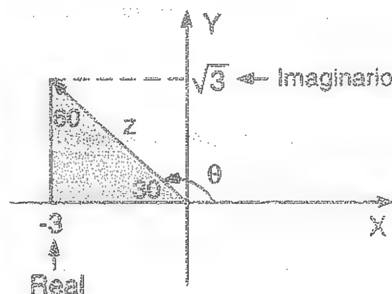
Ejemplo.- Expresar $z = -3+\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica o polar

Desarrollo

Calculando su módulo y su argumento.

$r = \|z\| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \|z\| = 2\sqrt{3}$

$\theta = \text{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{-3}) \Rightarrow \theta \in$ 2do. cuadrante.



Es decir $\theta = 180° - \alpha$, donde $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$

$z = -3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6})$

18.15. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR.-

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

Dos números complejos en su forma trigonométrica, entonces:

$$z_1.z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

Sí $z_2 \neq (0,0)$ y $r_2 \neq (0,0)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Ejemplo.- Sí $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$ y $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3})$

Entonces $z_1.z_2 = (3)(4)[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})] = 12(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3})}{3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})} = \frac{4}{3}[\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})] = \frac{4}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$$

18.16. POTENCIAS Y RAICES DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

a) TEOREMA (FÓRMULA DE MOIVRE).-

Para todo z = a + bi y todo entero positivo n se cumple la siguiente relación.

$$(a + bi)^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Llamada fórmula de MOIVRE

Demostración

La demostración lo haremos por inducción

i) Para n = 1, a + bi = r(cos θ + i sen θ)

ii) Para n = h, $(a + bi)^h = r^h(\cos h\theta + i\,\text{sen}\,h\theta)$

iii) Para n = h + 1, entonces:

$$(a + bi)^{h+1} = (a + bi)^h(a + bi) = r^h(\cos h\theta + i\,\text{sen}\,h\theta)r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= r^{h+1}(\cos(h\theta + \theta) + i\,\text{sen}(h\theta + \theta)) = r^{h+1}[\cos(h+1)\theta + i\,\text{sen}(h+1)\theta]$$

Por lo tanto se cumple la fórmula para todo entero positivo n.

Ejemplo.- Calcular $(1+\sqrt{3}\,i)^7$

Desarrollo

$$z=1+\sqrt{3}i \Rightarrow r=\|z\|=\sqrt{1+3}=2 \text{ y } \theta=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$$

$$(1+\sqrt{3}i)^7=2^7(\cos\frac{7\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3})=128(\cos\frac{7\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3})$$

b) **TEOREMA.-** Si z = a + bi es un número complejo y n es un entero positivo. La raíz n – ésima de z es $z^{1/n}=r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}]$ para valores de k = 0,1,..., n – 1.

Demostración

Sea w = x + iy, la raíz n –ésima de z, es decir: $w^n=z$

pero como z = r(cos θ + i sen θ) , w = ρ(cos α + i sen α)

$(x+iy)^n=a+bi$, reemplazando se tiene:

$\rho^n(\cos n\alpha+i\operatorname{sen} n\alpha)=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, de donde se obtiene:

$\rho^n=r$, $\alpha n=\theta+2k\pi$, k = 0,1,2,..., n – 1

Luego $\rho=r^{1/n}$, $\alpha=\frac{\theta+2k\pi}{n}$, k = 0,1,2,.., n – 1

Como w = ρ(cos α + i sen α) se tiene: $w=r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}]$

como w es la raíz n – ésima de z, se tiene:

$$z^{1/n}=r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}] \text{ para } k=0,1,2,.., n-1$$

Ejemplo.- Hallar las raíces de $(-4+4i)^{1/5}$

Desarrollo

Calculando su módulo y su argumento

$z = -4 + 4i \Rightarrow r = \| z \| = 4\sqrt{2}\,,\ \theta = \operatorname{arctg}(\frac{4}{-4}) \Rightarrow \theta \in$ 2do. cuadrante

Luego $\theta = 180° - \alpha$, donde $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

Por lo tanto $\theta = 180° - 45° \Rightarrow \theta = 135°$

$$(-4+4i)^{1/5} = (4\sqrt{2})^{1/5}[\cos\frac{135°+2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{135°+2k\pi}{5}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{135°+2k(180°)}{5} + i\operatorname{sen}\frac{135°+2k(180°)}{5}]$$

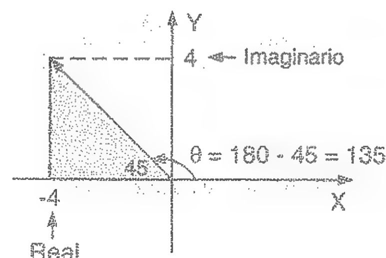
para $k = 0$, $w_1 = \sqrt{2}(\cos 27° + i\operatorname{sen} 27°)$

$k = 1$, $w_2 = \sqrt{2}(\cos 99° + i\operatorname{sen} 99°)$

$k = 2$, $w_3 = \sqrt{2}(\cos 171° + i\operatorname{sen} 171°)$

$k = 3$, $w_4 = \sqrt{2}(\cos 243° + i\operatorname{sen} 243°)$

$k = 4$, $w_5 = \sqrt{2}(\cos 315° + i\operatorname{sen} 135°)$



c) **RAICES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL.-**

Consideremos el número complejo z = 1 que expresado en forma polar es:

$z = 1 = 1 + 0i = \cos 0° + i \operatorname{sen} 0°$ para sacar la raíz cúbica aplicamos Moivre.

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1+0i} = \cos\frac{0°+2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{0°+2k\pi}{3}$$

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{3},\quad k = 0, 1, 2$$

para $k = 0$, $z_0 = \cos 0° + i\,\text{sen}\,0° = 1$

para $k = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

para $k = 2$, $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

OBSERVACIÓN.- Las raíces cúbicas de la unidad real son:

$$1;\ \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}_{\text{conjugados}}$$

Como $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ entonces si $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, las raíces cúbicas de 1 son 1, w, w^2, es decir: $\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2 \end{cases}$ se observa que: $1 + w + w^2 = 0$

d) **TEOREMA.-** Sea $z = a + bi$, definimos $z^{\frac{m}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^m$, para m y n enteros positivos, donde m y n son primos entre sí, se cumple la relación

$$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}\,\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)] \text{ donde } r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \text{arctg}(\frac{b}{a})$$

Ejemplo.- Efectuar la operación $(1 + \sqrt{3}\,i)^{5/6}$

Desarrollo

Calculamos $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$$\theta = arctg(\frac{b}{a}) = arctg(\frac{\sqrt{3}}{1}) = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$(1+\sqrt{3}i)^{5/6} = 2^{5/6}[\cos\frac{5}{6}(\frac{\pi}{3}+2k\pi)+i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}(\frac{\pi}{3}+2k\pi)]$$

para k = 0 , $w_1 = 2^{5/6}(\cos 50° + i\,\text{sen}\, 50°)$

k = 1 , $w_2 = 2^{5/6}(\cos 350° + i\,\text{sen}\, 350°)$

k = 2 , $w_3 = 2^{5/6}(\cos 290° + i\,\text{sen}\, 290°)$

k = 3 , $w_4 = 2^{5/6}(\cos 230° + i\,\text{sen}\, 230°)$

k = 4 , $w_5 = 2^{5/6}(\cos 170° + i\,\text{sen}\, 170°)$

k = 5 ; $w_6 = 2^{5/6}(\cos 110° + i\,\text{sen}\, 110°)$

18.17. EXPONENCIALES COMPLEJOS (FÓRMULA DE EULER).-

Por el momento admitiremos la definición de la exponencial real.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

que más adelante demostraremos, en dicha expresión observamos que:

$e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x . e^y$

Definimos la exponencial compleja por: $e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\, x$ (e: número de Euler) que es llamado la fórmula de Euler.

Sí $z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\, y)$

Cuando $y = 0$, $e^z = e^x$ se obtiene la función exponencial real.

Cuando $x = 0$, $e^z = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, se obtiene la fórmula de Euler.

PROPIEDADES.- Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$P_1.-$ $e^{z+w} = e^z . e^w$ $P_2.-$ $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

$P_3.-$ Si $e^z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi i$, n es un entero.

$P_4.-$ $(e^z)^n = e^{nz}$, n es un entero

Si en la fórmula de Euler sustituimos x por –x, es decir:

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x}$ se obtiene: $e^{-ix} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)$ de donde:

$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x}$

Luego $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + isenx \\ e^{-ix} = \cos x - isenx \end{cases}$, entonces $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, de donde

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \quad \ldots (1)$$

analógicamente para el sen x, se tiene:

$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + isenx \\ e^{-ix} = \cos x - isenx \end{cases}$, entonces $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \operatorname{sen} x$, de donde

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} \quad \ldots (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) sirven para el estudio de las funciones trigonométricas.

Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ entonces $z = re^{i\theta}$ es la fórmula compleja del complejo z, donde $r = \| z \|$ y θ se denomina argumento de z que es denotado por $\theta = \arg(z)$

Ejemplo.- Sí $z = e^{i\theta} \Rightarrow \|z\| = 1$

Desarrollo

Como $z = e^{i\theta} \Rightarrow z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ de donde

$$\|z\| = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} = 1 \Rightarrow \|z\| = 1$$

Ejemplo.- Probar que: $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

Desarrollo

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0 + i = i \qquad \therefore \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

18.18. LOGARITMO EN LOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

La exponencial compleja $z = re^{i\theta}$ es un número complejo, el valor de θ se denomina argumento principal de z, que denotaremos por: $\theta = \arg(z)$, para todo complejo $z \neq 0$, le corresponde solamente un valor de θ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sin embargo cualquier otro intervalo de longitud 2π por ejemplo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se puede emplear.

El logaritmo complejo es la inversa de la exponencial compleja, es decir: Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo $\Rightarrow \exists\ w \in C$ único tal que $r = \|z\|$ y $\theta = \arg(z)$

Generalizando se tiene: $\boxed{\ln z = w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)}$

El valor principal de ln z es el que se obtiene cuando $k = 0$, es decir: V.P. de $\ln z = \ln r + i\theta$

Ejemplo.- Hallar ln z, donde $z = 1 - i$

Desarrollo

$$z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \ \text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$\ln z = \ln(1-i) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + (\frac{7}{4} + 2k)\pi i$

y el V.P. de $\ln Z = \ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} i$

18.19. EXPONENCIAL COMPLEJA GENERAL.-

Sean z_1 y z_2 donde $z_1 \neq 0$, entonces consideremos la exponencial compleja $w = z_1^{z_2}$, aplicando logaritmos en base natural se tiene:

$\ln w = \ln z_1^{z_2} = z_2 \ln z_1$, y por definición se tiene: $\boxed{w = e^{z_2 \ln z_1}}$

18.20. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar los valores de x e y, si: (1 + 2i)x + (3 – 5i)y = 1 – 3i y dar el valor de: E = x + y.

a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{4}{11}$ c) $\frac{1}{11}$ d) $\frac{3}{11}$ e) $\frac{7}{11}$

Desarrollo

Sean $z_1 = 1 + 2i = (1,2)$; $z_2 = 3 - 5i = (3,-5)$; $z_3 = 1 - 3i = (1,-3)$

Como (1 + 2i)x + (3 – 5i)y = 1 – 3i, al reemplazar se tiene:

(1,2)x + (3,-5)y = (1,-3), efectuando las operaciones

(x + 3y, 2x – 5y) = (1,-3), por igualdad de números complejos

$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$, resolviendo el sistema: $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$

Luego $E = x + y = -\frac{4}{11} + \frac{5}{11} = \frac{1}{11}$, la respuesta es $\boxed{c}$

(2) Calcular E = b – a, sabiendo que: (-1 + i)a + (1+ 2i)b = 1

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Sean $z_1 = -1 + i = (-1,1)$; $z_2 = 1 + 2i = (1,2)$; $z_3 = 1 = 1 + 0i = (1,0)$

Como $(-1 + i)a + (1 + 2i)b = 1$, al reemplazar se tiene:

$(-1,1)a + (1,2)b = (1,0)$, efectuando las operaciones

$(-a + b, a + 2b) = (1,0)$, por igualdad de números complejos

$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases}$, resolviendo el sistema $a = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{1}{3}$

Luego $E = b - a = \frac{1}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, la respuesta es **a**

(3) La expresión: $\frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3}$, donde $i = \sqrt{-1}$ es igual a:

a) $1 - 3i$ b) -2 c) 10 d) 2 e) -10

Desarrollo

Sea $E = \frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3}$, efectuando las operaciones indicadas

$$= \frac{(1+2i+i^2)(1+3i)}{i-3} = \frac{(1+2i-1)(1+3i)}{i-3}, \text{ simplificando}$$

$$= \frac{2i(1+3i)}{i-3} = \frac{2(i+3i^2)}{i-3} = \frac{2(i-3)}{i-3} = 2, \text{ por lo tanto la respuesta es } \boxed{d}$$

(4) Sean los números complejos: m = 1 + yi; n = u + vi, donde $i = \sqrt{-1}$; u y v son enteros positivos. Si además se cumple: m + n = a + 7i y m.n = -7 + 11i. Siendo "a" un número entero comprendido entre 2 y 8; calcular $a^2 + y^2 + u^2 + v^2$

a) 48 b) 50 c) 52 d) 54 e) 56

Desarrollo

Como m + n = 1 + yi + u + vi = (u + 1) + (y + v)i = a + 7i

Es decir: (u + 1) + (y + v)i = a + 7i, por igualdad se tiene: $\begin{cases} u+1=a & \dots (1) \\ y+v=7 & \dots (2) \end{cases}$

además m.n = (1 + yi)(u + vi) = (u – vy) + (v + uy)i = -7 + 11i

es decir: (u – vy) + (v + uy)i = -7 + 11i, por igualdad se tiene:

$\begin{cases} u - vy = -7 \\ v + uy = 11 \end{cases}$ de donde $\begin{cases} u = -7 + vy & \dots (3) \\ u = \dfrac{11-v}{y} & \dots (4) \end{cases}$, igualando

$-7 + vy = \dfrac{11-v}{y}$ entonces $vy^2 - 7y = 11 - v$ como v = 7 – y

$(7-y)y^2 - 7y = 11 - 7 + y$ de donde $y^3 - 7y^2 + 8y + 4 = 0$

como $y^3 - 7y^2 + 8y + 4 = 0$, factorizando se tiene:

$(y-2)(y^2 - 5y - 2) = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \qquad \therefore\ y = 2$

las demás raíces no son enteras

Luego y = 2 se reemplaza en (2) y en (3) y (1)

v = 7 – 2 = 5 ; u = -7 + 10 = 3 ; a = 4

Luego $a^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 16 + 4 + 9 + 25 = 54$, la respuesta es **d**

(5) Si $A = \dfrac{(\frac{1}{i} + \frac{1}{3} - \frac{a}{3i})(i + 3 + a)}{(-1 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3i}) + \frac{a^2}{9}}$, donde $i = \sqrt{-1}$, calcular $A^4 + 1$

a) i + 1 b) 80i + 1 c) 81 d) 82 e) a + 81

Desarrollo

$$A=\frac{(\frac{1}{i}+\frac{1}{3}-\frac{a}{3i})(i+3+a)}{(-1+\frac{1}{9}+\frac{2}{3i})+\frac{a^2}{9}}=\frac{(\frac{3+i-a}{3i})(i+3+a)}{\frac{-9i+i+6+a^2i}{9i}}\text{, simplificando}$$

$$=\frac{3(3+i-a)(i+3+a)}{-8i+6+a^2i}=\frac{3[(3+i)^2-a^2]}{-8i+6+a^2i}=\frac{3[9+6i+i^2-a^2]}{-8i+6+a^2i}=\frac{3(8+6i-a^2)}{-8i+6+a^2i}$$

$$=\frac{3i(8+6i-a^2)}{i(-8i+6+a^2i)}=\frac{3i(8+6i-a^2)}{-8i^2+6i+a^2i^2}=\frac{3i(8+6i-a^2)}{8+6i-a^2}=3i$$

como A = 3i $\Rightarrow$ $A^4=(3i)^4=3^4i^4=81$

Luego $A^4+1=81+1=82$, la respuesta es **d**

⑥ Efectuar: $\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$

a) 1+ i   b) 1 − i   c) i   d) $\sqrt{2i}$ e) $\frac{-1+i}{2}$

Desarrollo

Se conoce que $i=i^5$ de donde $\sqrt[5]{i}=\sqrt[5]{i^5}=i$

Reemplazando en $E=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}}=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}$ ... (1)

también: $2i=(1+i)^2 \Rightarrow \sqrt{2i}=1+i$, reemplazando en (1)

$E=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}=\sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}}=\sqrt{2\sqrt{-1}}=\sqrt{2i}=1+i$, la respuesta es **a**

⑦ El valor de la expresión $(\frac{1+i}{1-i})^{30}$ es:

a) i   b) $1-2\sqrt{3}i$ c) -1   d) $\sqrt{3}-i$ e) 1 + i

Desarrollo

$$E=(\frac{1+i}{1-i})^{30}=(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)})^{30}=(\frac{1+2i-1}{1-(-1)})^{30}=i^{30}=(i^2)^{15}=(-1)^{15}=-1$$

Por lo tanto la respuesta es **c**

(8) La simplificación de: $E=\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$ es:

a) 1 + i b) 2 + i c) 1 – i d) 2 – i e) i

Desarrollo

$$i^4+i^9+i^{16}=(i^2)^2+i(i^2)^4+(i^2)^8=(-1)^2+i(-1)^4+(-1)^8=1+i+1=2+i$$

$$2-i^5+i^{10}-i^{15}=2-i(i^2)^2+(i^2)^5-i(i^2)^7=2-i-1+i=1$$

Luego $E=\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}=\dfrac{2+i}{1}=2+i$, la respuesta es **b**

(9) La simplificación de $z=\dfrac{\sqrt{2-i}+i\sqrt{2+i}}{\sqrt{2+i}-i\sqrt{2-i}}$ es:

a) 1 b) 2 c) i d) 2i e) 4

Desarrollo

$$z=\frac{\sqrt{2-i}+i\sqrt{2+i}}{\sqrt{2+i}-i\sqrt{2-i}}=\frac{i(\sqrt{2+i}-i\sqrt{2-i})}{\sqrt{2+i}-i\sqrt{2-i}}=i$$

como z = i la respuesta es **c**

(10) Hallar el valor de $z=4i^{4043}-3i^{1080}+2i^{1050}$

a) 3i b) 2 + 3i c) 3 – 2i d) -5 – 4i e) 5 + 3i

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $i^{\overset{o}{4}+k} = i^k$, $\forall$ k $\in$ Z, $i^{\overset{o}{4}} = 1$

Como $4043 = \underbrace{4040}_{\substack{\text{múltiplo}\\ \text{de 4}}} + 3 = \overset{o}{4}+3$; $1080 = \overset{o}{4}$, $1050 = \underbrace{1048}_{\substack{\text{múltiplo}\\ \text{de 4}}} + 2 = \overset{o}{4}+2$

Luego $z = 4i^{4043} - 3i^{1080} + 2i^{1050} = 4.i^{\overset{o}{4}+3} - 3i^{\overset{o}{4}} + 2i^{\overset{o}{4}+2}$

$= 4i^3 - 3 + 2i^2 = -4i - 3 - 2 = -5 - 4i$, como z = -5 – 4i, la respuesta es **d**

(11) Determinar el valor de x, si 3ix = 5 – 2i

a) $-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i$ b) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i$ c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ d) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ e) $-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$

Desarrollo

3ix = 5 – 2i de donde $x = \frac{5-2i}{3i} = \frac{(5-2i)(-i)}{3i(-i)} = \frac{-5i+2i^2}{-3i^2} = \frac{-5i-2}{3} = -\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i$

Luego $x = -\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i$, la respuesta es **a**

(12) La simplificación de: $z = \frac{-a-b-1+(a^2+ab+a)i}{(a+b+1)i}$; a + b ≠ -1 es:

a) i b) a + i c) a – i d) ai e) a

Desarrollo

Agrupando convenientemente la parte real y la parte imaginaria

$z = \frac{-a-b-1+(a^2+ab+a)i}{(a+b+1)i} = \frac{-(a+b+1)+a(a+b+1)i}{(a+b+1)i}$, sacando factor común

$= \frac{(a+b+1)(-1+ai)}{(a+b+1)i} = \frac{-1+ai}{i}$, multiplicando por su conjugada

$$=\frac{(-1+ai)(-i)}{i(-i)}=\frac{i-ai^2}{-i^2}=\frac{i+a}{1}=a+i$$, por lo tanto la respuesta es **b**

(13) Calcular el módulo del complejo $z=\frac{(4+3i)^2(-1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^5}$

a) $\frac{13}{8}$ b) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{21}{8}$ d) $\frac{23}{8}$ e) $\frac{25}{8}$

Desarrollo

Aplicando las propiedades: $\|zw\|=\|z\|\|w\|$; $\|\frac{z}{w}\|=\frac{\|z\|}{\|w\|}$, $w\neq 0$, $\|z^n\|=\|z\|^n$

$\forall$ z, w $\in$ C y n $\in$ Q, es decir en la forma:

$$\|z\|=\|\frac{(4+3i)^2(-1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^5}\|=\frac{\|4+3i\|^2\|-1+i\|^4}{\|\sqrt{3}+i\|^5}=\frac{\sqrt{16+9}^2\sqrt{1+1}^4}{\sqrt{3+1}^5}$$

$$=\frac{25(2)^2}{2^5}=\frac{25}{8}$$, la respuesta es **e**

(14) Resolver $\frac{5i}{x-y}=\frac{y-i}{1+i}$, indicar el valor de x + y.

a) -5 b) -3 c) -1 d) 1 e) 3

Desarrollo

Como $\frac{5i}{x-y}=\frac{y-i}{1+i}$; racionalizando el segundo miembro

$$\frac{5i}{x-y}=\frac{(y-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{y-1}{2}-\frac{1+y}{2}i$$, por igualdad

$$0+\frac{5}{x-y}i=\frac{y-1}{2}-\frac{1+y}{2}i \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} \frac{y-1}{2}=0 & \ldots (1) \\ \frac{5}{x-y}=-\frac{1+y}{2} & \ldots (2) \end{cases}$$

de (1) se tiene: $\frac{y-1}{2}=0$ de donde $\boxed{y=1}$ se reemplaza en (2)

$\frac{5}{x-1}=-\frac{1+1}{2}=-1$ entonces 5 = -(x – 1) de donde $\boxed{x=-4}$

Luego x + y = -4 + 1 = -3, la respuesta es **b**

(15) La simplificación de $z=\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}-\frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$ es:

a) -3 – 2i   b) 3 + 2i   c) 2 + 3i   d) 2 – 3i   e) 3 – 2i

Desarrollo

$$\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}=3(\frac{1+i}{1-i})^2=3[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}]^2=3(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2})^2=3(\frac{2i}{2})^2=3i^2=-3$$

$$2\frac{(1-i)^3}{(1+i)^3}=2[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}]^3=2(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2})^3=2(-\frac{2i}{2})^3=-2i^3=2i$$

ahora reemplazamos en la expresión dada

$z=\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}-2\frac{(1-i)^3}{(1+i)^3}=-3-2i$, la respuesta es **a**

(16) Si z es un número complejo tal que $\|z\|=1$, calcular $\|1+z\|^2+\|1-z\|^2$

a) 2   b) 3   c) 4   d) 5   e) 6

Desarrollo

Aplicando la propiedad $\|z\|^2=z.\bar{z}$ es decir:

$$\|1+z\|^2+\|1-z\|^2=(1+z)(\overline{1+z})+(1-z)(\overline{1-z})=(1+z)(1+\bar{z})+(1-z)(1-\bar{z})$$

$$=1+z+\bar{z}+z\bar{z}+1-z-\bar{z}+z\bar{z}\text{, simplificando}$$

$$=2+2z\bar{z}=2+2\|z\|^2=2+2=4\text{, puesto que } \|z\|=1$$

por lo tanto la respuesta es **c**

(17) Si $z=\dfrac{i-a}{1+2ai}$, donde "a" es un número real, calcular $\| z-\dfrac{3i}{4}\|$

a) 4 b) $\dfrac{1}{4}$ c) 3 d) $\dfrac{1}{3}$ e) 2

Desarrollo

$$z-\frac{3}{4}i=\frac{i-a}{1+2ai}-\frac{3}{4}i=\frac{2a+i}{4+8ai}=\frac{(2a+i)(4-8ai)}{(4+8ai)(4-8ai)}=\frac{16a}{16+64a^2}+\frac{4-16a^2}{16+64a^2}i$$

$z-\dfrac{3}{4}i=\dfrac{16a}{16+64a^2}+\dfrac{4-16a^2}{16+64a^2}i$, donde su modulo es dado por:

$$\| z-\frac{3}{4}i\|=\sqrt{(\frac{16a}{16+64a^2})^2+(\frac{4-16a^2}{16+64a^2})^2}=\sqrt{(\frac{a}{1+4a^2})^2+(\frac{1-4a^2}{4+16a^2})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{(1+4a^2)^2}+\frac{1}{16}\frac{(1-4a^2)^2}{(1+4a^2)^2}}=\sqrt{\frac{16a^2+1-8a^2+16a^4}{16(1+4a^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+8a+16a^4}{16(1+4a^2)^2}}=\sqrt{\frac{(1+4a^2)^2}{16(1+4a^2)^2}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$

por lo tanto la respuesta es **b**

(18) El módulo de $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ es:

a) 4 b) $|\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}|$ c) $|\cos\dfrac{\theta}{2}|$ d) $|\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}|$ e) $|\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}|$

Desarrollo

Aplicando las identidades $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=1+\cos\theta$, $2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}=1-\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta=2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ se tiene:

$$z=\frac{1+\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}+2i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\,\text{sen}\frac{\theta}{2})}{\text{sen}\frac{\theta}{2}(\text{sen}\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$z=\text{ctg}\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\text{sen}\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}}\right)\Rightarrow\ \|z\|=|\,\text{ctg}\frac{\theta}{2}\,|\,\frac{\|\cos\frac{\theta}{2}+i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\|}{\|\text{sen}\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\|}$$

$$\|z\|=|\,\text{ctg}\frac{\theta}{2}\,|\,\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}+\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}}=|\,\text{ctg}\frac{\theta}{2}\,|\left(\frac{1}{1}\right)=|\,\text{ctg}\frac{\theta}{2}\,|,$$ por lo tanto la respuesta es **d**

(19) Si $(1+i)^3=a+b+ci$, $\{a,b,c\}\subseteq R$, $ab\neq 0$, calcular $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$

a) -2 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Desarrollo

$$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$$

como $(1+i)^3=a+b+ci$ entonces -2 + 2i = a + b + ci, de donde

$$\begin{cases}a+b=-2\\ c=2\end{cases}\quad\text{entonces}\quad (a+b)^2=4\ \Rightarrow\ a^2+b^2+2ab=4\ \Rightarrow\ a^2+b^2=4-2ab$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{4-2ab-4}{ab}=-\frac{2ab}{ab}=-2$$, la respuesta es **a**

Calcular k en la ecuación $\frac{(1+i)^{2k}(3-5i)^k}{(3i+5)^k}=128$

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

$\dfrac{(1+i)^{2k}(3-5i)^k}{(3i+5)^k}=128$ entonces $[\dfrac{(1+i)^2(3-5i)}{3i+5}]^k=128$

$[\dfrac{(1+i)^2(-i)(5+3i)}{5+3i}]^k=128$ entonces $[(1+2i-1)(-i)]^k=128$

$(-2i^2)^k=128=2^7$ de donde $2^k=2^7$ entonces k = 7, la respuesta es **c**

(21) La simplificación de $z=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}$ es:

a) 3 – 2i b) 3 – i c) 1 + i d) 2 + 3i e) i

Desarrollo

Como $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i \Rightarrow 1+i=\sqrt{2i}$

$z=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}=\sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}}=\sqrt{2\sqrt{-1}}=\sqrt{2i}=1+i$

por lo tanto la respuesta es **c**

(22) Hallar el módulo del número complejo $z=1+\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}$

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) 3 d) $\sqrt{3}$ e) 1

Desarrollo

Se conoce que $\dfrac{1+i}{1-i}=i$ por lo tanto se tiene: $z=1+\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}=1+\dfrac{1+i}{1-i}=1+i$

z = 1 + i $\Rightarrow \|z\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, la respuesta es **b**

(23) Hallar la parte real de z (Re(z)) donde $z=\dfrac{(2+2\sqrt{3}\,i)^{-2}}{(1-i)^{-2}}$

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{16}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{16}$ e) $\dfrac{1}{16}$

Desarrollo

Expresamos al numero complejo z en la forma binomica

$$z=\frac{(2+2\sqrt{3}i)^{-2}}{(1-i)^{-2}}=\frac{(1-i)^2}{(2+2\sqrt{3}i)^2}=\frac{1-2i+i^2}{4+8\sqrt{3}i+12i^2}=\frac{1-2i-1}{4+8\sqrt{3}i-12}$$

$$=\frac{-2i}{-8+8\sqrt{3}i}=\frac{i}{4-4\sqrt{3}i}=\frac{i(4+4\sqrt{3}i)}{(4-4\sqrt{3}i)(4+4\sqrt{3}i)}=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{16+48}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{64}=-\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{i}{16}$$ de donde $\operatorname{Re}(z)=-\frac{\sqrt{3}}{16}$, por lo tanto la respuesta es **c**

(24) Hallar la parte imaginaria de $z=\frac{(\sqrt{2}+i)^{-2}}{(\sqrt{2}-i)^{-2}}$

a) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ b) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{9}$ e) $\frac{4}{9}$

Desarrollo

Expresando z en la forma binómica se tiene:

$$z=\frac{(\sqrt{2}+i)^{-2}}{(\sqrt{2}-i)^{-2}}=\frac{(\sqrt{2}-i)^2}{(\sqrt{2}+i)^2}=\frac{2-2\sqrt{2}i+i^2}{2+2\sqrt{2}i+i^2}=\frac{2-2\sqrt{2}i-1}{2+2\sqrt{2}i-1}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}=\frac{(1-2\sqrt{2}i)(1-2\sqrt{2}i)}{(1+2\sqrt{2}i)(1-2\sqrt{2}i)}=\frac{1-4\sqrt{2}i+8i^2}{1+8}$$

$$=\frac{1-4\sqrt{2}i-8}{9}=-\frac{7}{9}-\frac{4\sqrt{2}}{9}i$$ de donde $\operatorname{Im}(z)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, la respuesta es **b**

(25) La simplificación de $z=\frac{(1-i)^{302}+(1+i)^{301}}{(1+i)^{302}+(1-i)^{301}}$ es:

a) i b) -i c) 1 + i d) 1 − i d) 2i

Desarrollo

$$z=\frac{(1-i)^{302}+(1+i)^{301}}{(1+i)^{302}+(1-i)^{301}}=\frac{(1-i)^{300}(1-i)^{2}+(1+i)^{300}(1+i)}{(i+1)^{300}(1+i)^{2}+(1-i)^{300}(1-i)} \quad \ldots (1)$$

como $(1-i)^{300}=(1-i)^{4}=4^{75}$, $(1+i)^{300}=(1+i)^{4}=4^{75}$

ahora reemplazamos en (1) obteniéndose:

$$z=\frac{4^{75}(1-i)^2+(1+i)4^{75}}{4^{75}(1+i)^2+(1-i)4^{75}}=\frac{1-2i+i^2+1+i}{1+2i+i^2+1-i}=\frac{1-i}{1+i}=-i$$; por lo tanto la respuesta es **b**

(26) Hallar el valor de la siguiente expresión $[(\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i})^{\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1+i}{1-i}}]^{-2i}$

a) $\frac{1}{16}$ b) 2i c) 3i d) -i e) 118

Desarrollo

Se conoce que: $\frac{1+i}{1-i}=i$ y $\frac{1-i}{1+i}=-i$, reemplazando

$$[(\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i})^{\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1+i}{1-i}}]^{-2i}=[(-i-i)^{-i\cdot i}]^{-2i}=[(-2i)^{-2i}]^{2i}=(-2i)^{-4}=\frac{1}{(2i)^4}=\frac{1}{16i^4}=\frac{1}{16}$$

por lo tanto la respuesta es **a**

(27) Si i es la unidad imaginaria, al efectuar la siguiente operación $2(1+i)^{16}-(1-i)^{16}$ se obtiene:

a) 0 b) 1 c) -256 d) 512i e) 256

Desarrollo

$$(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(1+2i+i^2)^2=(1+2i-1)^2=(2i)^2=-4$$

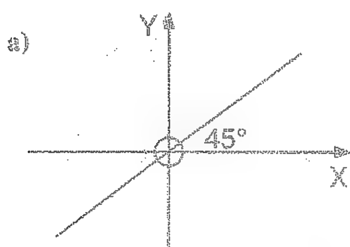
$$(1-i)^4=((1-i)^2)^2=(1-2i+i^2)^2=(1-2i-1)^2=(-2i)^2=-4$$

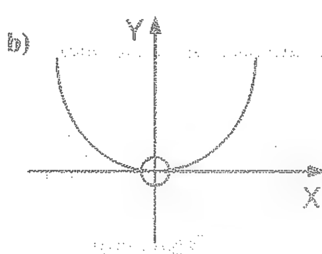
por lo tanto $(1+i)^4=(1-i)^4=-4$

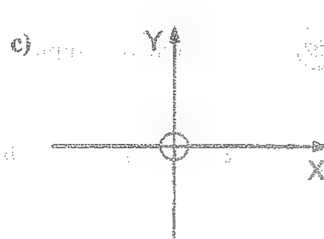
$$2(1+i)^{16}-(1-i)^{16}=2((1+i)^4)^4-((1-i)^4)^4=2(-4)^4-(-4)^4=2(256)-256=256$$

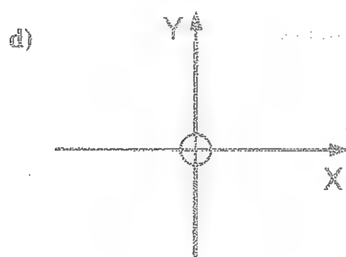
por lo tanto la respuesta es **e**

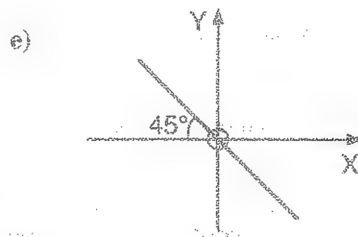
(28) Sea $z=(x,y)$ un número complejo de modo que $z^{-1}=(x^{-1},y)$ es su número complejo recíproco. La gráfica del complejo z es:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Desarrollo

Como $z=x+yi \wedge z^{-1}=(x^{-1},y)$, $z\neq(0,0)$, además se sabe que:

$z.z^{-1}=(1,0)$ de donde $(x,y).(x^{-1},y)=(1,0)$ operando

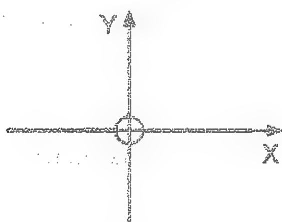
$(x.x^{-1}-y^2, y.x^{-1}+xy)=(1,0)$ por igualdad se tiene:

$(1-y^2, y(x^{-1}+x))=(1,0)$, de donde

$\begin{cases} 1-y^2=1 \\ y(x^{-1}+x)=0 \end{cases}$ entonces $x^{-1}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ y por lo tanto $x^{-1}+x\neq 0$

Luego $1-y^2=1 \wedge y=0 \Rightarrow y=0 \wedge x\neq 0$

Luego $z=(x,0) \wedge x\neq 0$, es decir z es un número complejo real no nulo y su gráfica es:



por lo tanto la respuesta es **c**

(29) Un número complejo que satisface las ecuaciones: $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{6}{25} \wedge \|\frac{1}{z}\|=\frac{1}{5}$ es:

a) $3-4i$ b) $4+3i$ c) $\frac{5}{3+4i}$ d) $\frac{5}{3-4i}$ e) $\frac{5}{\sqrt{3}}+i$

Desarrollo

Se conoce que: $z.\bar{z}=\|z\|^2 \wedge z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$ entonces

$\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{6}{25}$ entonces $\frac{z+\bar{z}}{z.\bar{z}}=\frac{6}{25}$, reemplazando

$\frac{2\operatorname{Re}(z)}{\|z\|^2}=\frac{6}{25}$ pero $\|\frac{1}{z}\|=\frac{1}{5}$ entonces $\|z\|=5$

Luego $\frac{2\operatorname{Re}(z)}{25}=\frac{6}{25}$ de donde $\operatorname{Re}(z)=3$

Como $\|z\|=5 \Rightarrow \|z\|^2=25 \Rightarrow \operatorname{Re}^2(z)+\operatorname{Im}^2(z)=25$

$9+\operatorname{Im}^2(z)=25$ entonces $\operatorname{Im}^2(z)=16 \Rightarrow \operatorname{Im}(z)=\pm 4$

como $z=x+iy=\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)=3\pm 4i$

como $z=3-4i$, la respuesta es **a**

(30) Hallar los valores de a y b sabiendo que: $\frac{1}{a+bi}+(\frac{1+i}{1-i})^2=1+i$ e indicar el valor de a+ 2b

a) -1 b) 0 c) 1 d) 3 e) 5

Desarrollo

Se conoce que $\frac{1+i}{1-i}=i$, luego al reemplazar en la expresión dada se tiene:

$\frac{1}{a+bi}+(\frac{1+i}{1-i})^2=1+i$ entonces $\frac{1}{a+bi}+i^2=1+i$ como $i^2=-1$

entonces $\frac{1}{a+bi}-1=1+i$ de donde $\frac{1}{a+bi}=2+i$

intercambiando los términos $a+bi=\frac{1}{2+i}$

$$a+bi=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{4-i^2}=\frac{2-i}{4+1}=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$$

como $a+bi=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ de donde por igualdad se tiene:

$a=\frac{2}{5} \wedge b=-\frac{1}{5}$, calculando $a+2b=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$, entonces la respuesta es **b**

(31) Calcular el menor valor de "n" que verifique: $(1+i)^n=32i$

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Desarrollo

En este caso al número complejo 32i se debe expresar en la forma de una potencia de (1 + i), es decir:

$32i=2^5i=2^5i^5=(2i)^5$ pero $(1+i)^2=2i$ entonces

$32i=(2i)^5=((1+i)^2)^5=(1+i)^{10}$ luego

$(1+i)^n=32i=(1+i)^{10}$ de donde n = 10, por lo tanto la respuesta es **d**

(32) Demostrar que: $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}=i^n(1-i)$

Desarrollo

$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}=\frac{(1+i)^n(1-i)}{(1-i)^n}=(\frac{1+i}{1-i})^n(1-i)$ pero $\frac{1+i}{1-i}=i$

$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}=(\frac{1+i}{1-i})^n(1-i)=i^n(1-i)$

(33) Calcular i^n, donde n es un entero.

Desarrollo

Si n es un entero par se tiene:

a) $n=4k,\ k\in Z$, entonces $i^n=i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1$

b) $n=4k+2,\ k\in Z$, entonces $i^n=i^{4k+2}=i^{4k}.i^2=-1$

Si n es un entero impar se tiene:

a) $n=4k+1,\ k\in Z$, entonces $i^n=i^{4k+1}=i^{4k}.i=i$

b) $n=4k+3,\ k\in Z$, entonces $i^n=i^{4k+3}=i^{4k}.i^3=-i$

(34) Demostrar que: $\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

Desarrollo

Sea $z=x+iy$ de donde $\bar{z}=x-iy$, luego sumamos

$\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{x+iy+x-iy}{2}=\frac{2x}{2}=x=\operatorname{Re}(z)$ $\therefore\ \operatorname{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

(35) Demostrar que: $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

Desarrollo

Sea $z=x+iy$ de donde $\bar{z}=x-iy$, luego restamos.

$$\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i}=\frac{2iy}{2i}=y=\text{Im}(z) \qquad \therefore \quad \text{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

(36) Demostrar que: $\text{Im}(z_1.z_2)=\text{Re}(z_1)\,\text{Im}(z_2)+\text{Im}(z_1)\,\text{Re}(z_2)$

Desarrollo

Aplicando el ejercicio (35) $\text{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ se tiene:

$$\text{Im}(z_1 z_2)=\frac{z_1 z_2-\overline{z_1 z_2}}{2i}=\frac{2z_1 z_2-2\overline{z_1 z_2}}{4i}=\frac{z_1 z_2-\bar{z}_1\bar{z}_2}{4i}+\frac{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2}{4i}$$

$$=\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}.\frac{z_2-\bar{z}_2}{2i}+\frac{z_1-\bar{z}_1}{2i}.\frac{z_2+\bar{z}_2}{2}=\text{Re}(z_1).\text{Im}(z_2)+\text{Im}(z_1).\text{Re}(z_2)$$

$\therefore \quad \text{Im}(z_1 z_2)=\text{Re}(z_1)\,\text{Im}(z_2)+\text{Im}(z_1)\,\text{Re}(z_2)$

(37) Demostrar la identidad: $\|1-\bar{z}w\|^2-\|z-w\|^2=(1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$

Desarrollo

Se conoce que: $\|z\|^2=z.\bar{z}$, por lo tanto se tiene:

$$\|1-\bar{z}w\|^2=(1-\bar{z}w)\overline{(1-\bar{z}w)}=(1-\bar{z}w)(1-z\bar{w})$$

$$\|z-w\|^2=(z-w)\overline{(z-w)}=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$\|1-\bar{z}w\|^2-\|z-w\|^2=(1-\bar{z}w)(1-z\bar{w})-(z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$=(1-\bar{z}w-z\bar{w}+z\bar{z}.w\bar{w})-(z\bar{z}-\bar{z}w-z\bar{w}+w.\bar{w})=1+\bar{z}.z.w.\bar{w}-z.\bar{z}-w.\bar{w}$$

$$=1+\|z\|^2\|w\|^2-\|z\|^2-\|w\|^2=(1-\|z\|^2)-\|w\|^2\,(1-\|z\|^2)=(1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$$

$\therefore \quad \|1-\bar{z}w\|^2-\|z-w\|^2=(1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$

(38) Probar que: $\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$

Desarrollo

$$\|z_1+z_2\|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}$$

$$=\|z_1\|^2+\|z_2\|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1} \qquad \ldots (1)$$

$$\|z_1-z_2\|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}$$

$$=\|z_1\|^2+\|z_2\|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1} \qquad \ldots (2)$$

al sumar (1) y (2) se obtiene:

$$\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=\|z_1\|^2+\|z_2\|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+\|z_1\|^2+\|z_2\|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}$$

$$=2\|z_1\|^2+2\|z_2\|^2=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$$

$$\therefore \ \|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$$

(39) Si $z, w \in \mathbb{C}$, demostrar que: $\operatorname{Re}(\frac{z}{z+w})+\operatorname{Re}(\frac{w}{z+w})=1$

Desarrollo

Sean $z=a+bi$, $w=c+di$, de donde al sumar se tiene:

$z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$$\frac{z}{z+w}=\frac{a+bi}{(a+c)(b+d)i}=\frac{(a+bi)[(a+c)-(b+d)i]}{[(a+c)+(b+d)i][(a+c)-(b+d)i]}$$

$$=\frac{(a+c)a+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{a(b+d)+c(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}i\text{ , de donde}$$

$$\operatorname{Re}(\frac{z}{z+w})=\frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{w}{z+w}=\frac{c+di}{(a+c)+(b+d)i}=\frac{(c+di)[(a+c)-(b+d)i]}{[(a+c)+(b+d)i][(a+c)-(b+d)i]}$$

$$= (\frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}) + (\frac{d(a+c)-c(b+d)}{(a+c^2)+(b+d)^2})i \text{, de donde}$$

$$\text{Re}(\frac{w}{z+w}) = \frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad \ldots (2)$$

al sumar (1) y (2) se obtiene:

$$\text{Re}(\frac{z}{z+w}) + \text{Re}(\frac{w}{z+w}) = \frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} + \frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$= \frac{(a+c)(a+c)+(b+d)(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} = \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} = 1$$

$$\therefore \quad \text{Re}(\frac{z}{z+w}) + \text{Re}(\frac{w}{z+w}) = 1$$

Si $\| z \| < 1$ y $\| w \| < 1$, demostrar que: $\| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \| < 1$, $z,w \in C$

Desarrollo

Por hipótesis se tiene: $\| z \| < 1$ y $\| w \| < 1 \Rightarrow \| z \|^2 < 1$ y $\| w \|^2 < 1$

Luego $1-\| z \|^2 > 0$ y $1-\| w \|^2 > 0$ de donde $(1-\| z \|^2)(1-\| w \|^2) > 0$ ... (1)

Pero del ejercicio (37) se demostró que:

$(1-\| z \|^2)(1-\| w \|^2) = \| 1-\bar{z}w \|^2 - \| z-w \|^2$ ... (2)

al reemplazar (2) en (1) se tiene: $\| 1-\bar{z}w \|^2 - \| z-w \|^2 > 0$

de donde $\| z-w \|^2 < \| 1-\bar{z}w \|^2 \Rightarrow \| z-w \| < \| 1-\bar{z}w \|$ por lo tanto $\| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \| < 1$

Demostrar que: $\| z \|^2 \geq 2 |\text{Re}(z)|.|\text{Im}(z)|$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, además $Re(z) = x$; $Im(z) = y$

Luego $\|z\| = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)} \Rightarrow \|z\|^2 = |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2$ ... (1)

Como $(|Re(z)| - |Im(z)|)^2 \geq 0$ de donde $|Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 \geq 2|Re(z)||Im(z)|$ ... (2)

Por lo tanto de (1) y (2) se tiene: $\|z\|^2 \geq 2|Re(z)||Im(z)|$

(42) Demostrar que: $\sqrt{2}\|z\|^2 \geq |Re(z)| + |Im(z)|$

Desarrollo

Del ejercicio (41) se tiene: $\|z\|^2 \geq 2|Re(z)|.|Im(z)|$, sumando $\|z\|^2$

$2\|z\|^2 \geq \|z\|^2 + 2|Re(z)|.|Im(z)|$, como $\|z\|^2 = |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2$, entonces

$2\|z\|^2 \geq |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 + 2|Re(z)|.|Im(z)|$, de donde

$2\|z\|^2 \geq (|Re(z)| + |Im(z)|)^2$ entonces $\sqrt{2}\|z\| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$

(43) Probar que: $\left|\frac{Re(z) + Im(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq \|z\| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

Desarrollo

Sea $z = x + iy$ de donde $Re(z) = x$; $Im(z) = y$, $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

La demostración del problema equivale probar que: $\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$

Se conoce que: $(x - y)^2 \geq 0$, $\forall$ x,y $\in$ R, de donde

$(x - y)^2 \geq 0$ entonces $x^2 + y^2 \geq 2xy$, sumando $x^2 + y^2$ se tiene:

$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$, lo que es lo mismo

$2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ por lo tanto $\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x + y|$

de donde $\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, por lo tanto $\left|\frac{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq \| z \|$ ... (1)

como $2|x||y| \geq 0$, $\forall$ x,y $\in$ R entonces sumamos $|x|^2+|y|^2$ de donde

$|x|^2+|y|^2+2|x|.|y| \geq |x|^2+|y|^2 \geq 0$ por lo tanto

$(|x|^2+|y|)^2 \geq |x|^2+|y|^2 \geq 0$ entonces $|x|+|y| \geq \sqrt{|x|^2+|y|^2}$

$|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)| \geq \| z \|$ de donde se tiene: $\| z \| \leq |\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|$ ... (2)

Luego de (1) y (2) se obtiene: $\left|\frac{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq \| z \| \leq |\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|$

(44) Describir y construir la gráfica del lugar representado por la ecuación $\| z-i \| = 2$.

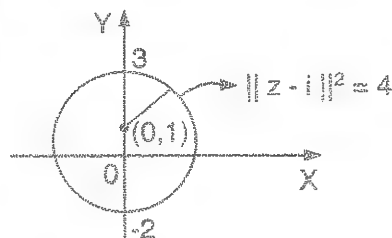
Desarrollo

Como $z = x + iy$ de donde $z - i = x + i(y-1)$

$\| z-i \| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2$ entonces

$x^2+(y-1)^2 = 4$, que es una circunferencia

de centro (0,1) y radio 2



(45) Describir y construir la gráfica del lugar representado por la ecuación $\| z \| = \operatorname{Re}(z) + 1$

Desarrollo

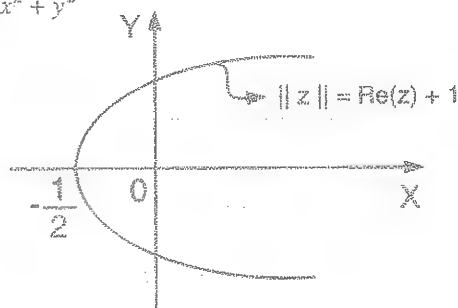
Sea $z = x + iy$ de donde $\operatorname{Re}(z) = x$; $\| z \| = \sqrt{x^2+y^2}$

Como $\| z \| = \operatorname{Re}(z) + 1$ entonces

$\sqrt{x^2+y^2} = x+1$, elevando al cuadrado

$x^2+y^2 = x^2+2x+1$ de donde $y^2 = 2x+1$

que es la ecuación de una parábola



(46) Describir y construir la grafica del lugar representado por la ecuación $\|z+2i\|+\|z-2i\|=6$

Desarrollo

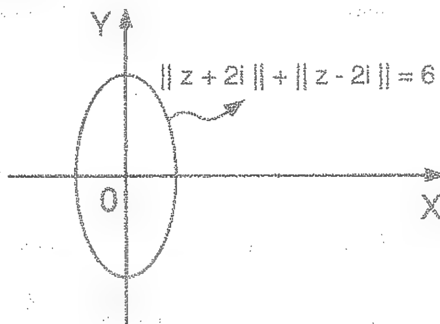
Sea $z = x + iy \Rightarrow z + 2i = x + (y + 2)i$

de donde $\|z+2i\| = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$

$z - 2i = x + (y - 2)i$

de donde $\|z-2i\| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

como $\|z + 2i\| + \|x - 2i\| = 6$, entonces



$\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=6$, de donde al quitar el radical y simplificando se tiene: $9x^2+5y^2=45$, que es la ecuación de una elipse.

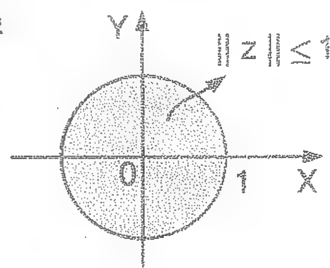
(47) Describir gráficamente la región representada por la desigualdad $\|z\| \le 1$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Como $\|z\| \le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le 1$

De donde $x^2+y^2 \le 1$, su grafica es:



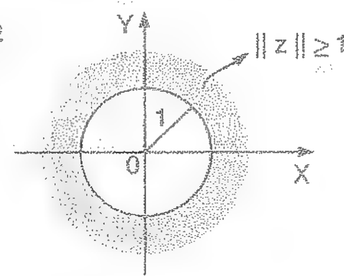
(48) Describir gráficamente la región representada por la desigualdad $\|z\| \ge 1$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Como $\|z\| \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge 1$

De donde $x^2+y^2 \ge 1$, su gráfica es:



(49) Describir gráficamente la región representada por la desigualdad $\operatorname{Re}(z^2) \geq 1$

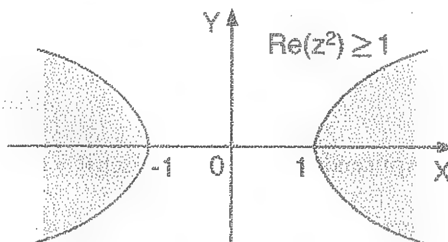
Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

Luego $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$, como

$\operatorname{Re}(z^2) \geq 1$ entonces $x^2 - y^2 \geq 1$

Cuya grafica es:



(50) Determinar la forma polar $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ del número complejo $z = -5\sqrt{3} - 5i$

a) $10(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$ b) $5(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$ c) $-10(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$

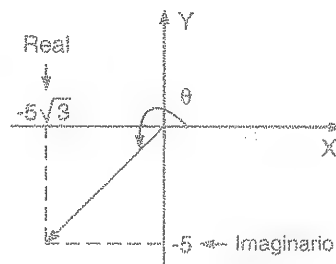
d) $10(\cos\frac{7\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$ e) $5(\cos\frac{7\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$

Desarrollo

Como $z = -5\sqrt{3} - 5i = 10(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 10(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ de donde $\theta \in$ 3er cuadrante

como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$



$\therefore\ z = 10(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = 10(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$, por lo tanto la respuesta es **a**

(51) Resolver: (cos 2x + i sen 2x)(cos 4x + i sen 4x) ... (cos 20x + i sen 20x) = 1

a) 0 b) $\frac{k\pi}{55}$, k ∈ Z c) $\frac{k\pi}{110}$, k ∈ Z

d) $\frac{2k\pi}{55}$, k ∈ Z e) $\frac{3k\pi}{55}$, k ∈ Z

Desarrollo

Aplicando Euler: $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = e^{i\theta}$, entonces de la ecuación se tiene:

(cos 2x + i sen 2x)(cos 4x + i sen 4x)...(cos 20x + i sen 20x) = 1

$e^{2xi}.e^{4xi}...e^{20xi} = 1 \Rightarrow e^{2xi+4xi+...+20xi} = 1 \Rightarrow 2^{2xi(1+2+...+10)} = 1$ de donde $e^{2xi(55)} = 1$

entonces $e^{110xi} = 1 \Rightarrow$ cos 110x + i sen 110x = 1

de donde cos 110x = 1 ; sen 110x = 0

por lo tanto de la ecuación cos 110x = 1 se tiene:

110x = 2kπ de donde $x = \frac{k\pi}{55}$, k ∈ Z. Luego la respuesta es **b**

(52) Luego de simplificar la expresión: $k = (\frac{1+\text{sen}\,\theta + i\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta - i\cos\theta})^n$, $n \in Z^+$ k es un número complejo cuyo argumento es:

a) $n(\frac{\pi}{2} - \theta)$ b) $n(\pi - \frac{\theta}{2})$ c) $n(\frac{\pi}{3} - \theta)$

d) $n(\pi - \frac{\theta}{3})$ e) n(π - θ)

Desarrollo

Aplicando las identidades: $1 + \text{sen}\,\theta = (\text{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2$;

$$\cos\theta = (\cos\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2} - \text{sen}\frac{\theta}{2})$$

reemplazando en la expresión dada:

$$k=\left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta-i\cos\theta}\right)^n=\left[\frac{(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2+i(\cos\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})}{(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2-i(\cos\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}))}\right]^n$$

$$=\left[\frac{(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})((\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})+i(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}))}{(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})((\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})-i(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}))}\right]^n$$

$$=\left[\frac{(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})+i(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})}{(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})-i(\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})}\right]^n \qquad \ldots (1)$$

conocemos que: $\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\\ \cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\end{cases}$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$k=\left[\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})-i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\right]^n$$ multiplicando por su conjugada

$$k=[(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))^2]^n=(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))^{2n}$$

$$=\cos n(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\operatorname{sen} n(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

por lo tanto el argumento de k es $n(\frac{\pi}{2}-\theta)$, la respuesta es **a**

(53) Si a, b y α son número reales y $\frac{a+bi}{a-bi}=e^{i\alpha}$, entonces el valor de tg α es:

a) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ b) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ c) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ d) $\frac{ab}{a^2-b^2}$ e) $\frac{a^2-b^2}{2ab}$

Desarrollo

$e^{i\alpha}=\dfrac{a+bi}{a-bi}$ de donde $\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha=\dfrac{a+bi}{a-bi}$

$$\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha=\frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{(a+bi)^2}{a^2-(bi)^2}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

$\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, de donde se tiene:

$\cos\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ y $\text{sen}\,\alpha=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ como $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

entonces $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$, la respuesta es **c**

(54) Sea z un número complejo, si $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$. Hallar $z^m+\dfrac{1}{z^m}$, θ= argumento de z

a) 2 sen (mθ) b) 2 cos (mθ) c) $2\,\text{sen}^m\,\theta$

d) $2\cos^m\theta$ e) m sen θ

Desarrollo

Si $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ entonces $\begin{cases} z=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta \\ \dfrac{1}{z}=\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Aplicando Moivre a cada una de las ecuaciones se tiene:

$$z^m=\cos(m\theta)+i\,\text{sen}(m\theta)$$

$$\frac{1}{z^m}=\cos(m\theta)-i\,\text{sen}(m\theta) \quad \text{sumando}$$

$z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos(m\theta)$, la respuesta es **b**

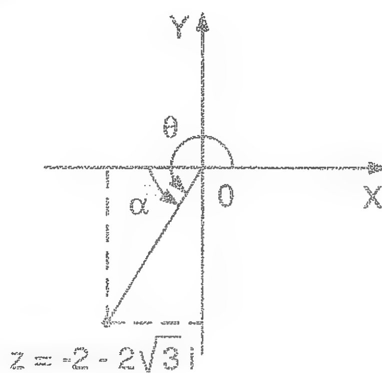
(55) Determinar la forma polar $(0 \le \theta \le 2\pi)$ del número complejo $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

a) 4(cos 240° + i sen 240°) **b)** 2(cos 120° + i sen 120°) **c)** cos 60° + i sen 60°

d) 4(cos 140° + i sen 140°) **e)** 2(cos 160° + i sen 160°)

Desarrollo

$r = \| z \| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$



$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} \Rightarrow \theta \in$ 3er cuadrante

sea α tal que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Luego $\theta = 180° + \frac{\pi}{3} = 240°$

Como $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow z = 4(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$. La respuesta es **a**

(56) Simplificar: $I = \frac{(1-i)^2(1+i)^{-2}}{(\sqrt{3}+i)^{-4}}$

a) $16e^{\frac{11}{3}\pi i}$ b) $16e^{\frac{12}{23}\pi i}$ c) $6e^{\frac{23}{12}\pi i}$ d) $10e^{\frac{23}{12}\pi i}$ e) $4e^{\frac{12}{33}\pi i}$

Desarrollo

Se conoce que si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$

expresando los números complejos en la forma polar

$z_1 = 1 - i \Rightarrow r = \| z_1 \| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta \in$ 4to cuadrante $\Rightarrow \theta = 2\pi - \alpha$

sea α tal que tg α = 1 de donde $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_1 = 1 - i = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

$$z_2 = 1 + i \Rightarrow r = \|z_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_3 = \sqrt{3} + i \Rightarrow r = \|z_3\| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$z_3 = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}) = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$I = \frac{(1-i)^2(1+i)^{-2}}{(\sqrt{3}+i)^{-4}} = \frac{(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i})^2(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{-2}}{(2e^{\frac{\pi}{6}i})^{-4}} = \frac{2e^{\frac{7\pi}{2}i}.e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2.16^{-1}.e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$$

$$= \frac{16e^{3\pi i}}{e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = 16e^{\frac{11}{3}\pi i}$$, la respuesta es **a**

(57) Simplificar: $I = \dfrac{(1+i)(1-i)^{-1}}{(2+2i)^{-2}}$

a) $e^{\frac{\pi}{4}i}$ b) $8e^{-\pi i}$ c) $8e^{\frac{\pi}{4}i}$ d) $18e^{\frac{\pi}{4}i}$ e) $4e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Desarrollo

$$I=\frac{(1+i)(1-i)^{-1}}{(2+2i)^{-2}}=\frac{(2+2i)^2(1+i)}{1-i}=\frac{4(1+i)^2(1+i)}{1-i}=\frac{4(1+i)^3}{1-i}$$

Sea $z_1=1+i$, $z_2=1-i$ pasamos a la forma exponencial

$z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_2=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$, reemplazando

$I=\dfrac{4(1+i)^3}{1-i}=\dfrac{4(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^3}{\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}}=8e^{\frac{3\pi}{4}i-\frac{7\pi}{4}i}=8e^{-\pi i}$. Luego la respuesta es **b**

(58) Hallar $2(i^i)$

a) -2 b) 2 c) $2e^{\frac{\pi}{2}}$ d) $2e^{-\frac{\pi}{4}}$ e) $2e^{-\frac{\pi}{2}}$

Desarrollo

Escribiendo al número complejo i en forma polar

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, además $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ de donde se tiene: $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$i^i=(e^{\frac{i\pi}{2}})^i=e^{\frac{i^2\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 2(i^i)=2e^{-\frac{\pi}{2}}$, la respuesta es **e**

(59) La potencia de $(\sqrt{3}-i)^6$ es:

a) 32 (cos 9π + i sen 9π) b) 64 (cos 11π + i sen 11π)

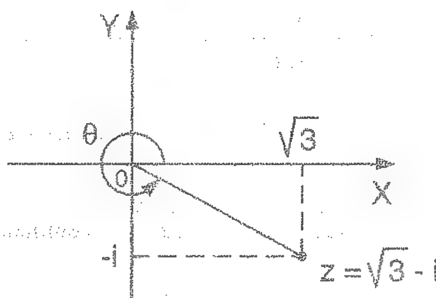
c) $64(\cos\frac{7\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2})$ d) 32 (cos 7π + i sen 7π)

e) 48 (cos 13π + i sen 13π)

Desarrollo

Sea $z=\sqrt{3}-i \Rightarrow r=\|z\|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in$ 4to cuadrante



sea α tal que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Luego $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$z = \sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6})$, aplicando Moivre

$z^6 = 2^6(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6})^6 = 64(\cos 11\pi + i\operatorname{sen} 11\pi)$, por lo tanto la respuesta es **b**

(60) Si $z = 6e^{\frac{\pi}{3}i}$, hallar el valor numérico de $\| e^{iz} \|$

a) $e^{\sqrt{3}}$ b) $e^{-\sqrt{3}}$ c) $e^{-3\sqrt{3}}$ d) $e^{2\sqrt{3}}$ e) $e^{-3\sqrt{2}}$

Desarrollo

Como $z = 6e^{\frac{\pi}{3}i} = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = 3 + 3\sqrt{3}i$

$iz = -3\sqrt{3} + 3i$ de donde $e^{iz} = e^{-3\sqrt{3}+3i} = e^{-3\sqrt{3}}.e^{3i}$

$e^{iz} = e^{-3\sqrt{3}}.e^{3i} = e^{-3\sqrt{3}}(\cos 3 + i\operatorname{sen} 3)$ de donde

$\| e^{iz} \| = e^{-3\sqrt{3}}\sqrt{\cos^2 3 + \operatorname{sen}^2 3} = e^{-3\sqrt{3}}$, la respuesta es **c**

(61) Encontrar el valor de: $\sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{i + \sqrt[5]{i}}}}$

a) $\sqrt{3} + i$ b) $1 + i$ c) $1 - i$ d) $1 + \sqrt{3}i$ e) $1 - \sqrt{3}i$

Desarrollo

Primero calculamos un valor de $\sqrt[5]{i}$, para esto aplicamos

$i^5 = i^2.i^2.i = (-1)(-1)i = i$ luego como $i^5 = i$ entonces

$\sqrt[5]{i} = i$ además $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

con los resultados de $\sqrt[5]{i} = i$, $(1+i)^2 = 2i$

reemplazamos en la expresión dado obteniéndose

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}} = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}} = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}} = \sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}} = \sqrt{2\sqrt{-1}} = \sqrt{2i} = 1+i$$

por lo tanto la respuesta es **b**

(62) Simplificar: $E = \dfrac{\sqrt{a-bi} + i\sqrt{a+bi}}{\sqrt{a+bi} - i\sqrt{a+bi}}$

a) i b) 2ai c) 2bi d) $\sqrt{ai}$ e) $\sqrt{bi}$

Desarrollo

Multiplicando y dividiendo por su conjugada se tiene:

$$E = \frac{\sqrt{a-bi} + i\sqrt{a+bi}}{\sqrt{a+bi} - i\sqrt{a-bi}} = \frac{(\sqrt{a-bi} + i\sqrt{a+bi})(\sqrt{a+bi} + i\sqrt{a-bi})}{(\sqrt{a+bi} - i\sqrt{a-bi})(\sqrt{a+bi} + i\sqrt{a-bi})}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2i^2} + i(a+bi) + i(a-bi) - \sqrt{a^2-b^2i^2}}{(a+bi)+(a-bi)} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + 2ia - \sqrt{a^2+b^2}}{2a} = \frac{2ia}{2a} = i$$

por lo tanto la respuesta es **a**

(63) $z = [[(\frac{3+i}{2-i})^i]^2]^{i^3}$

a) 2 b) i c) 2i d) $2i^i$ e) i^i

Desarrollo

Aplicando la potencia de potencia se tiene:

$$z=[[(\frac{3+i}{2-i})^i]^2]^{i^i}=(\frac{3+i}{2-i})^{2i^i}=(\frac{3+i}{2-i})^2=(\frac{(3+i)(2+i)}{4+1})^2$$

$$=(\frac{6+2i+3i-1}{5})^2=(\frac{5+5i}{5})^2=(1+i)^2=2i$$, por lo tanto la respuesta es **c**

(64) Si $z=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$; $z^n=1$, $z\neq 1$ y $M=1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}$. Hallar Re(M).

a) $-\frac{n}{2}$ b) $\text{ctg}=\frac{\theta}{2}$ c) $-\frac{n}{2}\text{ctg}\frac{\theta}{2}$ d) $-\frac{n}{2}\text{tg}\frac{\theta}{2}$ e) $n\cos\frac{\theta}{2}$

Desarrollo

Como $M=1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}$, multiplicando por z

$zM=z+2z^2+3z^3+...+nz^n$, ahora restando se tiene:

$M-zM=1+z+z^2+z^3+...+z^{n-1}-nz^n$ ... (1)

como $z^n=1 \Rightarrow z^n-1=0 \Rightarrow (z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+...+z^2+z+1)=0$

como $z\neq 1$ entonces $z^{n-1}+z^{n-2}+...+z^2+z+1=0$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $M-zM=0-nz^n$

$M(1-z)=-nz^n$ de donde $M=-\frac{n}{1-z}$, puesto que $z^n=1$

como $z=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$, al reemplazar se obtiene:

$$M=-\frac{n}{1-z}=-\frac{n}{1-\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta}=\frac{-n}{(1-\cos\theta)-i\,\text{sen}\,\theta}=\frac{-n}{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}-2i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{n}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}(\text{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2})}=\frac{-n(\text{sen}\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2})}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}}=-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\text{ctg}\frac{\theta}{2}i$$, de donde

$Re(M)=-\frac{n}{2}$, la respuesta es **a**

65 Simplificar $(1+w)^n$, donde $w=\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

a) $\frac{n\pi}{3}$ b) $e^{\frac{n\pi}{3}i}$ c) $e^{\pi i}$ d) $e^{\frac{\pi}{2}i}$ e) $e^{n\pi i}$

Desarrollo

$$1+w=1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}=2\cos^2\frac{\pi}{3}+2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}.i$$

$$=2\cos\frac{\pi}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

$$(1+w)^n=(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}=e^{\frac{n\pi}{3}i}$$, por lo tanto la respuesta es **b**

66 Determine aquel número "n" entero positivo múltiplo de cuatro que verifica la igualdad $i+2i^2+3i^3+4i^4+...+ni^n=64-64i$ tal que $i=(0,1)$.

a) 80 b) 110 c) 128 d) 132 e) 138

Desarrollo

A la igualdad dada expresamos así: $\underbrace{i+2i^2+3i^3+4i^4+...+ni^n}_{M}=64(1-i)$, de donde

$$M=i+2i^2+3i^3+4i^4+...+ni^n \quad ...(1)$$

a la ecuación (1) multiplicamos por i

$$iM=i^2+2i^3+3i^4+4i^5+...+ni^{n+1} \quad ...(2)$$

ahora restamos (1) y (2) obteniéndose:

$$(1-i)M=\underbrace{i+i^2+i^3+i^4+...+i^n}_{0}-ni^{n+1}, \text{ como } n=\overset{o}{4}$$

$$(1-i)M=-ni^{n+1}=-ni \quad \text{puesto que} \quad i^n=i^{\overset{o}{4}}=1$$

como $(1-i)M=-ni$ entonces $M=\frac{-ni}{1-i}$

ahora reemplazamos el valor de M en la igualdad dada.

$$-\frac{ni}{1-i}=64(1-i) \Rightarrow -ni=64(1-i)^2=64(-2i)$$

$-ni=-128i$ de donde $n=128$, la respuesta es **c**

(67) Hallar el mayor número de dos cifras que verifique $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^n=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $i=\sqrt{-1}$

a) 58 b) 68 c) 78 d) 88 e) 98

Desarrollo

A los números complejos $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ expresamos en forma polar:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}=\cos(\frac{\pi}{3}+2k\pi)+i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}+2k\pi),\ \forall\, k\in Z$$

ahora reemplazamos en la expresión dada

$$(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6})^n=\cos(\frac{\pi}{3}+2k\pi)+i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}+2k\pi),\ \text{por Moivre}$$

$$\cos\frac{n\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}=\cos(\frac{\pi}{3}+2k\pi)+i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$$

ahora igualamos los argumentos obtenidos: $n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ entonces $n=2+12k$

como n es un número mayor de dos cifras entonces

$2+12k<100$ de donde $k<\frac{98}{12}=\frac{49}{6}$ entonces $k=8$

Luego $n_{mayor} = 2+12k = 2+12(8) = 2+96 = 98$

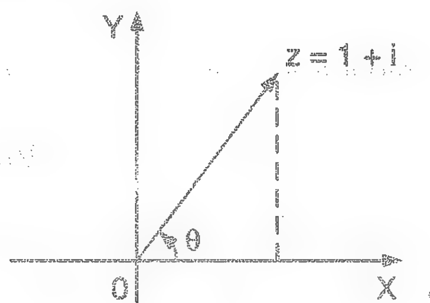
por lo tanto la respuesta es **e**

68) Demostrar que: $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{4})$

Desarrollo

$z = 1+i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$



expresando 1 + i en forma polar

$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4})$

aplicando Moivre $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{4})$

69) Demostrar que: $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i\,\text{sen}\frac{n\pi}{6})$

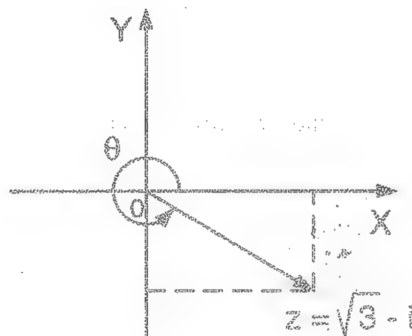
Desarrollo

Sea $z = \sqrt{3}-i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{3+1} = 2$

$\text{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in$ 4to cuadrante

sea α tal que $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ o $\theta = -\frac{\pi}{6}$



expresando $z = \sqrt{3}-i$ en forma polar

$\sqrt{3}-i=2(\cos\frac{\pi}{6}-i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$, aplicando Moivre

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos\frac{\pi}{6}-i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})^n=2^n(\cos\frac{n\pi}{6}-i\,\text{sen}\frac{n\pi}{6})$$

$$\therefore\quad (\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos\frac{n\pi}{6}-i\,\text{sen}\frac{n\pi}{6})$$

70 Demostrar que: $\text{sen}\,x+\text{sen}\,2x+...+\text{sen}\,nx=\dfrac{\text{sen}(\frac{n+1}{2})x.\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{\text{sen}(\frac{x}{2})}$

Desarrollo

Sean T = sen x + sen 2x + ... + sen nx; S = cos x + cos 2x + ... + cos nx

Sea $\alpha=\cos\frac{x}{2}+i\,\text{sen}\frac{x}{2}$ de donde $\alpha^{-1}=\cos\frac{x}{2}-i\,\text{sen}\frac{x}{2}$

$\alpha^2=\cos x+i\,\text{sen}\,x$

$\alpha^4=\cos 2x+i\,\text{sen}\,2x$

.

.

.

$\alpha^{2n}=\cos nx+i\,\text{sen}\,nx$, entonces se tiene:

$$S+iT=\alpha^2+\alpha^4+...+\alpha^{2n}=\alpha^2(\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1})=\frac{\alpha^2\alpha^n(\alpha^n-\alpha^{-n})}{\alpha(\alpha-\alpha^{-1})}=\frac{\alpha^{n+1}(\alpha^n-\alpha^{-n})}{\alpha-\alpha^{-1}}\quad ...(1)$$

como $\alpha=\cos\frac{x}{2}+i\,\text{sen}\frac{x}{2}\Rightarrow\alpha^{n+1}=\cos\frac{n+1}{2}x+i\,\text{sen}\frac{n+1}{2}x$

$$\alpha^n=\cos\frac{n}{2}x+i\,\text{sen}\frac{n}{2}x$$

$$\alpha^{-n}=\cos\frac{n}{2}x-i\,\text{sen}\frac{n}{2}x$$

ahora reemplazamos en (1) obteniéndose

$$S+iT=[\cos\frac{n+1}{2}x+i\,\text{sen}\,\frac{n+1}{2}x]\frac{2i\,\text{sen}\,\frac{n}{2}x}{2i\,\text{sen}\,\frac{x}{2}}$$

$$S+iT=\cos\frac{n+1}{2}x.\frac{\text{sen}\,\frac{n}{2}x}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}+i\,\text{sen}\,\frac{n+1}{2}x.\frac{\text{sen}\,\frac{n}{2}x}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}$$

de donde se tiene $T=\text{sen}(\frac{n+1}{2})x.\frac{\text{sen}\,\frac{nx}{2}}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}$

$$\therefore\ \text{sen}\,x+\text{sen}\,2x+...+\text{sen}\,nx=\frac{\text{sen}(\frac{n+1}{2})x.\text{sen}\,\frac{nx}{2}}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}$$

18.20. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Que valores han de tomar x e y para satisfacer a la ecuación (2–5i)x + (1+3i)y – 8 + 9i= 0 y dar como respuesta x.y.

a) 6 b) 3 c) 5 d) 2 e) 1

② La suma de los valores de x e y que satisfacen a la igualdad $\frac{18i}{x}+iy-6=4i-\frac{12}{x}+y$, es:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 5 e) 7

③ Hallar los valores de a y b si (a + b) + (a – b)i = 7 + 2i e indicar a + b

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

④ Hallar los valores de a y b si: $(a+b)+(a-b)i=(2+5i)^2+i(2-3i)$ e indicar el valor de a + b

a) 2 b) -20 c) -18 d) 16 e) 22

(5) Si $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, hallar los valores de x e y cuando $\frac{3z}{1-i}+\frac{3z}{i}=\frac{4}{3-i}$, e indicar el valor de x + y.

a) 0.80 b) 0.60 c) 0.53 d) 1.80 e) 1.60

(6) Hallar los valores de x e y tal que: $2x - 3iy - 2y - 5 - 10i = (x + y - 2) - (y - x + 3)i$ e indicar el valor de x + y.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(7) La suma de los valores de "x" e "y" que satisfacen a la ecuación $(3 + 4i)x - (5 - 3i)y - 3i - 22i = 0$ es:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(8) Dada la igualdad $(1+2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ donde $x,y \in \mathbb{R}$. Hallar x e y, e indicar x + y.

a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{1}{11}$ c) $\frac{3}{11}$ d) $\frac{9}{11}$ e) $\frac{4}{11}$

(9) Hallar $\alpha - \beta$ en: $(1 + i)(2 + i)(\alpha + i) = (1 - i)(2 - i)(\beta - i)$, $i=\sqrt{-1}$

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(10) Dado $\frac{1}{x+iy}+(\frac{1+i}{1-i})^2=1+i$ donde $i=\sqrt{-1}$ determinar x e y dando como respuesta x + y

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{9}$

(11) De la igualdad: $a+bi=[(2-3i)^{1+i}]^{1-i}$, determine a – b.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(12) Si $(a+bi)^4=8-8\sqrt{3}i$, el valor de (a – b) es:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$

(13) Si a,b $\in$ R y además $a+bi=\dfrac{(i-2)^3}{3i+4}-2i$, calcular a^3-b^3

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(14) Determine 2a – b si se cumple $a+bi=[(2-3i)^{i+1}]^{1-i^{32^{14}}}$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

(15) Si se cumple $\dfrac{1+ai}{a+i}+\dfrac{a+3i}{1-ai}=ki$, k, a $\in$ R, calcular k^4+1

a) 11 b) 13 c) 15 d) 17 e) 19

(16) Si $\dfrac{(1+\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)^2}{\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta}=a-b\cos\theta$, hallar (a + b)

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(17) Si $E=\dfrac{a+bi}{b+ai}$, cumple E < 0, "a" y "b" son números reales, entones E + 1 es igual a:

a) -2 b) 0 c) 2 d) 4 e) 6

(18) Si a > 0, b > 0 hallar a y b de tal manera que verifique a la igualdad $\dfrac{3ai}{1+\dfrac{b}{4}i}=\dfrac{9a+4i}{3a+\dfrac{3b}{4}}$, indicar su valor a.b

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

(19) Si $m+ni=x^2-y^2+2xyi$, m,n,x,y $\in$R, $i=\sqrt{-1}$. Hallar el valor de $\dfrac{8(x^2-y^2)^2}{m^2+n^2}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(20) La simplificación de $\dfrac{(a+b+ci+di)^2+(a+b-ci-di)^2}{(a+b+c+d)(a-c+b-d)}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

(21) La simplificación de $E=\dfrac{(\frac{1}{i}+\frac{1}{3}-\frac{10a}{i})(i+3+30a)}{(-1+\frac{1}{9}+\frac{2}{3i})+100a^2}$ es:

a) 3i b) 1 + i c) 1 − i d) $1+\sqrt{3}i$ e) $\sqrt{2}i$

(22) ¿Para que valores de "a" el siguiente complejo: $\dfrac{(a-2)+(a^2+a-8)i}{(a-2)+(a-1)i}$ es un número real. Dar como respuesta la suma de los valores de "a".

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

(23) Si z_1 representa un imaginario puro y z_2 representa un complejo real, calcular $m+n^2$, siendo $z_1=\dfrac{(m+n)-3i}{(m-n)+i}$ y $z_2=5+(2-m)i$, $i=\sqrt{-1}$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(24) Calcular el valor de $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde "n" es un entero positivo.

a) $2i^n$ b) $2i^{n-1}$ c) $2i^{n+1}$ d) -2 e) 2i

(25) El valor de simplificación de $E=[\dfrac{a^{bi}+a^{-bi}}{2}]^2-[\dfrac{a^{bi}-a^{-bi}}{2i}]^2$ es:

a) -1 b) 1 c) i d) -i e) 0

(26) El complejo: $\dfrac{63+16i}{4+3i}$ escrito en su forma binómica es:

a) 12 − 5i b) 12 + 5i c) 5 + 12i d) 5 − 12i e) 3 − 4i

(27) Calcular z^{-2} siendo $z=-\|-1+i\|+\sqrt{2}i$

a) i b) 2i c) 4i d) 1 + i e) 1 − i

(28) Hallar z tal que $\| z \| + z = 2 + i$

a) $3 + i$ b) $\frac{3}{4} + i$ c) $3 - i$ d) $4 + i$ e) $4 - i$

(29) Calcular z^4 siendo $z = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}$, $a \in R$, $0 \le \alpha \le 2\pi$

a) $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ b) $\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ c) $-\frac{a^4}{\operatorname{sen}^4\alpha}$ d) $a^4\cos^4\alpha$ e) $a\operatorname{sen}^4\alpha$

(30) Sabiendo que n = 3k, el valor de $E = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(31) Al efectuar $\dfrac{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{30}}{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{30}}$ se obtiene:

a) -1 b) 1 c) i d) -i e) 2

(32) La simplificación de $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$ es:

a) xi b) x + i c) i d) -xi e) x − i

(33) Calcular el módulo del número complejo $z = \frac{1-i}{6+2i}[\frac{11+7i}{4+i} + \frac{28+16i}{5+i} + \frac{51+27i}{6+i}]$ siendo $i = \sqrt{-1}$

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{6}$

(34) Hallar el módulo de $z = \frac{10-4i}{12i+2+6mi}$ donde $i = \sqrt{-1}$, sabiendo que es un complejo real.

a) 5 b) 10 c) 8 d) 12 e) 4

(35) Calcular $E=[\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}]^{60}$, si $i^2=-1$

a) 5 b) 3 c) 1 d) 7 e) 9

(36) Siendo $i=\sqrt{-1}$, halle el equivalente de $\frac{i+i^2+i^3+i^4+...+i^{775}}{i^{241}-i^5+i^2-i^3-1}$

a) i b) 2i c) 3i d) 1 e) 2

(37) Hallar el valor de: $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{280}$

a) $(\frac{3}{2})^{140}$ b) 3^{140} c) 2^{140} d) $(\frac{2}{3})^{140}$ e) 1

(38) Siendo z un número complejo tal que: $z=4e^{\frac{i\pi}{4}}$. Hallar $\| e^{iz} \|$

a) $e^{2\sqrt{2}}$ b) $e^{-2\sqrt{2}}$ c) $e^{3\sqrt{2}}$ d) $e^{\sqrt{3}}$ e) $e^{-3\sqrt{3}}$

(39) La simplificación de: $\frac{\sqrt{1+\sqrt{i}}+\sqrt{1-\sqrt{i}}}{1-\sqrt{1-i}}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{i}}+\sqrt{2-\sqrt{i}}}{2-\sqrt{4-i}}$

a) i b) -i c) 1 d) 1 + i e) 1 − i

(40) El valor de la siguiente potencia $[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i]^{43235}$ es:

a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $\sqrt{3}-i$ e) $\sqrt{3}+i$

(41) Efectuar $E=\|\frac{b+ai}{a-bi}-\frac{b-ai}{a+bi}\|$; $i=\sqrt{-1}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(42) Calcular el módulo de $k=\sqrt[1-i^6]{1-\frac{i^2}{2}(1+\frac{1+i}{1+i^{-1}})^{3i^4}}$; $i=\sqrt{-1}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

43 Calcular $M = (\frac{i+1}{-i+1})^3 + (\frac{2i+1}{-i+2})^3 + (\frac{3i+1}{-i+3})^3 + ... + (\frac{40i+1}{-i+40})^3 + (\frac{41i+1}{-i+41})^3$

a) M = i b) M = -i c) M = -41i d) M = 21i e) M=11i

44 La simplificación del siguiente numero complejo

$$z = \frac{\sqrt{3+2a}+i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a}-i\sqrt{3-2a}} \cdot \frac{\sqrt{3-2a}+i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a}-i\sqrt{3+2a}} \; ; \; -\frac{3}{2} \le a \le \frac{3}{2} \text{ es:}$$

a) $\frac{a}{3}$ b) $\frac{2a}{3}$ c) $\frac{5a}{3}$ d) $\frac{4a}{3}$ e) $\frac{a}{2}$

45 Calcular un valor de $\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2\sqrt[9]{i}}}}}}$

a) $1+i$ b) $1-i$ c) $\sqrt{3}+i$ d) $\sqrt{3}-i$ e) i

46 Si $\| z+w \| = \| z-w \|$, $\forall$ z,w $\in$ C; Hallar $Re(z\overline{w})$

a) -1 b) 0 c) 1 d) 3 e) 5

47 Después de efectuar $(\frac{1+\sqrt{7}i}{2})^4 + (\frac{1-\sqrt{7}i}{2})^4$, resulta:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 5

48 Hallar el módulo del complejo $(1+w)^n$, w = cos θ + i sen θ, n par.

a) $2\cos\frac{\theta}{2}$ b) $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ c) $2\operatorname{sen}^n\frac{\theta}{2}$ d) $2^n\cos^n\frac{\theta}{2}$ e) $2^n\operatorname{sen}^n\frac{\theta}{2}$

49 Sumar: $(1+i)^3 + (1+i^2)^3 + (1+i^3)^3 + (1+i^4)^3 + ... + (1+i^{4n})^3$, donde $i = \sqrt{-1}$, n $\in$ N

a) 2n b) 4n c) 6n d) 8n e) 10n

50 La suma de los siguientes números complejos $(1+i)+(2+i^2)+(3+i^3)+...+(4n+i^{4n})$ es:

a) n(2n + 1) b) 2n(4n + 1) c) 0 d) n(4n + 1) e) 2n(4n − 1)

(51) Siendo i la unidad imaginaria, calcular el valor de la expresión $\frac{i+i^2+i^3+i^4+...+i^{1003}}{2-i+i^2-i^3}$

a) -1 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}i$

(52) Si z es un número complejo y satisface $\|\frac{1-z}{1+z}\|=1$ entonces:

a) Re(z) > 0 b) Im(z) ≥ 0 c) z es número real

d) z es imaginario puro e) Re(z) < 0

(53) Si $z=\frac{1+4n^2i}{8n^2-1}$, n ∈ R, calcule $\|z-\frac{3}{4}i\|$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{10}$

(54) Hallar arg(-z) si $z=\frac{\text{sen}(n\theta)-i\cos(n\theta)}{\text{sen}(n\theta)+i\cos(n\theta)}$

a) $3n\theta$ b) $n\theta$ c) $2n\theta$ d) $\frac{\pi}{3}\theta$ e) θ

(55) Hallar el complejo "z" que verifica las relaciones $\|z(1-i)\|=2$ y $\arg[z(1+i)]=\frac{\pi}{2}$

a) 1 + i b) 1 − i c) i d) 2 + i e) 2 − i

(56) Hallar la suma de los argumentos de los números complejos $z=e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, que satisfacen: $\|z^2+\frac{1}{z^2}\|=\sqrt{2}$

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 0 e) $\frac{3\pi}{2}$

(57) Si $z=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$, $-\frac{5\pi}{2}<\theta<-2\pi$, calcular: $\|\frac{1-\bar{z}^2}{1-z^2}\|$

a) $-\text{tg}\,\theta$ b) $\text{ctg}\,\theta$ c) $\text{tg}\frac{\theta}{2}$ d) $\text{ctg}\frac{\theta}{2}$ e) $-\text{ctg}\,\theta$

58 Hallar el número complejo $z=\dfrac{(6+8i)(1+\sqrt{3}i)^{45}}{(4-3i)^4}$ sug. $\operatorname{tg}53° = \dfrac{4}{3}$

a) 2^{49} b) -2^{49} c) $2^{13}(1+i)$ d) $2^{13}(1-i)$ e) $2^{43}i$

59 Calcule "n" si $[(1+i)^7+(1-i)^7]^n = 4096$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

60 Sean z_1 ; z_2 dos complejos que cumplen $\| z_1+z_2 \|^2 + \| z_1-z_2 \|^2 = 4\| z_1 \|^2$ halle $\dfrac{\| z_1 \|}{\| z_2 \|}$ si $\operatorname{Re}(z_1)=2$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

61 Calcular el menor número natural "n" de 2 cifras tal que $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)^n = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

62 Hallar el módulo del siguiente número complejo $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{(4+3i)^2(-1+i)^4}$

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $\dfrac{5}{8}$ c) $\dfrac{8}{25}$ d) $\dfrac{3}{5}$ e) $\dfrac{4}{5}$

63 Se tiene los siguientes números complejos $z_1=(2+n)+3i$, $z_2=5-(2-n)i$; m,n valores reales ¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto: $\{(m,n)/\, z_1=\overline{z_2} \ \vee \ z_2=\overline{z_1}\}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

64 El módulo de la siguiente operación $\dfrac{(7+3i)(\sqrt{5}-3i)}{(-5+2i)(\sqrt{6}-i)}$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

65 La expresión $z=\sqrt{\dfrac{7i-1}{1+i}}$, es equivalente a

a) 1 + 2i b) 2 − i c) 2 + i d) 1 − i e) 1 + i

(66) Dada la región $R = \{z \in C / \| z - 2 - i \| \leq 3 \vee \| z + 2 - i \| \leq 3\}$. Hallar z_1 y z_2 en R tal que $\| z_1 - z_2 \|$ sea el máximo valor. Dar como respuesta $z_1 . z_2$

a) -26 b) -24 c) -22 d) -20 e) -18

(67) Si $z = 4e^{\frac{i\pi}{6}}$, hallar el valor de: $\| e^v . e^{iw} \| + 1$, donde $v = Re(iz)$ y $w = Im(iz)$

a) $e^2 + 1$ b) $e^{-2} + 1$ c) e^{-2} d) e^{-3} e) 1

(68) Si $\| z + 16 \| = 4 \| z + 1 \|$, entonces $\| z \|$ es igual a:

a) 4 b) 2 c) 8 d) 6 e) 16

(69) Hallar $z = \frac{(2,3).\overline{(-1,2)}}{(3,-1).(2,0)}.(1,-1)^{28}$, $z \in C$

a) $(1,-1)^{2^{14}}$ b) $(\frac{19}{10}, -\frac{17}{10})2^{13}$ c) $(-\frac{19}{10}, -\frac{17}{10})2^{13}$

d) $(\frac{19}{10}, \frac{17}{10})2^{14}$ e) $(-\frac{19}{10}, \frac{17}{10})2^{13}$

(70) Al reducir $\frac{(1+i)^4 - (1-i)^4 + 8i}{i}$; $i = \sqrt{-1}$, se obtiene:

a) 8 b) 8i c) -8i d) 5i e) 2i

(71) Si a y b son números reales, demostrar que $\| \frac{a + bi}{b + ai} \| = 1$

(72) Demostrar que: $(\frac{1 + i\,tg\,\alpha}{1 - i\,tg\,\alpha})^n = \frac{1 + i\,tg(n\alpha)}{1 - i\,tg(n\alpha)}$

(73) Demostrar que:

a) $e^{2\pi i} = 1$ b) $e^{i\pi} = -1$ c) $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ d) $e^{2 \pm 3\pi i} = -e^2$

(74) Si $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$

(75) Probar que si $\|z_2\| \neq \|z_3\|$ se cumple: $\left\|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right\| \leq \left|\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|-\|z_3\|}\right|$

(76) Demostrar que: $\left|\frac{\|z_1\|-\|z_2\|}{\|z_1\|+\|z_2\|}\right| \leq 1$, $z_1+z_2 \neq 0$

(77) Demostrar que si $(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = 1$ entonces $(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)^n = 1$

(78) Si $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$, demuestre que $\|z\| < 1$ implica $\operatorname{Im}(w) > 0$

(79) Demostrar que si $\|z-4i\| + \|z+4i\| = 10$ es una elipse.

(80) El número total de valores de "n" que verifican a la igualdad $[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]^n = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, sabiendo que es un número entero y positivo de cuatro cifras es:

a) 1300 b) 1400 c) 1500 d) 1200 e) 1340

(81) El valor de la expresión $(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})^{77}$ es:

a) 1 b) -1 c) -i d) i e) 1 + i

(82) Reducir de $\frac{i^5+i^7+i^9+i^{11}+i^{13}+...+i^{99}}{i^{-5}+i^{-7}+i^{-9}+i^{-11}+i^{-13}+...+i^{-99}}$ es:

a) -1 b) 1 c) i d) -i e) 1 − i

(83) Calcular el valor de $(\frac{-1+\sqrt{5}i}{2})^5 + (\frac{-1-\sqrt{5}i}{2})^5$, $i = \sqrt{-1}$

a) $\frac{17}{4}$ b) $-\frac{19}{4}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{13}{4}$ e) $\frac{9}{4}$

(84) La simplificación de $\frac{\sqrt{1+\sqrt{i}}+\sqrt{1-\sqrt{i}}}{1-\sqrt{1-i}} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{i}}+\sqrt{2-\sqrt{i}}}{2-\sqrt{4-i}}$ es:

a) i b) -i c) 1 d) 1 + i e) 1 − i

(85) Si $\{z_1, z_2\} \subset C$; halle $\text{Im}(\frac{z_1}{z_1 - z_2}) - \text{Im}(\frac{z_2}{z_1 - z_2})$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

(86) Simplificar $E = i^{356} + i^{363} + i^{635} + i^{365} + i^{536} + i^{653}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(87) Hallar: $z = \sum_{k=1}^{19} (1+i)^k$, indicar: Re(z) + Im(z)

a) 1026 b) 1025 c) 1125 d) 1225 e) 1020

(88) La simplificación de $[\frac{(a+bi)^2}{a-bi} + \frac{(a-bi)^2}{a+bi}][\frac{a^2+b^2}{a^2-3b^2}]$ es:

a) 3a b) 2a c) a d) -a e) $\frac{a}{2}$

(89) Si se cumple: $\sqrt[3]{1+i} = a+bi$, calcular: $(a^2 + 4ab + b^2)(a-b)$, $a + b \neq 0$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(90) La simplificación de $z = (\frac{1+i^{15}}{1-i^{11}})^2 + (\frac{1+i^{17}}{1+i^{27}})^3 + (\frac{1-i^{13}}{1-i^{19}})^4 + (\frac{1+i^{13}}{1+i^{17}})^5$

a) 3 b) 3i c) 0 d) 1 e) i

(91) Si b = 75a, Hallar "n": $\underbrace{(1+i)+(2+4i)+(3+9i)+\ldots}_{n\text{-términos}} = a+bi$

a) 108 b) 109 c) 110 d) 112 e) 114

(92) Hallar "x" si $x^{-1} = \sqrt[\frac{\pi}{2}]{i^{\frac{1+i}{1-i}}}$

a) e b) e^{π} c) $e^{i\pi}$ d) $e^{\frac{\pi}{2}}$ e) 1

93 Hallar el menor valor de (a + b) si: $3ai(1+\frac{bi}{a})^{-1}=(9a+4i)(3a+\frac{3}{4}b)^{-1}$

a) 7 b) -7 c) 5 d) 3 e) 1

94 Calcular: $(\frac{\sqrt{3i}}{\sqrt{3i}-1})^2+(\frac{\sqrt{3i}}{\sqrt{3i}+1})^2$

a) 1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{7}{4}$

95 Hallar un número complejo cuyo conjugado multiplicado por (i + 1) da el complejo $87(11+13i)^{-1}$

a) -3 + 36i b) 3 – 36i c) 3 + 36i d) 3 + 26i e) 3 – 26i

96 Hallar el número complejo tal que sumado con su módulo, resulta equivalente a: 4(2 + i)

a) 3 – 4i b) -3 + 4i c) 3 + 4i d) 1 + i e) 1 – i

97 Sabiendo que: a,b,x,y, ∈ ℝ, además $\sqrt{a+bi}=x+iy$, calcular $E=\frac{b^2}{ay^2+y^4}$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

98 Hallar el valor de w si: $w=\frac{\text{Im}(\frac{w_1}{w_1+w_2})+\text{Im}(\frac{w_2}{w_1+w_2})}{\text{Re}(\frac{w_1}{w_1+w_2})+\text{Re}(\frac{w_2}{w_1+w_2})}$, $\forall\ w_1\neq -w_2;\ w_1,w_2\in C$

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4

99 Hallar el valor de $E=\frac{1}{256}[8(1+i)^{10}+2(1+\sqrt{3}i)^7+(\sqrt{3}+i)^8]$

a) i b) -i c) 1 d) 1 + i e) 1 – i

100 Hallar a + b, si $a+bi-\frac{a+bi}{b-ai}=\frac{b+ai}{a-bi}-\sqrt{2}i$

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

18.21. RESPUESTAS.-

1	a	2	b	3	d	4	c	5	a	6	b	7	c	8	b
9	b	10	c	11	d	12	d	13	a	14	b	15	d	16	b
17	b	18	c	19	d	20	b	21	a	22	b	23	c	24	b
25	b	26	a	27	c	28	b	29	c	30	a	31	b	32	c
33	a	34	b	35	c	36	d	37	a	38	b	39	c	40	a
41	b	42	a	43	c	44	d	45	a	46	b	47	c	48	d
49	b	50	b	51	a	52	d	53	b	54	c	55	a	56	d
57	a	58	b	59	b	60	a	61	d	62	c	63	a	64	b
65	c	66	a	67	b	68	a	69	c	70	a	71	*	72	*
73	*	74	*	75	*	76	*	77	*	78	*	79	*	80	c
81	d	82	a	83	b	84	a	85	a	86	a	87	b	88	d
89	b	90	c	91	d	92	a	93	b	94	c	95	a	96	c
97	c	98	b	99	a	100	b								

CAPÍTULO XIX

LÓGICA

19.1. INTRODUCCIÓN.-

Lógica es el estudio de los procesos válidos del razonamiento humano. En la actualidad, el estudio serio de cualquier tema tanto en el campo de las Humanidades como el de las ciencias y la técnica requieren conocer los fundamentos y métodos del razonamiento lógico preciso que permite al estudiante ó profesional extraer y depurar sus conclusiones evitando el riesgo de modificar en forma equivocada la información que posee. Esto es aun más en esta era de la computación, herramienta que es empleada en todos los campos del desarrollo de una sociedad y con la velocidad a la cual se procesan los datos, cualquier error de lógica puede originar problemas técnicos, sociales y económicos.

Siendo muy importante, en la matemática moderna el análisis del lenguaje con un criterio lógico; la Lógica tiene como fin de conducirnos a un hábil manejo del lenguaje matemático y el empleo de métodos eficaces de razonamiento.

Existen dos tipos importantes del razonamiento: El inductivo y el Deductivo.

El razonamiento inductivo es el razonamiento por el cual una persona en base a sus experiencias específicas, decide aceptar como válida un principio general.

El razonamiento deductivo es, en cambio, el medio según el cual dicha persona utiliza el principio general aceptado previamente para decidir sobre la validez de una idea, que a su vez habrá de determinar el curso de su acción.

Dado que las proposiciones son preceptos válidos de razonamiento deductivo, en el desarrollo de nuestro estudio veremos lo esencial de la lógica proposicional, a través del uso y manejo de una simbología adecuada.

19.2. ELEMENTOS DE LÓGICA SIMBÓLICA.-

a) **ENUNCIADO.-** Se denomina enunciado a toda frase u oración.

Ejemplo.-
(1) 11 es un número primo.
(2) París está en Italia.
(3) ¿Qué hora es?
(4) ¡Viva el Perú!
(5) $5 > 9$
(6) $6 + 2 = 8$
(7) $x^2 < 9$
(8) $x^2 + y^2 \leq 4$

Los enunciados que matemáticamente tienen significado son aquellos que pueden ser considerados como verdaderos ó falsos (proposiciones); algunos enunciados no es posible afirmar si es verdadero ó falso, como por ejemplo, las interrogaciones, las exclamaciones ó las preguntas.

b) **ENUNCIADOS ABIERTOS.-** Son expresiones que contienen variables y no tienen la propiedad de ser verdadero ó falso.

Ejemplo.-

(1) $x < 7$, es un enunciado abierto, porque no podemos afirmar si es verdadero ó falso, solamente cuando a la variable x se le dá un valor numérico podemos decir si es verdadero ó falso.

Así por ejemplo: para $x = 3$, $3 < 7$ es verdadero
para $x = 9$, $9 < 7$ es falso

(2) $x^2 + y^2 = 16$, también es un enunciado abierto.

c) **VARIABLE.-** Es una cantidad susceptible de variar en un determinado campo ó recorrido, a las variables representaremos por las letras minúsculas x,y, z, t, u, v, a estas variables se les da el nombre de variables indeterminados.

Ejemplo.-

(1) $y = \sqrt{x-5}$ es un número real, si x es un número real que sea mayor ó igual a 5. El campo ó recorrido de x es $x \geq 5$.

(2) En la ecuación $x^2 + y^2 = 16$

- El campo ó recorrido de x es $-4 \leq x \leq 4$
- El campo ó recorrido de y es $-4 \leq y \leq 4$.

19.3. PROPOSICIONES LÓGICAS.-

Llamaremos proposiciones lógicas a todo enunciado abierto que pueden ser calificado como verdaderas ó bien como falsas, sín ambigüedades, es decir que esta sujeta a dos ó más interpretaciones.

NOTACIÓN.- Las proposiciones lógicas serán denotadas generalmente con letras minúsculas p, q, r, t, ..., etc. A la veracidad ó falsedad de una proposición se denomina valor de verdad.

Ejemplos de Proposiciones Lógicas.-

(1) p: 15 – 4 = 11, verdadero (V)

(2) q: Lima es la capital del Perú, verdadero (V)

(3) r: 107 + 301 = 48, falsa (F)

(4) t: 7 es un número par, falsa (F).

19.4. DEFINICIÓN.-

Se llama valores de verdad de una proposición a sus dos valores posibles; verdadero ó falso, estos posibles valores se puede esquematizar en una tabla de verdad en la forma.

P
V
F

19.5. CONECTIVOS LÓGICOS.-

Son expresiones que sirven para unir dos ó más proposiciones, entre los más importantes conectivos lógicos tenemos:

La conjunción, disyunción, implicación o condicional , bicondicional, negación, contradicción, estos los mostraremos en el siguiente cuadro.

Nombre	Expresión	Símbolo Lógico
Conjunción	y	$\wedge$
Disyunción	ó	$\vee$
Implicación o Condicional	Sí, ..., entonces, ...	$\longrightarrow$
Bicondicional, equivalencia doble implicación	... Sí y solo sí, ...	$\longleftrightarrow$ $\equiv$
Negación	No	$\sim$
Contradicción	... no equivalente, ...	$\not\equiv$

19.6. CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS.-

a) **PROPOSICIONES SIMPLES Ó ATÓMICAS.-**

En una proposición que no contiene ningún conectivo lógico.

Ejemplo.- (1) 6 es par. (2) $2+5=7$

b) **PROPOSICIONES COMPUESTOS Ó MOLECULARES.-**

Es una proposición que contiene al menos un conectivo lógico.

Ejemplo.- (1) 5 es primo y 2 es par.

(2) Si 5 es par entonces 2 es impar.

(3) Si n es par entonces n es divisible por 2.

19.7. PROPOSICIONES COMPUESTAS BASICOS Y TABLA DE VERDAD.-

a) LA NEGACIÓN.- Dado una proposición P, llamaremos la negación de P, a otra proposición que denotaremos por ~P, y que se le asigna el valor opuesto a p, y su tabla de verdad es:

P	~p
V	F
F	V

El principio lógico de la negación es:

Si una proposición es verdadera V, su negación es falsa F y recíprocamente, si dicha proposición es falsa F, su negación es verdadera V.

La proposición ~P es leída así "no P", "no es cierto que P"

Ejemplo.- ① 2 es primo V

Su negación es: 2 no es primo F

② 5 es par F

Su negación es: no es cierto que 5 es par V

③ Dada la proposición P: 5 x 7 = 35

Su negación es: ~P: no es cierto que 5 x 7 = 35

b) LA DISYUNCIÓN.- La disyunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q por el conectivo lógico "o" en el sentido inclusivo y/o y que el principio lógico es "La proposición $p \vee q$ es falsa únicamente en el caso en que p y q son ambas falsas, en cualquier otro caso es verdadera". La tabla de verdad para la disyunción es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo.- Hallar el valor de $p \vee q$ donde **p**: 7 es mayor que 9; **q**: 4 es menor que 5

Desarrollo

p	q	$p \vee q$
F	V	V

c) LA CONJUNCIÓN.- La conjunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q mediante el conectivo lógico "y" que se simboliza $p \wedge q$, donde el principio lógico es "La conjunción $p \wedge q$ es verdadero V, solo cuando p es verdadero y q es verdadero V, en todos los demás casos es falso". Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo.- Sí p: 4 < 7 y q: 6 es número par. Calcular el valor de verdad de $p \wedge q$

Desarrollo

p	q	$p \wedge q$
V	V	V

d) **LA CONDICIONAL (IMPLICATIVA).-** La implicación ó condicional de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta mediante el conectivo lógico "si,...,entonces,..." y se simboliza $p \longrightarrow q$, donde el principio lógico es "La proposición implicativa es falso únicamente en el caso que la proposición p es verdadera y la proposición q es falsa, siendo verdadera en todos los demás casos. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p es llamado antecedente y la proposición q es llamado consecuente.

$p \longrightarrow q$

Antecedente — Consecuente
Premisa — Conclusión.
Hipótesis — Tesis.

OBSERVACIÓN.-

1) Una implicación es verdadera si el antecedente es falso, cualquiera que sea el consecuente.

2) Una implicación es verdadera si el consecuente es verdadero, cualquiera que sea el antecedente.

Ejemplo.- Sea p : Cristóbal Colón descubrió América. ; q : 6 + 3 = 8

Hallar el valor de verdad de $p \longrightarrow q$

Desarrollo

Para calcular el valor de verdad de la proposición $p \longrightarrow q$, primero calcularemos el valor de verdad de las proposiciones dadas.

p : Cristóbal Colón descubrió América es verdadera V

q : 6 + 3 = 8, es falsa F

p	q	$p \to q$
V	F	F

e) **LA BICONDICIONAL (Equivalente o Doble Implicación).-**

La doble implicación o bicondicional de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta mediante el conectivo lógico "si y sólo si" y se simboliza $p \leftrightarrow q$ son verdaderos si tienen el mismo valor de verdad o en otro casos es falso F. su tabla de verdad es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

f) **LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA.-** La disyunción exclusiva de dos proposiciones p y q es la proposición compuesto mediante conectivo lógico "o" y se simboliza $p \, \Delta \, q$, donde ambas proposiciones p y q tengan valores de verdad opuestos y es falsa si ambas tiene idénticos valores. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \, \Delta \, q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo.- Sea p : k es par ; q : k es impar. Hallar el valor de verdad de p Δ q.

Desarrollo

Para calcular el valor de verdad de p Δ q, primero veamos lo siguiente:

1) Si k es par, no puede ser impar (Si p es V ; q es F)

2) Si k es impar, no puede ser par (Si p es F ; q es V)

De las notaciones 1) y (2) vemos que p Δ q es verdadera.

En efecto:

p	q	p Δ q
V	F	V
F	V	V

19.8. PROPOSICIONES COMPUESTAS.-

Mediante los conectivos lógicos se pueden combinar cualquier número finito de proposiciones cuyos valores de verdad pueden ser conocidos, construyendo su tabla de verdad, en dicha tabla se puede indicar los valores resultantes de estas proposiciones compuestas, para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones compuestas.

Ejemplo.- La tabla de verdad de la proposición compuesta de:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$$

Desarrollo

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow r$	$p \longrightarrow r$	$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)]$	$\longrightarrow$	$(p \longrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

19.9. JERARQUIA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS.-

Si se tiene una proposición compuesta con varios conectivos lógicos, para realizar las operaciones primero se debe colocar los paréntesis adecuadamente empezando con las proposiciones que se encuentran dentro de los paréntesis anteriores, luego siguen todas las negaciones y se avanza de izquierda a derecha (los corchetes son considerados como paréntesis).

Ejemplo.- Hallar la tabla de valor de verdad de la proposición:

$$[p \vee (q \longrightarrow \sim r)] \wedge [(\sim p \vee r) \longleftrightarrow \sim q]$$

Desarrollo

p	q	r	[p	∨	(q ⟶ ~r)]	∧	[(~p ∨ r)	⟷	~ q]
V	V	V	V	V	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

19.10. TAUTOLOGIAS, CONTRADICCIONES Y CONTINGENCIAS.-

a) **TAUTOLOGIA.-** Son proposiciones compuestas que siempre son verdaderos cualquiera que sea el valor de las proposiciones componentes.

Ejemplos de Tautología.-

1) $p \vee \sim p$ (principio del tercio excluido)

2) $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$ 3) $\sim (p \wedge \sim p)$

En efecto tenemos:

1)

p	p ∨ ~p		
V	V	V	F
F	F	V	V

Es Tautología

2)

p	q	[(p ⟶ q)	∧	p]	⟶	q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F

Es una Tautología

3)

p	~ p	~ (p ∧ ~p)	
V	F	V	F
F	V	V	F

Es una tautología

b) **CONTRADICCIONES (FALACIA).-** Son proposiciones compuestas que siempre son falsas, cualquiera que sea el valor de las proposiciones compuestas.

Ejemplo de contradicciones.-

1) $p \wedge \sim p$ (principio de contradicción)

2) $\sim(p \vee \sim p)$ 3) $(p \longrightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$

En efecto tenemos:

1)

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Es una contradicción

2)

p	~p	~(p ∨ ~p)
V	F	F V
F	V	F V

Es una contradicción

3)

p	q	(p ⟶ q) ∧ (p ∧ ~q)
V	V	V F F
V	F	F F V
F	V	V F F
F	F	V F F

Es una contradicción.

c) **CONTINGENCIA.-** Son proposiciones compuestas que no son ni tautología ni contradicciones, es decir, son proposiciones que en algunos casos es F, y en otros es V.

Ejemplos de Contingencia.-

1) p ⟷ q **2)** p ∧ q

3) (p ⟶ q) ⟶ p

En efecto tenemos:

1)

P	q	p ⟷ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es una contingencia

2)

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es una contingencia

3)

p	q	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow p$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Es una contingencia

19.11. IMPLICACIÓN LÓGICA Y EQUIVALENCIA LÓGICA.-

i) A toda proposición condicional $p \longrightarrow q$ que sea tautología le llamaremos implicación lógica (o simplemente implicación) en este caso a la condicional denotaremos por $p \Rightarrow q$

Ejemplo de Implicación lógica se tiene: $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

puesto que:

p	q	$[((\sim p)$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\Rightarrow$	$\sim p$
V	V		V		F	F	V	F
V	F		F		F	V	V	F
F	V		V		F	F	V	V
F	F		V		V	V	V	V

Es una tautología. Por lo tanto es una implicación lógica.

ii) A toda bicondicional $p \longleftrightarrow q$ que sea tautología se le llama equivalencia lógica (simplemente equivalencia) y en este caso a la bicondicional denotaremos por $p \Leftrightarrow q$

Ejemplo de equivalencia lógica se tiene: $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

puesto que:

p	q	$[p$	$\wedge$	$(p \vee q)]$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Es una tautología. Por lo tanto es una equivalencia lógica.

19.12. PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES.-

Cuando sus tablas de verdad de dos proposiciones p y q son idénticos se denominan equivalentes (o lógicamente equivalentes) en este caso se simboliza en la forma $p \equiv q$.

Ejemplo.- Las proposiciones $(p \longrightarrow q)$ y $(\sim q \longrightarrow \sim p)$ son lógicamente equivalentes, puesto que sus tablas de verdad son idénticos. En efecto:

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	V	F V F
V	F	F	V F F
F	V	V	F V V
F	F	V	V V V

Idénticos

$\therefore \quad p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p.$

OBSERVACIÓN.-

(1) La equivalencia de este ejemplo es muy importante, porque viene a ser la base del llamado método de demostración por Reducción al absurdo, es una forma indirecta de un proceso de demostración que se va a utilizar en el desarrollo del capítulo.

(2) Un par de proposiciones equivalentes $p \equiv q$ resulta siempre una equivalencia lógica $p \Leftrightarrow q$ y viceversa, por esta razón cuando se tiene una equivalencia lógica entre p y q, también se dice $p \equiv q$.

(3) Es posible llegar de una proposición a otra con operaciones lógicas

19.13. PRINCIPALES LEYES LÓGICAS O TAUTOLOGICAS.-

Las llamadas leyes lógicas o principios lógicos viene a ser formas proposicionales tautológicas de carácter general y que a partir de estas leyes lógicas se puede generar otras tautológicas y también cualquier tautología se puede reducir a una de las leyes lógicas, entre las principales leyes lógicas mencionaremos.

1° LOS TRES PRINCIPIOS LÓGICOS CLÁSICOS.-

1) Ley de identidad.

$\begin{cases} p \longrightarrow p \\ p \longleftrightarrow p \end{cases}$ "una proposición sólo son idénticos así mismo"

2) Ley de no contradicción.

$\sim(p \wedge \sim p)$ "una proposición no puede ser verdadero y falso a la vez"

3) Ley del Tercio excluido.

$p \vee \sim p$ "una proposición es verdadero o es falso no hay una tercera posibilidad"

2° EQUIVALENCIAS NOTABLES.-

1) Ley de la doble negación.

$\sim(\sim p) \equiv p$ "la negación de la negación es una afirmación"

2) Ley de la Idempotencia.

a) $p \wedge p \equiv p$ **b)** $p \vee p \equiv p$

3) Leyes conmutativas.

a) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ **b)** $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

c) $p \longleftrightarrow q \equiv q \longleftrightarrow p$

4) Leyes Asociativa.

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ **b)** $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

c) $p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r) \equiv (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r$

5) Leyes Distributivas.

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **b)** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

c) $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$

d) $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$

6) Leyes De Morgan.

a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7) Leyes del Condicional.

a) $p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$ b) $\sim(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

8) Las Leyes del Bicondicional.-

a) $(p \longleftrightarrow q) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

b) $(p \longleftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

9) Leyes De La Absorción.

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ b $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ d $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

10) Leyes De Transposición.

a) $(p \longrightarrow q) \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$ b) $(p \longleftrightarrow q) \equiv \sim q \longleftrightarrow \sim p$

11) Leyes De Exportación.

a) $(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$

b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow r \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_{n-1}) \longrightarrow (p_n \longrightarrow r)$

12) Elementos Neutros para la Conjunción y Disyunción.

a) $p \wedge V \equiv p$, V neutro de la conjunción.

b) $p \vee F \equiv p$, F neutro de la Disyunción.

13) También:

a) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$ b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$

OBSERVACIÓN.- Estas Leyes son muy útiles para simplificar los problemas, puesto que es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado.

Ejemplo.- Simplificar las proposiciones siguientes aplicando las leyes lógicas.

① $[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p$

Desarrollo

$[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p \equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$ por definición $\to$

$\equiv [\sim(p \vee \sim q) \vee \sim q] \vee p$ por Morgan

$\equiv [\sim(p \vee \sim q)] \vee (p \vee \sim q)$ por asociativa.

$\equiv p \vee \sim q$, por el elemento neutro (12)

② $\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee q$

Desarrollo

$\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee q \equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$ por (7b)

$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee (\sim q)] \vee q$ por (6a)

$\equiv \sim[\sim q \vee p] \vee q$ por absorción

$\equiv (q \wedge \sim p) \vee q$ por absorción

$\equiv q$

③ Comprobar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

a) $\sim[(q \vee \sim p) \vee (q \wedge (r \vee \sim p))]$

b) $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$

c) $\sim(\sim q \longrightarrow \sim p) \wedge [q \longrightarrow \sim(p \longrightarrow r)]$

Determinar si (a) y (b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \longrightarrow (r \vee \sim q)$ b) $(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)$

Dejamos el desarrollo de este ejercicio al lector.

(5) Simplificar la expresión $[((\sim p) \wedge q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

Desarrollo

$$[((\sim p) \wedge q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q \equiv [((\sim p) \wedge q) \longrightarrow F] \wedge \sim q$$

$$\equiv [\sim((\sim p) \wedge q) \vee F] \wedge \sim q$$

$$\equiv [(p \vee \sim q) \vee F] \wedge \sim q$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim q \equiv \sim q$$

Ejemplo.- Determinar si a) y b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \longrightarrow (r \vee \sim q)$ b) $(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)$

Desarrollo

Determinaremos la equivalencia mediante la tabla de verdad.

p	q	r	$p \longrightarrow (r \vee \sim p)$	$(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)$
V	V	V	V V V	F V V
V	V	F	V F F	F F F
V	F	V	V V V	V V V
V	F	F	V V V	V V F
F	V	V	F V V	V V V
F	V	F	F V F	V V V
F	F	V	F V V	V V V
F	F	F	F V V	V V V

Idénticos

Otra manera es mediante la simplificación.

a) $p \longrightarrow (r \vee \sim q) \equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q)$ ... (1)

b) $(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p) \equiv (\sim q \vee \sim p) \vee r \vee \sim p)$

$$\equiv (\sim q) \vee (\sim p \vee \sim p) \vee r$$

$$\equiv (\sim q) \vee (\sim p) \vee r$$

$$\equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q)$$ ... (2)

Luego de (1) y (2) se tiene: a) $\equiv$ b)

19.14. LÓGICA CUANTIFICACIONAL.-

FUNCIÓN PROPOSICIONAL.-

A todo enunciado abierto de la forma $P(x)$ se denomina función proposicional la cual tiene la propiedad de convertirse en una proposición al ser sustituido la variable x por una constante "a" especifica, al conjunto de todos los valores convenidos para la variable x se denomina dominio de la variable.

De acuerdo a la definición de enunciado abierto, la función proposicional sobre D es toda expresión $P(x)$ donde $P(a)$ es verdadero o falso para todo $a \in D$.

Ejemplo.- $P(x) = x + 1 < 9$, si x pertenece al conjunto de los enteros, entonces $P(x)$ es una función proposicional cuyo dominio es los enteros.

Si $x = -2 \in Z$, $-2 + 1 < 9$ es verdadero

$x = 10 \in Z$, $10 + 1 < 9$ es falso

por lo tanto $P(x)$ es una función proposicional.

19.15. CUANTIFICADORES EXISTENCIAL Y UNIVERSAL.-

Se ha visto un método que nos permite que a partir de una función proposicional $P(x)$ se puede obtener proposiciones, sin embargo se tiene otro método completamente distinto que permite obtener proposiciones a partir de una función proposicional, dicho método es llamado cuantificadores.

Ejemplo.- Sea la función proposicional $P(x)$: x es un número primo ... (1)

Si a la función proposicional le anteponemos "para todo x" se obtiene:

"para todo x, x es un número primo" ... (2)

La frase "para todo x" se denomina el cuantificador universal y se simboliza por: $\forall x$ que se lee para todo x.

Luego (2) se puede escribir en la forma. $\forall$ x: x es un número primo ... (3)

aclarando (1) es una función proposicional

(3) es una proposición.

A un cuantificador universal puede ser representado por:

$\forall x$: P(x) ó $\forall$ x / p(x) ó ($\forall$ x) (P(x))

y en todas estas notaciones, se lee "para todo x, tal que se verifica P(x)" es decir:

$\forall$ se lee "para todo"

El cuantificador El cuantificado

Notación: $\begin{cases} \forall x & : P(x) \\ \forall x & / P(x) \\ (\forall x) & (P(x)) \end{cases}$

Ejemplo.- $\forall x:\ x + 4 = x$

El cuantificador universal no es el único cuantificador que permite obtener proposiciones a partir de funciones proposicionales, existe otro llamado cuantificador existencial.

Sí en (1) P(x): x es un número primo anteponemos la frase "existe x tal que" es nuevo cuantificador, se obtiene:

"Existe x tal que x es un número primo" ... (4)

Al cuantificador existencial "existe x tal que" se simboliza $\exists$ x, de donde (4) se escribe

$\exists$ x: x es un número primo ... (5)

un cuantificador existencial puede ser representado por $\exists$ x: P(x) o $\exists$ x/P(x) o ($\exists$x) (P(x)) y en todas estás notaciones se lee:

"Existe por lo menos un x, tal que se verifique P(x)" donde el simbolo $\exists$ se lee existe

El cuantificador El cuantificado

Notación $\begin{cases} \exists x : P(x) \\ \exists x \,/\, P(x) \\ (\exists x)(P(x)) \end{cases}$

Ejemplo.- Sea el conjunto A = {-2,-1,2,3,4} se tiene:

$\exists\, x \in A:\ x^2 - 2x = 8$

$\exists\, x \in A \,/\ x^2 - 2x = 8$

$(\exists x \in A)(x^2 - 2x = 8)$

19.16. NEGACIÓN DE PROPOSICIÓN CON CUANTIFICADORES.-

Proposición	La negación
$\forall\, x : P(x)$	$\sim [\forall\, x : P(x)] \equiv \exists\, x : \sim P(x)$
$\exists\, x : P(x)$	$\sim [\exists\, x : P(x)] \equiv \forall\, x : \sim P(x)$
$\forall\, x \in A : P(x)$	$\sim [\forall\, x \in A : P(x)] \equiv \exists\, x \in A : \sim P(x)$
$\exists\, x \in A : P(x)$	$\sim [\exists\, x \in A : P(x)] \equiv \forall\, x \in A : \sim P(x)$

Ejemplo.- Negar la proposición, $\forall\, x \in N \,/\, x + 3 > 5$

Desarrollo

$\sim [\forall\, x \in N \,/\, x + 3 > 5] \equiv \exists\, x \in N \,/\, x + 3 \le 5$

Ejemplos.- Negar cada una de las siguientes proposiciones si el conjunto de referencia es los reales R.

① $(\forall\, x)(\exists\, y)[P(x) \longrightarrow (q(y) \longrightarrow r(x))]$

② $(\forall\, x)(\exists\, y)(\exists\, z)\,[P(x,y) \longrightarrow q(x) \wedge r(z)]$

③ $(\exists\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)[\sim(P(x) \longrightarrow q(y)) \vee r(z)]$

④ $(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)[\sim(r(x) \vee \sim P(x)) \vee q(z)]$

Desarrollo

① $\sim(\forall x)(\exists y)[P(x) \longrightarrow (q(y) \longrightarrow r(x))] \equiv (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge \sim(q(y) \longrightarrow r(x)]$

$\equiv (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge (q(y) \wedge \sim r(x))]$

② $\sim(\forall x)(\exists y)(\exists z)[(P(x,y) \longrightarrow (q(x) \wedge r(z))] \equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y) \wedge \sim(q(x) \wedge r(z))]$

$\equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y) \wedge (\sim q(x) \vee \sim r(z))]$

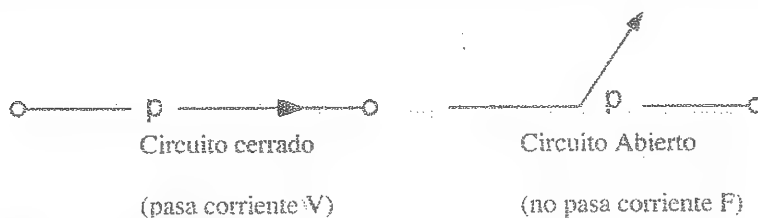
③ $\sim(\exists x)(\forall y)(\exists z)[\sim(P(x) \longrightarrow q(y)] \vee r(z)] \equiv (\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(x) \longrightarrow q(y)) \wedge \sim r(z)]$

④ $\sim(\forall x)(\exists y)(\forall z)[\sim(r(x) \vee \sim P(x)) \vee q(z)] \equiv (\exists x)(\forall y)(\exists z)[r(x) \wedge \sim p(x)) \wedge \sim q(z)]$

19.17. CIRCUITOS LÓGICOS.-

A un ensamblaje de interruptores automáticos que permiten el paso de la corriente eléctrica o la interrumpen se denomina circuitos eléctricos.

A un interruptor se puede representar por medio de una proposición "p" y viceversa. de tal manera que el valor de verdad de la proposición "p" se identifique con el "paso de la corriente" en este caso se dice que el "circuito está cerrado" y cuando el valor es "falso" con la interrupción de la corriente en este caso se dice que el circuito está abierto.



Circuito cerrado (pasa corriente V) Circuito Abierto (no pasa corriente F)

OBSERVACIÓN.- Para diseñar los circuitos eléctricos, se usa la siguiente notación.

Él 1 indica "pasa corriente"

El 0 indica "no pasa corriente"

Luego en circuitos eléctricos se usan como notación.

"Él 1 en lugar de V"

"El 0 en lugar de F"

En el diseño de esquemas de circuitos eléctricos para representar a proposiciones compuestas y viceversa consideramos dos clases de instalaciones, en serie y en paralelo.

19.18. DISEÑO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN SERIE.-

Consideremos dos interruptores p y q conectados en serie.



Pasa corriente

Se observa que este circuito admite paso de corriente cuando estos dos interruptores p y q están cerrados, en cualquier otro caso no hay paso de corriente, es decir esta situación corresponde a la tabla de verdad de la conjunción $p \wedge q$.



p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

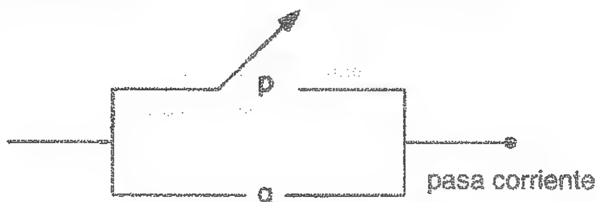
En la tabla de verdad se observa que basta que uno de los interruptores esté abierto "O" para que no circule la corriente en todo el circuito.



A la expresión $p \wedge q$ se le llama la "Función Booleana del circuito en serie".

19.19. DISEÑO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN PARALELO.-

Consideremos dos interruptores p y q instalados en paralelo.



Se observa en el circuito para que circule corriente es suficiente que alguno de los interruptores ó ambos p ó q esté cerrado "1" y no hay paso de corriente si ambos interruptores están abiertos (ambos con el valor "0").

Este circuito corresponde a la tabla de verdad de la disyunción $p \vee q$, es decir:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

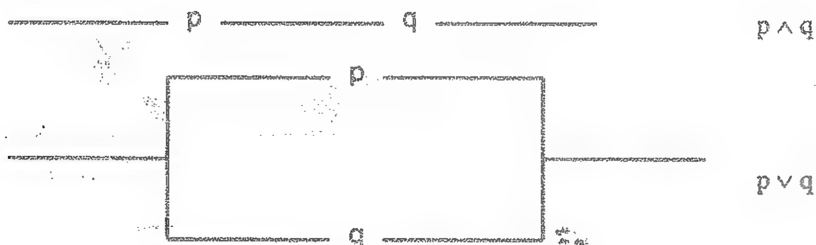
A la expresión $p \vee q$ se denomina la función Booleana del circuito en paralelo.



NOTACIÓN.- A un interruptor "p" representaremos simplemente como



Ejemplo.-



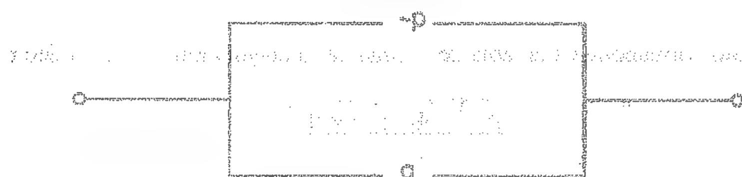
OBSERVACIÓN.- A una tautología se representa mediante un circuito siempre cerrado (donde la corriente siempre está circulando). En las computadoras no son de utilidad.

Ejemplos.-

① Construir el circuito lógico de las funciones Booleanas.

a) $p \longrightarrow q$

Desarrollo



$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (paralelo)

b) $(p \vee q) \wedge r$

Desarrollo

$p \vee q$ es en paralelo



$(p \vee q) \wedge r$ es en serie



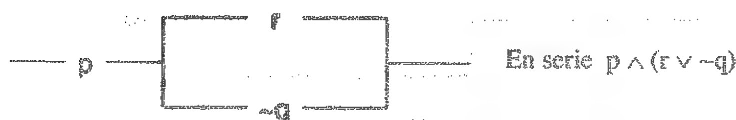
② Describir simbólicamente el circuito.



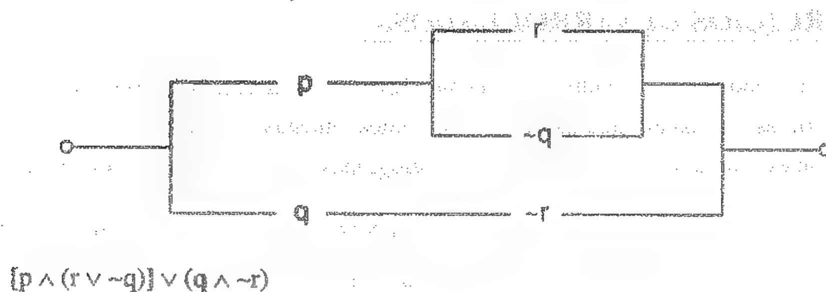
Desarrollo



en paralelo $r \vee \sim q$

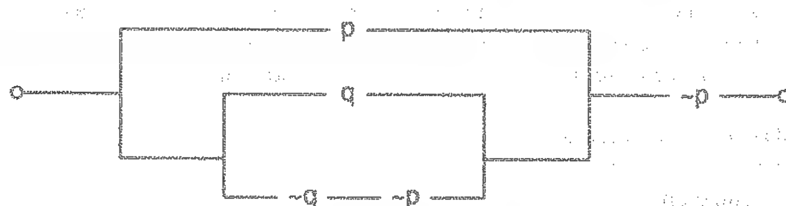


En serie $p \wedge (r \vee \sim q)$



$[p \wedge (r \vee \sim q)] \vee (q \wedge \sim r)$

③ Determinar la menor expresión que representa al circuito dado:



Desarrollo

$[p \vee (q \vee (\sim q \wedge \sim p))] \wedge \sim p \equiv [p \vee (q \vee \sim (q \vee p))] \wedge \sim p$

$\equiv [(p \vee q) \vee \sim (p \vee q)] \wedge \sim p$

$\equiv [(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [\sim (p \vee q) \wedge \sim p] \equiv [\sim p \wedge q] \vee [\sim p \wedge \sim q \wedge \sim p]$

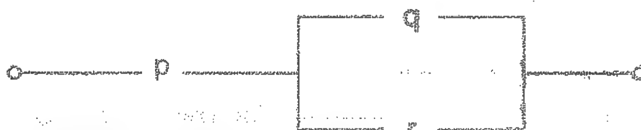
$[\sim p \wedge q] \vee [\sim p \wedge \sim q] \equiv [(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \wedge [(\sim p \wedge q) \vee \sim q]$

$\sim p \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv \sim [p \vee (q \vee p)] \vee \sim p$

(4) Determinar el circuito lógico que representa el esquema molecular. $\sim[p \longrightarrow \sim(q \vee r)]$

Desarrollo

$\sim[p \longrightarrow \sim(q \vee r)] \equiv \sim[\sim p \vee \sim(q \vee r)] \equiv p \wedge (q \vee r)$



19.20. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Dada la proposición: "Tendremos muchas flores en el jardín; si la estación es propicia y las semillas no están malogradas", (tendremos muchas flores en el jardín = p, si la estación es propia = q, las semillas están malogradas = r), la simbolización correcta es:

a) $(q \wedge \sim r) \rightarrow p$ b) $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ c) $q \wedge (\sim r \rightarrow p)$

d) $((q \rightarrow p) \wedge \sim r)$ e) $p \wedge (q \wedge \sim r)$

Desarrollo

$\underbrace{\text{Tendremos muchas flores en el jardín.}}_{\text{consecuente } p}$ $\underbrace{\text{Si la estación es propicia}}_{\text{condición } q}$ $\underset{\wedge}{\text{y}}$ las

$\underbrace{\text{semillas no están malogradas}}_{\text{condición } (\sim r)}$

$\therefore \underbrace{(q \wedge \sim r)}_{\text{condiciones}} \longrightarrow \underbrace{p}_{\text{consecuencia}}$, la respuesta es **a**

(2) Dadas las proposiciones; p: Juan habla alemán; q: Juan habla ingles; r: Juan habla francés. Simboliza la siguiente proposición compuesta: No es cierto que Juan no habla francés y alemán sino ingles.

a) $\sim[(\sim r \wedge p) \wedge q]$ b) $\sim[(r \wedge \sim p) \wedge q]$ c) $\sim[(\sim r \wedge \sim p) \wedge q]$

d) $\sim[(\sim r \wedge \sim p) \vee q]$ e) ninguna

Desarrollo

La proposición es una conjuntiva negada. Esta conjuntiva está formada por un enunciado conjuntivo cuyos componentes son: Juan no habla francés, Juan habla alemán; siendo el segundo conjuntivo Juan habla ingles, por lo tanto se expresaría así: $\sim[(\sim r \wedge p) \wedge q]$, la respuesta es **a**

(3) La proposición: Si hay humedad, entonces las plantas crecen es equivalente a decir:

a) Las plantas crecen y hay humedad b) Si las plantas no crecen, no hay humedad

c) No hay humedad y las plantas crecen d) Las plantas no crecen y hay humedad

e) Todas las anteriores.

Desarrollo

La proposición equivalente a la proposición dada:

Si hay humedad, entonces las plantas crecen, es la alternativa (b) que dice: Si las plantas no crecen, no hay humedad, es decir que se ha aplicado la ley lógica de la transposición cuya formula es: $p \to q \equiv (\sim q \to \sim p)$ por lo tanto la respuesta es **b**

(4) En la proposición condicional: Si los leones son herbívoros, entonces los hombres son omnívoros, podemos concluir que es:

a) Indefinida b) Falacia c) Contradictoria d) Falsa e) Verdadera

Desarrollo

La proposición condicional es un tipo de proposición compuesta o coligativa. De acuerdo a la teoría general de las proposiciones compuestas el valor de ellas depende del valor de las proposiciones componentes.

Observamos que la proposición antecedente: los leones son herbívoros, es falsa y la proposición consecuente, los hombres son omnívoros es verdadera, por lo tanto la proposición condicional tiene que ser verdadera, por lo tanto la respuesta es **e**

(5) La proposición: En invierno llueve y hace frió, equivalente a decir:

a) En invierno no llueve y hace frió.

b) No es el caso que, en invierno llueve o no haga frió.

c) Es inadmisible que en invierno no llueve o haga frió.

d) Es absurdo que no es verdad que en invierno no llueve y no haga frió.

e) Ninguna

Desarrollo

En el presente problema se tiene una proposición conjuntiva, cuyos componentes son:

p: en invierno llueve ; q: en invierno hace frió

donde su esquema correspondiente es: $p \wedge q$

Como en las leyes de Morgan, el operador conjuntivo se transforma en disyuntivo, negado ambos componentes y negando también toda la expresión, por lo tanto tenemos $\sim(\sim p \vee \sim q)$, por lo tanto la alternativa (b) presenta la proposición correspondiente: no es el caso que, en invierno no llueve o no haga frió, la respuesta es **b**

(6) La proposición: $\sim[(p \vee q) \to (p \wedge \sim q)]$ es equivalente a:

a) p b) ~p c) q d) ~q e) Ninguna

Desarrollo

A la proposición: $\sim[(p \vee q) \to (p \wedge \sim q)]$ lo sometemos a varias transformaciones. la primera aplicamos la definición de la condicional, es decir:

$$\sim[\sim(p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge \sim q)$$

como la segunda componente del esquema está negado volvemos aplicar la ley de Morgan, es decir: $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$ y por la ley de distribución

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [(p \vee q) \wedge q]$$

$$(\sim p \wedge p) q$$

$$F \vee q \equiv q$$

por lo tanto la respuesta es **c**

(7) La proposición: "Diana no estudia o sale de casa tarde", equivale a:

a) No es cierto que, Diana sale de casa temprano o estudia.

b) Si Diana estudia, entonces sale de casa temprano.

c) Diana sale de casa temprano y estudia.

d) Si Diana sale de casa temprano, entonces estudia.

e) Si Diana estudia, entonces sale de casa tarde.

Desarrollo

Las proposiciones indicadas son: p: Diana estudia ; q: Diana sale de su casa tarde

el esquema de la proposición compuesta es:

$\sim p \vee q$, que según la ley del condicional

$\sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$, que quiere decir.

Si Diana estudia, entonces sale de casa tarde. La respuesta es **e**

(8) Si la proposición $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$ es falsa, señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $(\sim p \wedge q) \rightarrow p$ II) $\sim(p \wedge q) \rightarrow q$ III) $\sim p \wedge (q \rightarrow p)$

a) FVF b) FVV c) VFF d) VVV e) VVF

Desarrollo

$(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$; como $\sim p$ es F entonces p es V

($(p \vee \sim q)$ → V; $\rightarrow$ → F; $\sim p$ → F)

además $p \vee \sim q$: p → V; $\sim q$ → es cualquiera , q no está determinada; $\vee$ → V

Luego p es V; q no está determinada

I) $(\sim p \wedge q) \to p$: $(\sim p \wedge q)$ cualquiera, p V ⟹ V

II) $\sim(p \wedge q) \to p$: $\sim(p \wedge q)$ cualquiera, p V ⟹ V

III) $\sim p \wedge (q \to p)$: $\sim p$ F, $(q \to p)$ cualquiera ⟹ F

Luego como VVF la respuesta es **e**

(9) Si la proposición $(p \wedge \sim q) \to (r \to \sim s)$ es falsa, determine la validez de:

I) $\sim p \longleftrightarrow q$ II) $q \to w$, w cualquier proposición III) $(p \wedge q) \to r$

a) VVV b) VFV c) FVV d) VVF e) FVF

Desarrollo

$(p \wedge \sim q) \to (r \to \sim s)$: $(p \wedge \sim q)$ V, $(r \to \sim s)$ F ⟹ F por la ley de implicación

$p \wedge \sim q$: p V, $\sim q$ V ⟹ V p es V

por la ley de conjunción $\Rightarrow \sim q$ es V $\Rightarrow$ q es F

$r \to \sim s$: r V, $\sim s$ F ⟹ F r es V

por la ley de implicación $\Rightarrow \sim s$ es F $\Rightarrow$ s es V

Por lo tanto p es V, q es F, s es V

I) $\sim p \longleftrightarrow q$ ⟹ V II) $q \to w$ ⟹ V III) $p \wedge q \to r$ ⟹ V

Como VVV, la respuesta es **a**

(10) Si la proposición $(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge q) \vee t]$ es falsa. Hallar el valor de verdad de:

I) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)]$ II) $(\sim p \Rightarrow t) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ III) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$

a) FFV b) FVV c) VFV d) VFF e) FFF

Desarrollo

Resolvemos la proposición dada, sabiendo que es falsa F

$(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge q) \vee t]$

$(\sim p \wedge q)$ → V; $[(p \wedge q) \vee t]$ → F Por la ley de implicación

$\Rightarrow$ → F

$\sim p \wedge q$: $\sim p$ → V, q → V, $\wedge$ → V por la ley conjunción $\Rightarrow$ $\sim p$ es V $\Rightarrow$ P es F; q es V

$(p \wedge q) \vee t$: p → F, q → V, $(p \wedge q)$ → F, t → F por lo tanto t es F; $\vee$ → F

Como p es F; q es V; t es F entonces

I) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)]$

$(\sim p \vee \sim q)$ → V; $(r \vee \sim t)$ → V; $\Rightarrow$ → V; $\sim[\ldots]$ → (F)

II) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$

$(\sim q \wedge \sim r)$ → F; $\sim t$ → V; $(p \vee q)$ → V; $[\sim t \wedge (p \vee q)]$ → V; $\vee$ → (V)

III) $(\sim p \Rightarrow t) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$

V F F Cualquier V o F

F V

(V)

Como FVV la respuesta es **b**

(11) Si el esquema indicado: $[(\sim p \vee q) \vee [(p \rightarrow q) \wedge t]] \wedge q$ es verdadero, indique el valor de verdad de:

I) $p \rightarrow q$ II) $t \vee q$ III) $\sim q \wedge (t \vee p)$

a) FVV b) VFV c) VVF d) FFV e) VFV

Desarrollo

Resolviendo la proposición dada sabiendo que es verdadero

$[(\sim p \vee q) \vee [(p \rightarrow q) \vee t]] \wedge q$

V V por la ley de la conjunción de donde q es V

V

$(\sim p \vee q) \vee [(p \rightarrow q) \vee t] \equiv V$

cualquiera V cualquiera V o F

V por la ley de disyunción

V luego q es V, p es V o F, t es V o F

I) $p \rightarrow q$ II) $t \vee q$ III) $\sim q \wedge (t \vee p)$

V o F V cualquiera V F V o F

(V) (V) (F)

como VVF la respuesta es **c**

(12) La simplificación de: $(\sim p \vee \sim q) \wedge [\sim p \wedge (q \rightarrow p)]$ es:

a) $\sim(p \vee q)$ b) $\sim(p \wedge q)$ c) $\sim p$ d) $\sim q$ e) $\sim p \vee q$

Desarrollo

$(\sim p \vee \sim q) \wedge [\sim p \wedge (q \rightarrow p)]$ aplicando la ley condicional

$(\sim p \vee \sim q) \wedge [\sim p \wedge (\sim q \vee p)]$ por la ley asociativa

$[(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p] \wedge (\sim q \vee p)$ por la ley de absorción

$\sim p \wedge (\sim q \vee p)$ por la ley distributiva

$(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$ absorción

F

Por lo tanto la respuesta es **a**

(13) Si la proposición: $[(p \vee t) \rightarrow (p \wedge q)]$ es falsa, dar el valor de verdad, de las siguientes proposiciones.

I) $[(\sim p \wedge \sim t) \wedge (q \rightarrow r)]$ **II)** $[(p \vee t) \longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$ **III)** $[(p \vee t) \Delta (p \wedge q)]$

a) FFF **b)** VVV **c)** VFF **d)** FVV **e)** VVF

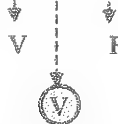
Desarrollo

Como $(p \vee t) \rightarrow (p \wedge q)$; $(p \vee t)$: V, $(p \wedge q)$: F, resultado F — por la ley de la implicación

I) $(\sim p \wedge \sim t) \wedge (q \rightarrow r) \equiv \sim(p \vee t) \wedge (q \rightarrow r)$; $\sim(p \vee t)$: F, $(q \rightarrow r)$: V o F, resultado (F) — por la conjugación

II) $(p \vee t) \longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \equiv (p \vee t) \longleftrightarrow \sim(p \wedge q)$; $(p \vee t)$: V, $\sim(p \wedge q)$: V, resultado (V) — por la bicondicional

III) $(p \vee t) \Delta (p \wedge q)$



V F por la disyunción exclusiva

Como FVV la respuesta es **d**

(14) La simplificación de la proposición $(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

a) $\sim(p \vee q)$ b) $\sim p$ c) $\sim(p \rightarrow q)$ d) $\sim(q \rightarrow p)$ e) $\sim(p \longleftrightarrow q)$

Desarrollo

$(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ Ley condicional y Morgan

$\equiv \sim[\sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)]$

$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ aplicando la bicondicional

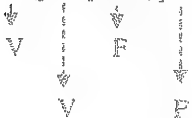
$\equiv \sim[p \longleftrightarrow q]$ la respuesta es **e**

(15) Si la siguiente proposición lógica $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow (r \vee s))]$ es verdadera, hallar los valores de verdad de p, r, q, s.

a) VVFF b) VFFF c) VFVV d) VFVF e) FVFV

Desarrollo

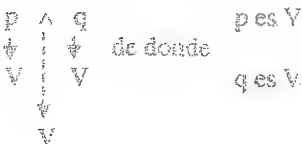
$\sim[(p \wedge q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow (r \vee s))]$



V F

V F La ley de la implicación

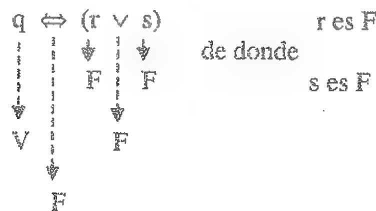
$p \wedge q$ p es V



de donde

V V q es V

V



Como VFVF la respuesta es **d**

(16) La simplificación de: $[((\sim p) \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge (\sim q)$

a) $\sim p$ b) p c) $\sim q$ d) q e) $\sim r$

Desarrollo

$[((\sim p) \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge (\sim q)$, por la contradicción

$((\sim p \wedge q) \Rightarrow F) \wedge (\sim q)$, por la ley condicional

$(\sim(\sim p \wedge q) \vee F) \wedge (\sim q)$, por la ley de Morgan

$(p \vee \sim q) \wedge \sim q \equiv \sim q$, por la ley de absorción. Por lo tanto la respuesta es **c**

(17) Si la proposición: $\sim(p \wedge q) \Rightarrow r$ es falso, señale el valor de verdad de las siguientes expresiones.

I) $p \wedge \sim(\sim q \vee r)$

II) $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \wedge p$

III) $\sim(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim(q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)$

a) FFF b) VVV c) FVV d) VVF e) VFV

Desarrollo

$\sim (p \wedge q) \Rightarrow r$
V F F por la ley de implicación

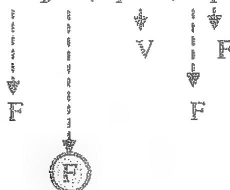
$\sim (p \wedge q)$ por la ley de la conjunción
F F por lo tanto p es F; q es F; r es F
V F

I) $p \wedge \sim(\sim q \vee r)$



por las leyes de conjunción y disyunción

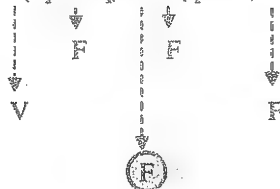
II) $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \Rightarrow r) \wedge p$



por la ley de implicación

por la ley de la conjunción

III) $\sim(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim(q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)$



por la ley de implicación

por la negación y la conjunción

Como FFF, la respuesta es **a**

(18) Utilizando las leyes lógicas, simplifique: $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)] \vee (p \wedge r)$

a) $p \vee q$ b) p c) q d) $p \Rightarrow q$ e) $q \Rightarrow r$

Desarrollo

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)] \vee (p \wedge r) \equiv [\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)] \vee (p \wedge r)$, ley de implicación

$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \vee (p \wedge r)$, ley condicional

$\equiv [p \wedge \underbrace{(\sim q \vee q)}_{V}] \vee (p \wedge r)$

$\equiv p \vee (p \wedge r) \equiv p$ por absorción

por lo tanto la respuesta es **b**

(19) Determinar los esquemas más simples de la proposición: $\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee p$

a) q b) p c) $p \vee q$ d) $p \wedge q$ e) $p \rightarrow q$

Desarrollo

$\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee p$ por la condicional

$\sim[\sim(\sim(p \wedge q) \vee \sim q)] \vee p$ por la negación

$\sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee p$ por conmutatividad en la conjunción

$\sim[\sim q \vee (p \wedge q)] \vee p$ por absorción

$\sim[\sim q \vee p] \vee p$ por Morgan

$(\sim p \wedge q) \vee p$ por absorción

$p \vee q$, la respuesta es **c**

(20) De la falsedad de la proposición: $(p \longrightarrow \sim q) \vee (\sim r \longrightarrow s)$ determinar el valor de verdad de los esquemas moleculares

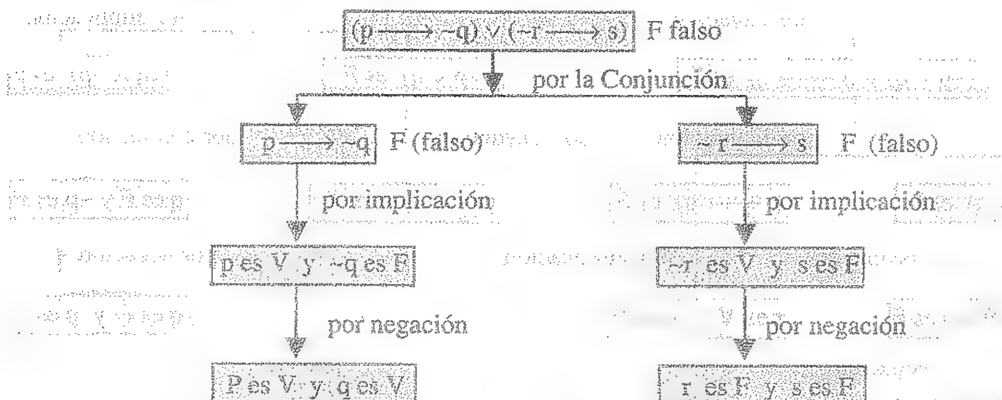
a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$ b) $(\sim r \vee q) \longleftrightarrow (\sim q \vee r) \wedge s$

c) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$

a) FFF b) FVV c) VVF d) VFV e) VVV

Desarrollo

Determinaremos el valor de verdad de p, q, r y s



Por lo tanto: p es V, q es V, r es F, s es F

I) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$



El valor de verdad es F

II) $(\sim r \vee q) \longleftrightarrow (\sim q \vee r) \wedge s$



El valor de verdad es F

III) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$

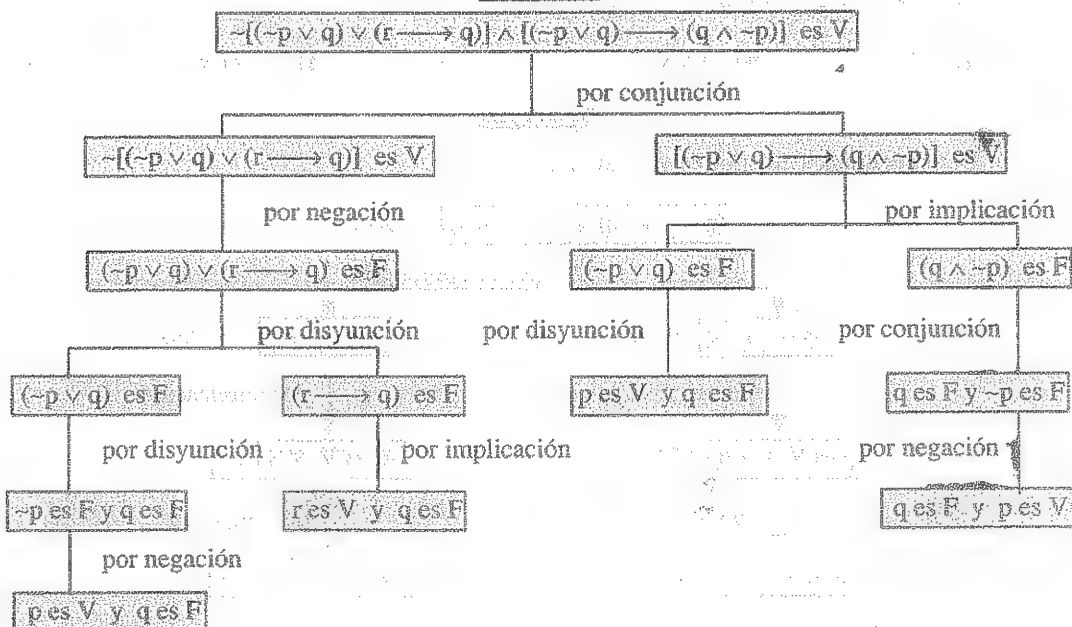


F El valor de verdad es F. Como FFF la respuesta es **a**

(21) El valor de verdad de: $\sim[(\sim p \vee q) \vee (r \longrightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$ es verdadera. Hallar el valor de verdad de p, q, y r

a) VFV **b)** VVF **c)** FVV **d)** VFF **e)** FFV

Desarrollo



por lo tanto $\begin{cases} p \text{ es } V \\ q \text{ es } F \\ r \text{ es } V \end{cases}$ es decir VFV, la respuesta es **a**

(22) De la falsedad de $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)$, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones: I) $\sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$ II) $\sim(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

III) $p \Rightarrow \sim(q \Rightarrow \sim(s \Rightarrow r))$.

a) VFV b) FVF c) VFF d) FFV e) VVF

Desarrollo

$(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)$

por disyunción

$p \Rightarrow \sim q$ F es falso — $\sim r \Rightarrow \sim s$ F falso

por implicación — por implicación

p es V y ~q es F — ~r es V y ~s es F

por negación — por negación

p es V y q es V — r es F y s es V

Luego p es V; q es V; r es F; s es V

I) $\sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$

F por disyunción

V F por negación

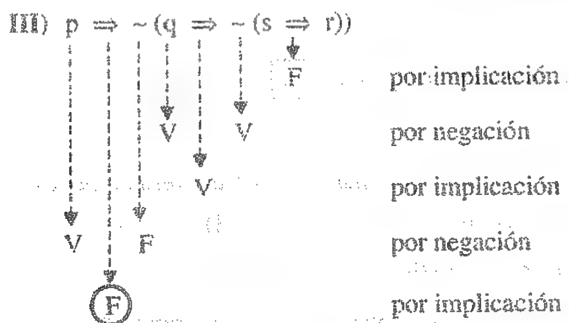
(F) por implicación

II) $\sim(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

V

F V por negación e implicación

(V) por implicación



Como FVF la respuesta es **b**

(23) Se sabe que $p \wedge q$, y $q \longrightarrow t$ son falsas, determinar el valor de verdad de los esquemas moleculares siguientes:

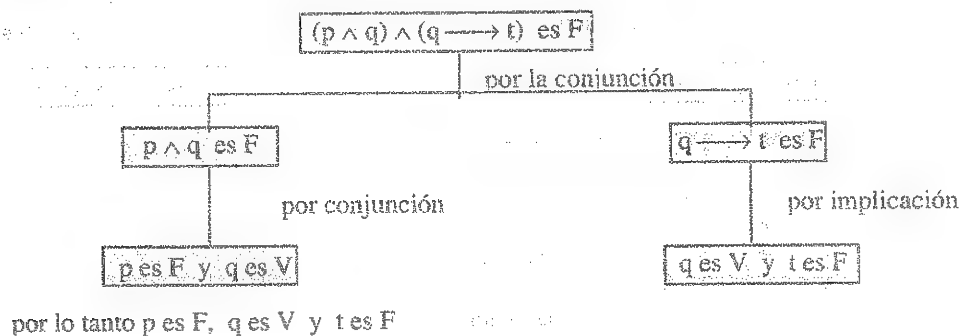
I) $(\sim p \vee t) \vee \sim q$ II) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

III) $[(p \longrightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)] \longleftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim t)]$

a) VVV b) FFF c) FVV d) VFF e) VFV

Desarrollo

Determinaremos el valor de verdad de las proposiciones p, q, t



por lo tanto p es F, q es V y t es F

a) $(\sim p \vee t) \vee \sim q$



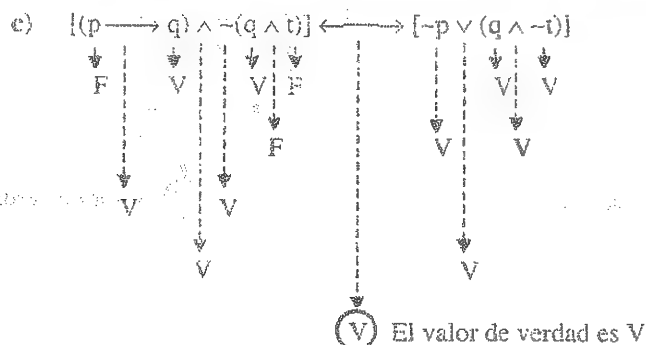
el valor de verdad es V

b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$



El valor de verdad es V

c) $[(p \longrightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)] \longleftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim t)]$



Como VVV la respuesta es **a**

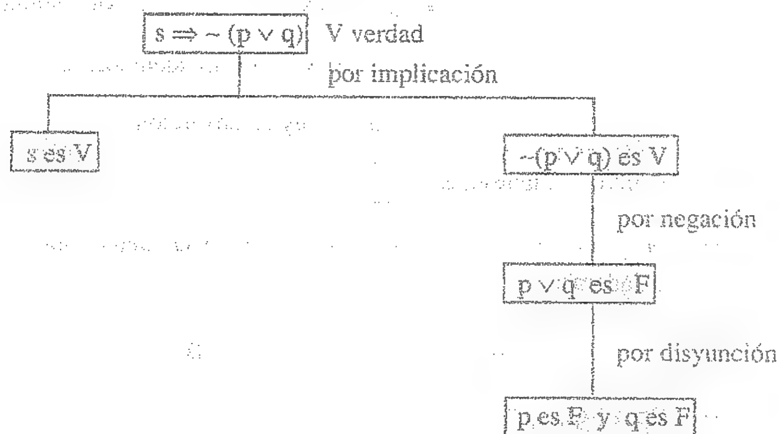
(24) Si s y la proposición: $s \Rightarrow \sim(p \vee q)$ son verdaderos, indique los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\sim(p \wedge \sim q)$ II) $(p \Rightarrow q) \vee \sim s$ III) $s \vee (q \Rightarrow q)$

a) FFF b) VVV c) FVV d) VFF e) VFV

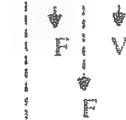
Desarrollo

Determinaremos el valor de verdad de las proposiciones p y q



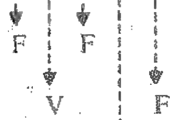
Luego se tiene: s es V; p es F; q es F

I) $\sim(p \wedge \sim q)$



el valor de verdad es V

II) $(p \Rightarrow q) \vee \sim s$



valor de verdad es V

III) $s \vee (q \Rightarrow p)$



el valor de verdad es V

Como VVV la respuesta es **b**

(25) La simplificación de la proposición compuesta $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \wedge p$ es:

a) q b) $p \Rightarrow q$ c) p d) $p \vee q$ e) $p \wedge q$

Desarrollo

$[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \wedge p \equiv [\sim(\sim p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)] \wedge p$ por la ley del condicional

$\equiv [(p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge p$, por Morgan y condicional

$\equiv [(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q)] \wedge p$, por conmutativa

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge p$, por ley idempotencia

$\equiv p$ por la ley de absorción

Por lo tanto la respuesta es **c**

(26) Si la proposición $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim s \vee r)$ es falsa. Determinar cual de las proposiciones son verdaderas:

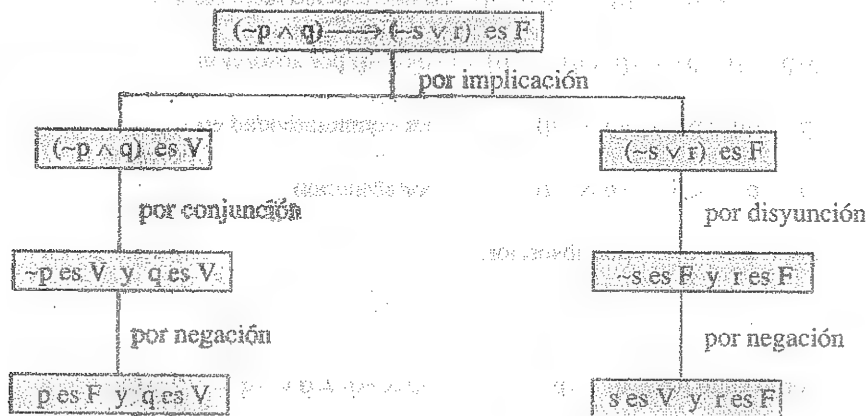
I) $\sim[(p \longrightarrow q) \longrightarrow r]$ II) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge [(\sim r \vee r) \wedge s]$

III) $[(p \vee \sim q) \wedge p] \vee \sim q$

a) VFF b) VFV c) FVV d) FVF e) VVV

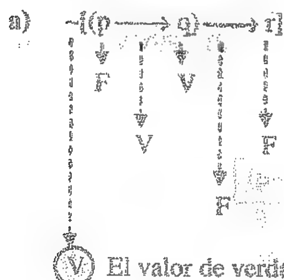
Desarrollo

Determinaremos los valores de p, q, r, s



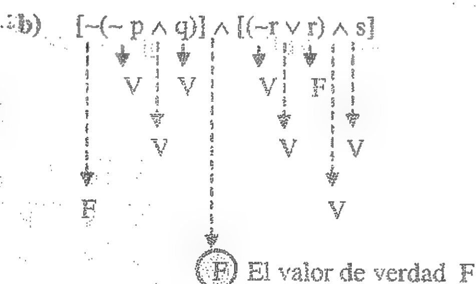
por lo tanto $\begin{cases} p \text{ es } F, \ q \text{ es } V \\ s \text{ es } V, \ r \text{ es } F \end{cases}$

a) ~[(p ⟶ q) ⟶ r]



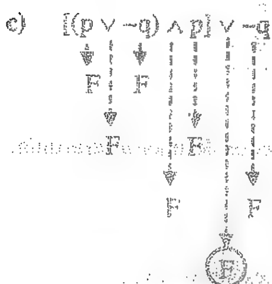
Ⓥ El valor de verdad es V

b) [~(~ p ∧ q)] ∧ [(~r ∨ r) ∧ s]



Ⓕ El valor de verdad F

c) [(p ∨ ~q) ∧ p] ∨ ~q



Ⓕ El valor de verdad es F

Como VFF la respuesta es **a**

(27) Determinar el esquema más simple de la proposición [(p ∧ q) ∨ (p ∧ ~q)] ∨ (~p ∧ ~q)

a) p b) q c) p ⇒ q d) p ∨ ~q e) ~p ∧ q

Desarrollo

$[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por distribución respecto a $\wedge$

$[((p \wedge q) \vee p) \wedge ((p \wedge q) \vee \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por absorción

$[p \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por conmutatividad en $\vee$

$[p \wedge (p \vee \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por absorción

$p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por absorción

$p \vee \sim q$

por lo tanto $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv p \vee \sim q$

Luego la respuesta es **d**

(28) Determine la matriz principal de: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

a) VVFF b) VVVF c) VVVV d) FFVV e) FVVV

Desarrollo

p	q	~	(p ∨ q)	⇔	(~p	∧	~q)
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

NOTA.- La matriz principal se coloca debajo del operador de mayor jerarquía.

Por lo tanto se tiene VVVV luego la respuesta es **c**

(29) Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

I) Si f es una función par entonces f^2 es impar.

II) Si f es una función par entonces f^3 es impar.

III) Si f es una función impar entonces f^2 es par.

IV) Si f es una función impar entonces f^3 es impar.

V) Si f es una función impar entonces –f es par.

a) VFVVV b) VFVVF c) VFVFV d) VVFFF e) VFVFF

Desarrollo

I) f es par entonces f^2 es par (verdadero V)

En efecto: $f(x) = f(-x), \ \forall \ x \in D_f$

$$[f(x)]^2 = [f(-x)]^2 \text{ entonces } f^2(x) = f^2(-x)$$

II) f es par entonces f^3 es impar (falso F)

En efecto: f es par $\Rightarrow$ f^n es par, $\forall \ n \in Z^+$, en particular para n = 3

III) f es impar $\Rightarrow$ f^2 es par (verdadero V)

En efecto: $f(x) = -f(-x), \ \forall \ x \in D_f$

$$f^2(x) = [f(x)]^2 = [-f(-x)]^2 = f^2(-x)$$

IV) f es impar $\Rightarrow$ f^3 es impar (verdadero V)

En efecto: $f(x) = -f(-x), \ \forall \ x \in D_f$

$$f^3(x) = [f(x)]^3 = [-f(-x)]^3 = -f^3(-x)$$

V) f es impar, entonces -f es par (verdadero V)

En efecto: si f es impar entonces $f(-x) = -f(-x)$

$-f(-x) = f(-x)$ $\Rightarrow$ f es impar

como VFVVV la respuesta es **a**

(30) La tabla de verdad de: $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ es:

a) VVVV b) HF c) VVFF d) FFVV e) VFFF

Desarrollo

p	q	(~p	∨	q)	⇔	(p	∨	~q)
V	V	F	V		V	V	V	F
V	F	F	F		F	V	V	V
F	V	V	V		F	F	F	F
F	F	V	F		F	F	V	V

Como VFFF la respuesta es **e**

(31) Determinar los valores de verdad de los enunciados, con respecto al conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

I) $\exists x \in A / x + 7 = 7$ II) $\exists x \in A / x + 7 < 15$ III) $\forall x \in A / x + 7 < 15$

a) FVF b) VFV c) FFV d) VVF e) VFF

Desarrollo

I) $\exists x \in A$; (no existe $x \in A$) tal que $x + 7 = 7 \Rightarrow x = 0$ y $0 \notin A$ por lo tanto es F

II) $\exists x \in A / x + 7 < 15$ si existe por ejemplo $x = 1$ de donde $8 < 15$ por lo tanto es V

III) $\forall x \in A / x + 7 < 15$ es falso puesto que $x = 9$, $x + 7 = 16 \not< 15$ por lo tanto es F

como se tiene FVF la respuesta es **a**

(32) Determinar el valor de verdad de los enunciados considerando como universo a los números reales.

I) $\{\forall x \in R / x^3 = x\}$ II) $\{\exists x \in R / 2x = x\}$ III) $\{\exists x \in R / x^2 + 3x - 2 = 0\}$

a) VFF b) FVV c) VVV d) FFF e) VFV

Desarrollo

I) $\{\forall\ x \in R / x^3 = x\}$ es falso F puesto que para $x = 2$, $2^3 \neq 2$

II) $\{\exists\ x \in R / 2x = x\}$ es verdadero V puesto que para $x = 0$, $0 = 0$

III) $\{\exists\ x \in R / x^2 + 3x - 2 = 0\}$ es verdadero V, puesto que $x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \in R$$

como se tiene FVV la respuesta es **b**

(33) Determine el valor de verdad de las inecuaciones, considerando como universo a los números reales.

I) $\{\forall\ x \in R / x - 3 < x\}$ II) $\{\forall\ x \in R / x + 3 < 6\}$ III) $\{\exists\ x \in R / x + 3 < 4\}$

a) VFF b) VVF c) VFV d) FFF e) VVV

Desarrollo

I) $\{\forall\ x \in R / x - 3 < x\}$ es verdadero V, puesto que $x - 3 < x \Rightarrow -3 < 0$

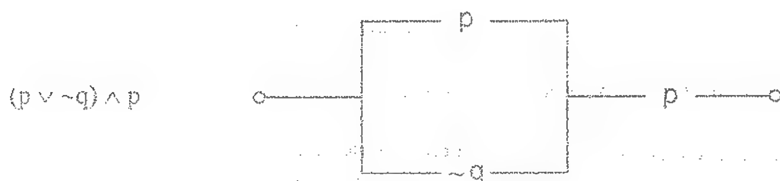
II) $\{\forall\ x \in R / x + 3 < 6\}$ es falso F, puesto que $x + 3 < 6 \Rightarrow x < 3$

III) $\{\exists\ x \in R / x + 3 < 4\}$ es verdadero V, puesto que $\exists\ \frac{1}{2} \in R\ /\ \frac{1}{2} + 3 < 4$

Como se tiene VFV la respuesta es **c**

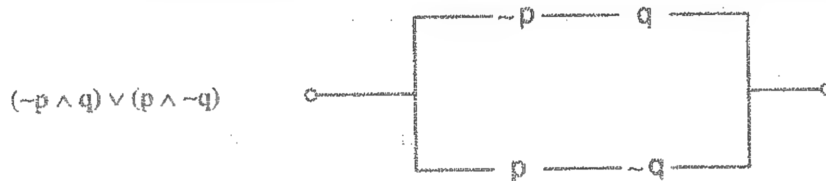
(34) Dibujar el circuito correspondiente a la expresión lógica $(p \vee \sim q) \wedge p$

Desarrollo



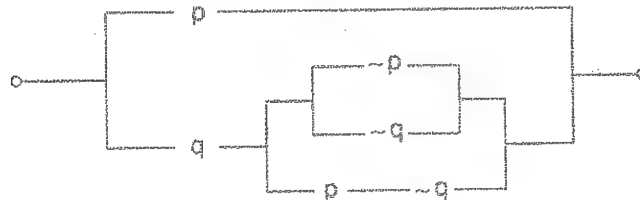
(35) Dibujar el circuito correspondiente a la expresión lógica $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

Desarrollo

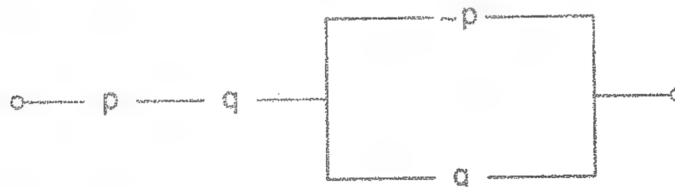


(36) Dibujar el circuito correspondiente a la expresión lógica $(p \vee q) \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim q)]$

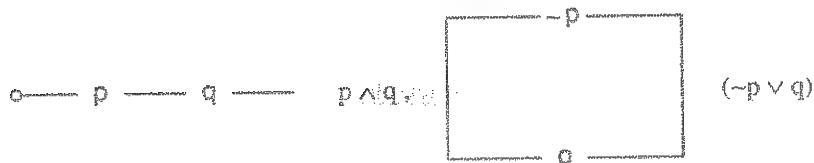
Desarrollo



(37) Determinar la expresión lógica que corresponde al circuito



Desarrollo

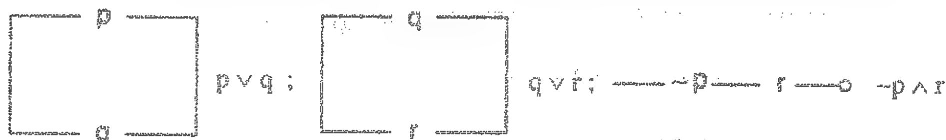


por lo tanto la expresión lógica es: $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

(38) Determinar la expresión lógica que corresponde al circuito

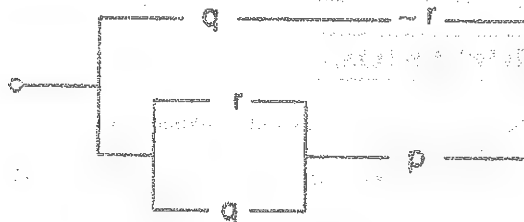


Desarrollo



Luego la expresión lógica para el circuito es: $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim p \wedge r)$

(39) Determinar la expresión lógica que corresponde al circuito.



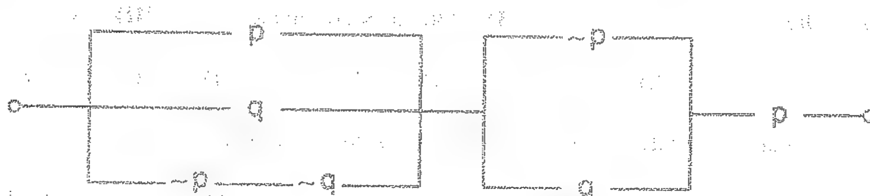
Desarrollo

—— q —— ~r —— $(q \wedge \sim r)$

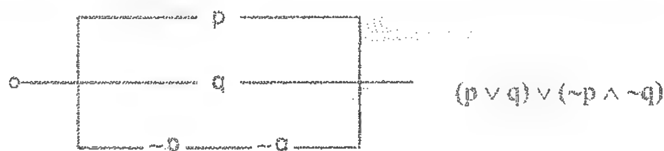
[r ∨ q] —— p —— $[(r \vee q) \wedge p]$

Luego la expresión lógica del circuito es: $(q \wedge \sim r) \vee [(r \vee q) \wedge p]$

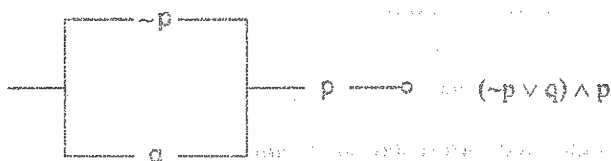
(40) Determinar la expresión lógica que corresponde al circuito



Desarrollo



$(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$



$(\sim p \vee q) \wedge p$

Luego la expresión lógica del circuito es: $[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge p]$

19.21. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1) De los siguientes enunciados indicar cuáles son proposiciones.

I) $5 + 8 = 13$ II) ¡Bravo! III) $7 < 11$

a) VFV b) VVF c) FVV d) FVF e) VVV

2) De los siguientes enunciados indicar cuáles son proposiciones:

I) $x + 5 = 9$ II) $x - 3 < 10$ III) $3 + 4 \neq 7$

a) VVF b) FFF c) VVV d) FFV e) FVF

3) Indicar cuál de los enunciados son abiertos:

I) $x + 4 = 8$ II) $x - 5 < 12$ III) $8 > 13$

a) FFF b) VFV c) VVF d) VVV e) FVF

4) Indicar cuál no son proposiciones ni enunciados abiertos.

I) ¡Bravo! II) ¿Quién es ese fulano? III) $x < 0$

a) VVF b) VFV c) FVV d) VFF e) FVF

5) Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $(3 + 5 = 8) \vee (5 - 3 = 4)$ II) $(3 + 8 = 11) \vee (7 - 3 > 1)$ III) $(5 - 3 = 8) \Rightarrow (1 - 7 = 6)$

a) FVF b) VVV c) VFV d) VVF e) FFV

(6) Si $p(x): x^2 - 16 = 0$; q(x): x – 12 = 0; $r(x): x^2 > 9$. Hallar el valor de verdad de:

I) [p(2) ∧ ~q(2)] ⇔ r(4) **II)** [~p(4) ⇒ r(5)] ∨ ~q(2)

III) [(p(1) ∧ p(3)) ⇔ (r(2) ∧ ~q(3))] ⇔ [~q(3) ∨ ~p(-3)]

a) VFV **b)** FVF **c)** VVV **d)** FFF **e)** VFF

(7) Si $p(x): x^3 = 27$; $q(x): x^2 = 9$; r(x): x < 10, Hallar el valor de la verdad de:

I) [p(1) ⇒ q(12)] ⇔ [r(-3) ∨ ~r(3)] **II)** [p(0) ∨ ~q(-1)] ∨ [r(-5) ⇒ [r(-6) ∨ r(0)]

III) [(p(3) ∨ p(2)) ⇔ (r(2) ∧ ~q(3))] ⇔ [~q(3) ∨ ~p(-3)]

a) VVV **b)** FVV **c)** VFV **d)** VVF **e)** FFF

(8) Cuántos "V" y "F" tiene la matriz principal de ~[(p ⇒ q) ∧ q]

a) 2 y 2 **b)** 3 y 1 **c)** 1 y 3 **d)** 4V **e)** 4F

(9) Cuántos "V" y "F" tiene la matriz principal de [~p ∧ (q ∨ r)] ⇔ [(p ∨ r) ∧ q]

a) 4 y 4 **b)** 5 y 3 **c)** 2 y 6 **d)** 3 y 5 **e)** 6 y 2

(10) Determine la matriz principal de la proposición de ~(p ∨ q) ⇔ (~p ∧ ~q)

a) VVFF **b)** FFVV **c)** VVVV **d)** FFFF **e)** VFVF

(11) Cuántos "V" y "F" tiene la matriz principal de ~p ∨ [q ⇔ ~(p Δ ~q)]

a) 3 y 1 **b)** 2 y 2 **c)** 1 y 3 **d)** 4V **e)** 4F

(12) Cuántos "V" y "F" tiene la matriz principal de ~[(~p ∨ q) ⇒ r] ∧ r

a) 8V **b)** 8F **c)** 6 y 2 **d)** 4 y 4 **e)** 5 y 3

(13) Halle la tabla de verdad de: (~p ∨ q) ⇔ (p ∨ ~q)

a) FFFF **b)** VVVV **c)** FFVV **d)** VVFF **e)** VFVF

(14) El valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) [p ∧ (p ⇒ q)] ⇒ q **II)** (~p ∧ ~q) ⇒ (p ∨ q) **III)** (p ∨ q) ⇒ (p ∧ q) es:

a) VVV **b)** FFF **c)** VFF **d)** FVF **e)** FVV

(15) Si $r \Leftrightarrow s$ es F, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $(\sim r \vee \sim s) \Rightarrow (s \vee r)$ **II)** $\sim r \Leftrightarrow \sim s$ **III)** $(\sim r \wedge s) \Leftrightarrow (r \Rightarrow s)$

a) FVF **b)** VFV **c)** FFV **d)** VVF **e)** FFF

(16) Hallar los valores de verdad de p; q; r si: $[(\sim p \vee q) \vee (r \Rightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$ es falso F

a) VVV **b)** FFF **c)** diferentes posibilidades **d)** VFV **e)** FVF

(17) Si la proposición compuesta: $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee t)$ es falsa, indicar las proposiciones que son verdaderas.

a) p y q **b)** p y t **c)** r y t **d)** q y t **e)** q y r

(18) Si la proposición: $[\sim(p \Rightarrow q) \wedge (\sim r \vee s)] \Rightarrow r$ es falsa, halle los valores de verdad de p,q y r

a) FVV **b)** VFF **c)** FVF **d)** VFV **e)** FFV

(19) Señale si es verdadero o falso las siguientes proposiciones:

I) $(p \vee q) \Rightarrow p$ **II)** $(p \wedge q) \Rightarrow p$ **III)** $q \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

a) VVV **b)** FFF **c)** FVF **d)** VFV **e)** FVV

(20) El esquema indicado $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow t] \vee [p \Rightarrow t]$ es falso, señale el valor de verdad de:

I) $p \Rightarrow \sim q$ **II)** $(q \vee t) \Rightarrow t$ **III)** $(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim t$

a) VFV **b)** FVF **c)** VVF **d)** FFV **e)** FVV

(21) Las siguientes proposiciones son verdaderas:

I) $p \vee (r \Rightarrow q)$ **II)** $p \Rightarrow (r \wedge \sim q)$ **III)** $(p \Rightarrow q) \wedge r$

Señale el valor de verdad de: p, q y r

a) FFV **b)** VFF **c)** FVV **d)** VFV **e)** FVF

(22) Si: $\sim p \vee [(p \wedge r) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)]$ es falso, halle el valor de verdad de: $[(p \Rightarrow q) \vee r] \Leftrightarrow (p \wedge r)$

a) F **b)** V **c)** V o F **d)** V y F **e)** no se puede determinar

(23) Si $[\sim(p \Rightarrow q) \wedge \sim r] \Rightarrow [p \wedge (q \vee r)]$ es falsa, halle los valores de verdad de p, q y r.

a) VFF b) VFV c) FVF d) FVV e) VVF

(24) Si se sabe que el esquema es falso y "t" es verdadero, diga los valores de r, t y s:

$[(r \Rightarrow s) \wedge t] \vee (s \Leftrightarrow w)$

a) FVV b) VVF c) FVF d) VFV e) FFV

(25) La proposición: $\sim p \Rightarrow (q \vee \sim r)$ es falsa, la proposición "s" es verdadera ¿Cuántos de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) $p \Rightarrow q$ II) $\sim s \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$ III) $(p \wedge \sim q) \vee \sim r$ IV) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

(26) Si $[(p \wedge q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$ es falso y además "q" es verdadero. Determine los valores de verdad de p, q y r

a) VVF b) FVV c) VFV d) FVF e) VFF

(27) Si "s" es verdadera y la proposición $[(s \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)] \vee (p \wedge r)$ es falsa, halle los valores de verdad de p, q, r.

a) VFV b) FVF c) FFF d) VVV e) VVF

(28) Si se sabe que: $p \wedge \sim r$ es falsa; $r \Rightarrow q$ es verdadera, $q \vee t$ es falsa. Determine los valores de verdad de p,q,r,t.

a) FFFF b) FFVV c) VVFF d) FVFV e) VFVF

(29) Si: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$, es falsa, determinar los valores de p, q y r.

a) FVV b) VFF c) VFV d) FVF e) FFF

(30) De las siguientes proposiciones:

I) $[\sim(\sim p \wedge q) \wedge q] \Rightarrow p$ II) $[\sim p \wedge \sim(\sim p \wedge r)] \Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$

III) $[\sim(\sim p \vee \sim q) \vee q] \Rightarrow q$, cuales son tautológicas.

a) Solo I b) Solo I y II c) Solo I y III

d) Solo II y III e) todas

(31) Si la proposición compuesta: $\sim[(p \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Delta \sim q)]$ es verdadera, hallar el valor de verdad las proposiciones r, p y q respectivamente.

a) FVV b) VFF c) FVF d) VFV e) VFF

(32) Si la proposición: $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \vee p)$ es falsa. Obtener el valor de verdad de las proposiciones: **I)** $(p \wedge s) \Rightarrow (t \Leftrightarrow u)$ **II)** $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (w \wedge q)$
s,t,u,w son proposiciones arbitrarias.

a) FFF b) VVV c) VVF d) FVV e) VFF

(33) Si la proposición: $\{[(r \Rightarrow s) \vee p] \Rightarrow \sim(p \Delta q)\}$ es verdadera, además $p \Leftrightarrow q$ es falsa, halle los valores de verdad de p, q, r y s.

a) FVVF b) VFFV c) FVFV d) VFVF e) VVFF

(34) De la falsedad de: $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s)$ deduce el valor de verdad de:

I) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$ **II)** $[(\sim r \vee q) \wedge q] \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

III) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

a) VVV b) FFF c) VFV d) FVF e) VFF

(35) De la proposición compuesta: $\sim[(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s] \Rightarrow (\sim p \vee s)$ se conoce que es falso, señale el valor de p, q, r y s.

a) FFVV b) VVFF c) VVVF d) FFFV e) FFFF

(36) La proposición: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow s$ es falsa. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow s] \vee \sim p$ **II)** $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (s \vee \sim p)$

III) $[\sim p \wedge (q \Rightarrow s)] \vee \sim p$ **IV)** $\sim[(p \wedge (q \Rightarrow s)) \vee p]$

a) VVVV b) FFFF c) VVFF d) FFVV e) VFVF

(37) Al evaluar el siguiente esquema por tablas de verdad: $[\sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge p] \Leftrightarrow [q \vee \sim(p \vee q)]$ se obtiene como matriz principal.

a) VFFV b) FVVF c) VFVF d) FVFV e) VVFF

(38) Si la proposición: $(p \vee \sim r) \Leftrightarrow (s \Rightarrow w)$ es verdadera y $\sim w \Rightarrow \sim s$ es falsa. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ **II)** $(s \Leftrightarrow \sim w) \Rightarrow (r \wedge \sim p)$ **III)** $[t \Rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim(p \Rightarrow r)$

a) VVV b) FFF c) FFV d) VVF e) VFV

(39) Indique cuáles son tautológica:

I) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ **II)** $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

III) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow [\sim p \vee (p \wedge (\sim p \Rightarrow q))]$

a) I y III b) II y III c) I y II d) II e) III

(40) Si las siguientes proposiciones: $(p \vee \sim q)$ y $(q \wedge p)$ son verdadera y falsa respectivamente. Determine los valores de verdad de:

I) $(q \Rightarrow p) \wedge \sim(q \Rightarrow \sim p)$ **II)** $(q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ **III)** $(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

a) VVF b) FFV c) FVF d) VFV e) FFF

(41) Dado el siguiente esquema molecular $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge r] \Leftrightarrow [r \Rightarrow (p \,\Delta\, q)]$ si elaboramos su tabla de verdad calcule la diferencia entre el numero de verdaderos y el numero de falsos de su matriz principal.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 0 e) 1

(42) Si la proposición: $\sim[(q \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ es verdadera. Determine el valor de verdad de:

I) $(\sim s \Rightarrow \sim q) \,\Delta\, (r \Rightarrow p)$ **II)** $\sim(q \wedge \sim s) \wedge (p \wedge \sim r)$

III) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \Rightarrow r)$

a) VFV b) FVF c) VVF d) FFV e) VFF

(43) Si las siguientes proposiciones no son falsas $\sim p \wedge \sim(r \Rightarrow s)$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$. De los valores de verdad de:

I) $(p \vee q) \wedge (r \Rightarrow s)$ II) $(p \vee q) \vee (s \Rightarrow \sim r)$ III) $(p \Rightarrow q) \Delta q$

a) VVV b) FFF c) VFV d) FVF e) FFV

(44) Si la proposición "s" es falsa, y el siguiente esquema: $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow r) \vee (p \wedge \sim s)]$ es una tautología, entonces los valores de verdad de p, q y r son respectivamente.

a) VFV b) FVF c) VFF d) FVV e) FFV

(45) Si la proposición compuesta: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow [(m \Delta r) \vee \sim r]$ indique el valor veritativo de p, q, m y r en ese orden.

a) FVVF b) VFVV c) FFVV d) FVFV e) VFVF

(46) Del resultado de la tabla de verdad del siguiente esquema molecular $(p \Delta t) \Rightarrow (q \Rightarrow t)$, se tiene que la diferencia entre la cantidad de verdaderos y falsedades es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 3 e) 5

(47) Si la proposición: $(p \Delta q) \wedge \sim(q \Rightarrow s)$ es verdadera, halle los valores de verdad de:

I) $(s \wedge r) \Rightarrow (p \vee s)$ II) $(s \Rightarrow q) \Delta (p \vee s)$

a) VV b) FF c) VF d) FV e) no se puede determinar

(48) ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son tautológicas?

I) $[(p \wedge \sim p) \vee (q \Rightarrow p)] \wedge \sim(\sim p \vee q)$ II) $[(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q)] \vee (p \Rightarrow \sim q)$

III) $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)] \wedge [\sim p \vee (\sim p \Rightarrow r)]$ IV) $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow [q \wedge (\sim q \vee r)]$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

(49) ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son tautológicas?

I) $\sim q \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \wedge (p \vee q)$ II) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim(p \wedge q)$

III) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim p] \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ IV) $[(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Leftrightarrow [(\sim q \Leftrightarrow p) \wedge p]$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

50. La simplificación de: $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p$ es:

a) $p \wedge q$ b) $p \vee q$ c) $p \vee \sim q$ d) $\sim p \vee q$ e) $\sim p \wedge q$

51. Al simplificar: $t \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \wedge [\sim p \wedge (q \Rightarrow p)]$ se obtiene:

a) $\sim p$ b) $\sim q$ c) $p \wedge q$ d) $\sim t$ e) $q \wedge t$

52. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes?

I) $p \wedge \sim q$ II) $\sim(p \Rightarrow q)$ III) $\sim(q \vee \sim p)$

IV) $\sim(q \vee \sim p)$ V) $\sim(\sim q \Rightarrow \sim p)$

a) I y II b) II y III c) III y IV d) IV y V e) todas

53. ¿Cuál o cuáles de las proposiciones son equivalentes a: $\sim(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim r)$

I) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$ II) $(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r)$ III) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

a) solo I b) I y II c) I y III d) II y III e) I, II y III

54. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son equivalentes a: $\sim r \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

I) $p \Rightarrow (q \vee r)$ II) $\sim p \wedge (q \vee r)$ III) $\sim p \Rightarrow (\sim p \vee r)$

a) I b) II c) III d) I y III e) I y II

55. La proposición $\sim[(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)] \vee [(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ es equivalente a:

a) $p \Rightarrow q$ b) $p \Rightarrow \sim q$ c) $\sim(p \Rightarrow q)$ d) $\sim(p \Rightarrow \sim q)$ e) $\sim q \Rightarrow p$

56. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes?

I) $(\sim q \Rightarrow p) \wedge q$ II) $(q \vee \sim p) \Rightarrow (p \vee q)$ III) $(\sim q \wedge \sim p) \Rightarrow q$

a) solo I b) solo II c) solo II y III d) solo I y II e) solo I y III

57. El siguiente esquema: $[(p \Rightarrow r) \Rightarrow p] \wedge [\sim p \Rightarrow (p \wedge q)]$ es equivalente a:

a) p b) q c) $p \vee q$ d) $q \vee r$ e) $\sim p \wedge q$

58. La simplificación de la expresión molecular es: $\sim[(p \Rightarrow q) \vee \sim(p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p)$ es:

a) p b) $\sim p$ c) q d) $\sim q$ e) $\sim p \vee q$

(59) Simplificar si es posible $[\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p)] \wedge (p \vee q)$

a) $p \vee q$ **b)** $p \wedge q$ **c)** q **d)** p **e)** $\sim q$

(60) La simplificación de la proposición molecular es: $[(p \wedge \sim q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge r] \vee p$ es:

a) q **b)** p **c)** $p \vee q$ **d)** $p \vee \sim q$ **e)** $\sim q$

(61) ¿Cuáles de las proposiciones son equivalentes lógicas?

I) $\sim(q \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow q \vee p$ **II)** $[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q] \Leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$

III) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

a) solo I **b)** I y II **c)** I y III **d)** II y III **e)** solo III

(62) Indicar cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si $U = \{1,2,3\}$ es el universo y si $x, y \in U$.

I) $\exists x, \exists y / x^2 < y+1$ **II)** $\forall x, \exists y / x^2 + y^2 < 12$ **III)** $\forall x, \forall y / x^2 + y^2 < 12$

a) VVF **b)** VFV **c)** FVV **d)** FVF **e)** FFV

(63) Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones (en este orden)

p: $\exists x \in A / 2x + 1 = 5$ donde $A = \{0,1,2,3,4\}$; $q: \forall n \in Z^+ / 3n$ es divisible por 3 ; $r: \exists x \in R / x^2 + 7 < 0$; $s: \forall x \in Q / x^2 \geq x$

a) FFVV **b)** VVFF **c)** VFVF **d)** FVFV **e)** VVVF

(64) Si $M = \{0,1,2,3,4,5\}$. Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones: p: $\forall x \in M / x + 3 > 2 \wedge x + 1 < 7$; q: $\exists x \in N / x + 1 = 5 \Rightarrow x - 2 = 1$; r: $\forall x \in M / x + 2 = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

a) VFV **b)** FVF **c)** VVV **d)** VVF **e)** FFV

(65) Dadas las proposiciones: p: $\exists x \in Z / (4x+2)(3x-7)=0$; $q: \forall x \in Z / (x^2 > 0) \vee (x-1) < 0$; r: $\exists x \in N / (4x + 2)(3x - 7) = 0$. Señale el valor de verdad de p, q, r y además: $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)] \Rightarrow r$

a) FFVV **b)** FVFV **c)** VVFF **d)** VFVF **e)** VVVV

(66) Si $M = \{1,2,3,4\}$, cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\forall x \in M / x \leq 3 \wedge x > 4$ **II)** $\exists x \in M / x + 2 < 8 \Rightarrow (x - 1 > 5)$

III) $\exists x \in M / x \leq 3 \wedge x \geq 2$

a) FFV **b)** VVF **c)** VFV **d)** FVF **e)** FFF

(67) Sea $M = \{0,1,2,3\}$ el dominio de x e y, señala el valor de verdad de:

I) $\forall x, \exists y / (x^2 - y^2 < 10) \vee (x^2 < y + 1)$

II) $\forall x, \forall y / (x^2 - y^2 > -10) \wedge (x^2 > y + 1)$ **III)** $\exists x, \exists y / (x^2 > y^2)$

a) FVF **b)** VFV **c)** FFV **d)** VVF **e)** VFF

(68) Si se conoce: $M = \{2,4,6,8\}$ señale la verdad o falsedad de:

I) $\forall x \in M, \forall y \in M / (x > y) \vee (y > x)$ **II)** $\exists x \in M, \forall y \in M / (x > y) \vee (y > x)$

III) $\exists x \in M, \exists y \in M / (x < y < x + 1)$ **IV)** $\forall x \in M, \exists y \in M / (-x \leq y \leq -x + 1)$

a) VFV **b)** FVF **c)** VVV **d)** FFF **e)** VFF

(69) Si $M = \{-1,1,2,7\}$, cuál es el valor de verdad, de las siguientes proposiciones:

I) $\forall x \in M, \exists y \in M / x^2 \geq y$ **II)** $\exists x \in M, \forall y \in M / x \geq y^2 \geq 0$

III) $\exists x \in M, \exists y \in M / (x \leq 3) \vee (y^2 > 2)$

a) VFF **b)** VVF **c)** FVF **d)** VFV **e)** FFF

(70) Si $M = \{0,2,4,6,8\}$, indicar el valor de verdad de:

I) $\forall x \in M / x + 3 < 10$ **II)** $\exists x \in M / x + 3 < 10$

III) $\forall x \in M / x + 1 > 0$ **IV)** $\forall x \in M, \exists y \in M / x \geq y$

a) FFFF **b)** VVVV **c)** FVFV **d)** FFVV **e)** VVFF

19.22. RESPUESTAS.-

1	a	2	b	3	c	4	a	5	b	6	c	7	d	8	b
9	a	10	c	11	b	12	b	13	a	14	c	15	b	16	c
17	a	18	b	19	c	20	d	21	c	22	b	23	a	24	b
25	a	26	b	27	c	28	a	29	b	30	c	31	a	32	e
33	a	34	b	35	c	36	b	37	a	38	c	39	b	40	c
41	a	42	b	43	d	44	d	45	b	46	c	47	a	48	b
49	b	50	c	51	d	52	e	53	a	54	d	55	e	56	c
57	a	58	d	59	c	60	b	61	d	62	a	63	b	64	c
65	c	66	a	67	b	68	c	69	d	70	c				

CAPITULO XX

TEORIA DE CONJUNTOS

20.1. DEFINICIÓN.-

Un concepto se dice que es primitivo, cuando dicho concepto se acepta sin definición, en la matemática son conceptos primitivos, el de conjunto, de elemento y la relación de pertenencia, sin embargo debido a su gran importancia en todas las ramas de la matemática aceptaremos las siguientes definiciones.

20.2. DEFINICIÓN.-

Entenderemos por conjunto a toda agrupación, colección o reunión de objetos de cualquier especie siempre que exista un criterio preciso que nos permita que un objeto pertenece o no a dicha agrupación. Los objetos que "pertenecen a un conjunto" se llama elementos del conjunto.

NOTACIÓN.- A los conjuntos representaremos con las letras mayúsculas A,B,C,...., y a sus elementos representaremos con letras minúsculas a,b,x,....

20.3. RELACIÓN DE PERTENENCIA (∈).-

La relación de pertenencia es el símbolo que relaciona a los elementos de un conjunto con el mismo conjunto:

(elemento) ∈ (conjunto)

Si un objeto x es un elemento o pertenece al conjunto A, escribiremos

$$x \in A$$

y leeremos "x pertenece al conjunto A".

Si x no es un elemento del conjunto A, escribiremos

$$x \notin A$$

y leeremos "x no pertenece al conjunto A"

OBSERVACIÓN.-

1) Sea A el conjunto formado por los nombres de los siguientes países, Perú, Chile, Ecuador, Colombia, podemos escribir entonces

Perú ∈ A

Colombia ∈ A

Argentina ∉ A

Brasil ∉ A

Al conjunto A expresaremos en cerrando entre llaves a sus elementos:

A = {Perú, Chile, Ecuador, Colombia}

2) Sea A el conjunto formado por las letras n, m, p, q, t del mismo modo podemos escribir:

p ∈ A

q∈ A

w ∉ A

z ∉ A

Al conjunto A expresaremos encerrando entre llaves a sus elementos: A={n,m,p,q,t}

20.4. DIAGRAMAS DE VENN – EULER.-

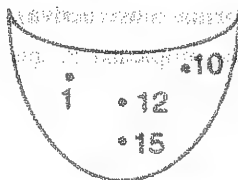
Para facilitar nuestra compresión intuitiva de los conjuntos, los representaremos gráficamente mediante los llamados "Diagramas de VENN", estos diagramas son curvas cerradas de la forma.



En el interior de estás curvas cerradas, representaremos mediante puntos a los elementos del conjunto.

Ejemplo.-

① Sea A={1,10,12,15}. El conjunto A será representado mediante el diagrama de Venn



② Sea A = {-1,3,-5,0}, su diagrama de VENN es



20.5. DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS.-

Un conjunto está bien determinado, cuando se conoce con exactitud que elementos pertenecen o no al conjunto. Cuando se conoce que elementos pertenece o no al conjunto se dice que el conjunto está bien definido, un conjunto se puede definir por extensión y por comprensión.



POR EXTENSIÓN (en forma tabular).- Cuando se nombra cada uno de los elementos del conjunto, se dice que el conjunto ha sido definido por extensión.

Ejemplo.-

① El conjunto A de los números naturales que son mayores o iguales a cero y menor o igual a 10 queda definido por extensión y se escribe así:

A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

(2) El conjunto A de los números naturales que dividen simultáneamente a los números 8 y 12, queda definido por extensión y escribimos así: A = {1,2,4}

Observe que 3 ∉ A, pues 3 no divide a 8 a pesar que 3 divide a 12.

POR COMPRENSIÓN (en forma constructiva).- Un conjunto se define por comprensión cuando se da una propiedad P, que solo lo satisfacen los elementos del conjunto.

Ejemplos.-

(1) A = {x/x es una vocal} y se lee: "A es el conjunto de las x tal que x es una vocal"

(2) A = {x ∈ N / 0 < x < 9} y se lee "A es el conjunto de las x perteneciente a los naturales tal que las x sean mayores que cero y menores que 9.

20.6. CLASES DE CONJUNTOS.-

a) CONJUNTOS NUMÉRICOS.-

En matemática los conjuntos numéricos característicos que se estudian son: Los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números irracionales, los números reales y los números complejos.

- El conjunto de los números naturales N = {1,2,3,...}

- El conjunto de los números enteros Z = {..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...}

- El conjunto de los números racionales $Q = \{\frac{m}{n} / m \in Z \wedge n \in Z, n \neq 0\}$

- El conjunto de los números irracionales I = {x/x tiene representación decimal infinita no periódica}

- El conjunto de los números reales R = {x/x es racional o x es irracional}

- El conjunto de los números complejos $C = \{a + bi / a \in R \wedge b \in R, i = \sqrt{-1}\}$

OBSERVACIÓN.- El conjunto de los números reales, es la reunión de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, es decir:

$$R = N \cup Z \cup Q \cup I$$

A los números reales se le pueden representar mediante una recta que se denomina recta real.



b) CONJUNTO FINITO.-

Es el conjunto que está formado por un número limitado de elementos.

Ejemplos.- ① A = {x/x es una vocal}

② $B = \{x \in N / 5 \leq x < 12\}$

③ C = {x/x es un día de la semana}

c) CONJUNTO INFINITO.-

Es el conjunto que está formado por un número infinito de elementos.

Ejemplo.- ① $A = \{x \in Z /$ x es impar$\}$

② B = {x/x es número natural}

20.7. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS.-

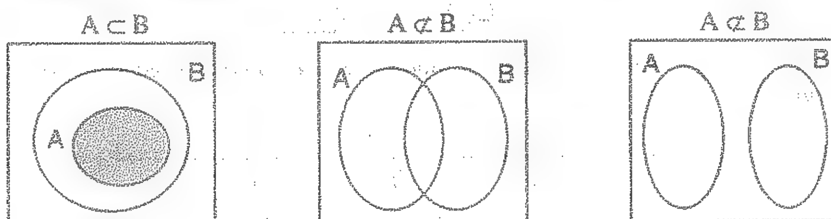
a) INCLUSIÓN DE CONJUNTOS.- (Sub – conjuntos)

Se dice que el conjunto A es un subconjunto B, o que A está contenido en B, o que A es parte de B, si todo elementos de A pertenece al conjunto B se escribe $A \subset B$ y se lee "A está incluido en B, o A está contenido en B o A es parte de B".

Está definición en forma simbólica se expresa.

$$A \subset B \Leftrightarrow [\forall x \in A, x \in A \Rightarrow x \in B]$$

De la misma definición se sigue que es suficiente que exista al menos un elemento del conjunto A que no sea elemento de B para que A no sea subconjunto de B, en este caso se denota: $A \not\subset B$.



Ejemplo.- Si $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ entonces $A \subset B$. En efecto se observa por simple inspección que todo elemento de A es también elemento de B.

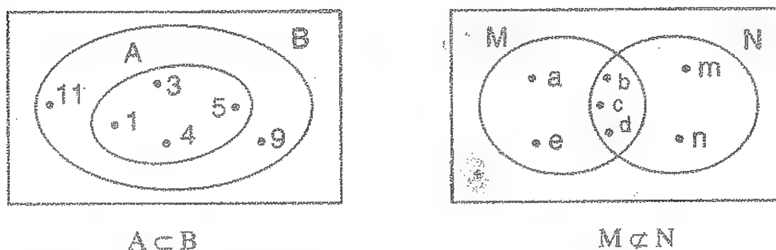
Ejemplo.- Consideremos los siguientes conjuntos: $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,3,5,7,9,11\}$

$M = \{a,b,c,d,e\}$, $N = \{b,c,d,m,n\}$. Podemos afirmar que:

i) $A \subset B$, por que todos los elementos de A están en B.

ii) $M \not\subset N$, por que algunos elementos de M no están en N.

Estos representaremos usando diagrama de VENN – EULER.



$A \subset B$ $\qquad$ $M \not\subset N$

b) **SUBCONJUNTO PROPIO.-** Diremos que A es un subconjunto propio de B, o parte de B, si se verifica $A \subset B$ y además existe algún $x \in B$ tal que $x \notin A$.

Ejemplo.- El conjunto $A = \{2,4,6\}$ es un subconjunto propio de $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ puesto que $A \subset B$ además $1 \in B$, $3 \in B$, $5 \in B$ tal que $1 \notin A$, $3 \notin A$, $5 \notin A$.

c) **PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN.-**

① $\phi \subset A$, $\forall$ conjunto A, donde ϕ es el conjunto vacío.

② $A \subset A$, (propiedad reflexiva)

③ $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (propiedad transitiva)

4 Sí $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$ (propiedad antisimetrica)

Demostración

① 1° $\forall x,\ x \in \phi \Rightarrow x \in A$, def. $\subset$

2° $p \longrightarrow q$ (es una tautología)

F F o V

3° $\phi \subset A$, por definición de $\subset$

② 1° Suponiendo que $\forall x,\ x \in A$ hipótesis

2° Como $p \longrightarrow p$ es una tautología

3° Sí $x \in A \Rightarrow x \in A$ es verdadero por la parte 2°

4° $A \subset A$ de 3° y def. $\subset$

③ 1° $A \subset B$ hipótesis

2° $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° def. $\subset$

3° $B \subset C$, hipótesis

4° $\forall x,\ x \in B \Rightarrow x \in C$, 3° def. $\subset$

5° Por la Ley Transitiva $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Rightarrow p \longrightarrow r$ (ley del silogismo hipotético)

6° $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$, de 2°, 4° y 5°

7° $A \subset C$, 6° def. $\subset$

20.8. IGUALDAD DE CONJUNTOS.-

DEFINICIÓN.- Dos conjuntos A y B se dice que son iguales sí y solo sí $A \subset B$ y $B \subset A$.

En forma simbólica se tiene:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Se lee "El conjunto A es igual al conjunto B, si y solo si A está contenido en B y B está contenido en A".

20.9. PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE CONJUNTOS.-

① $A = A, \forall A$ (reflexiva) ② $A = B \Rightarrow B = A$ (simétrica)

③ $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$ (Transitiva)

Demostración

① 1° $A \subset A$ por reflexividad de inclusión.

2° $A = A$ 1° y definición de igualdad.

② 1° $A = B$ por hipótesis

2° $A \subset B \wedge B \subset A$ 1° def. de =

3° $B \subset A \wedge A \subset B$ 2° y la ley conmutativa

4° $B = A$ 3° y definición de =

③ 1° $A = B$ por hipótesis

2° $A \subset B \wedge B \subset A$, 1° definición de =

3° $B = C$ por hipótesis

4° $B \subset C \wedge C \subset B$ 3° definición de =

5° $A \subset B \wedge B \subset C$ 2° y 4° y transitiva de inclusión.

6° $A \subset C$ 5° transitiva inclusión.

7° $C \subset B \wedge B \subset A$, 4° y 3° y transitiva.

8° $C \subset A$, 7° transitiva inclusión.

9° $A = C$, 6° y 8° definición de =.

20.10. CONJUNTOS ESPECIALES.-

① **CONJUNTO VACIO (Nulo).-** Es el conjunto que no tiene elementos y se representa simbólicamente por la letra griega ϕ (phi) y se define como:

$$\phi = \{x / x \neq x\}$$

y se lee: para cualquier x tal que, x es diferente de x, no se satisface para algún elemento

Ejemplo.-

① $A = \{x \in R / x^2 + 1 = 0\}$ es un conjunto vacío, pues la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíz real, luego $A = \phi$.

② $A = \{x \in N / 2 < x < 3\}$ es un conjunto vacío, porque no existe un número natural que sea mayor que 2 y menor que 3, luego $A = \phi$.

③ $A = \{x \in Z / 15x^2 - 11x + 2 = 0\}$ es un conjunto vacío, pues al resolver la ecuación $15x^2 - 11x + 2 = 0$ se obtiene $x = \frac{2}{5}$, $x = \frac{1}{3}$ que no son números enteros por lo tanto $A = \phi$.

OBSERVACIÓN.- El conjunto vacío ϕ está incluido en todo conjunto es decir $\phi \subset A, \forall A$

② **CONJUNTO UNIVERSAL.-** Es el conjunto tomado como base o conjunto fijo, para la determinación de otros conjuntos y se denota por U. También al conjunto universal se le llama el universo.

Los conjuntos más importantes en matemática son los conjuntos numéricos: R, N, Z, Q, I, C en ese orden.

Ejemplos.-

① El conjunto universal $U = \{x \in Z / -3 \leq x < 9\}$ es universo de los conjuntos $A = \{-3,0,2,5\}$, $B = \{-2,1,3,7\}$, $C = \{-1,0,2,5,8\}$ porque todos los elementos de los conjuntos A, B y C pertenecen al conjunto U.

(2) Dado el conjunto universal $U = \{x \in Z^+ / x \leq 40\}$. Determinar los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x / x^2 \leq 28\}$

Desarrollo

Tabulando el conjunto universal $U = \{1,2,3,4,5,...,39,40\}$

$1 \in A$ puesto que $1 \leq 28$

$2 \in A$ puesto que $2^2 \leq 28$

$3 \in A$ puesto que $3^2 = 9 \leq 28$

$4 \in A$ puesto que $4^2 = 16 \leq 28$

$5 \in A$ puesto que $5^2 = 25 \leq 28$

$6 \notin A$ puesto que $6^2 = 36 \not\leq 28$

por lo tanto el conjunto A está dado por: $A = \{1,2,3,4,5\}$

b) $B = \{x + 2 / x < 9\}$

Desarrollo

Para $x = 1 \Rightarrow x + 2 = 3 \in B$

$x = 2 \Rightarrow x + 2 = 4 \in B$

$x = 3 \Rightarrow x + 2 = 5 \in B$

$x = 4 \Rightarrow x + 2 = 6 \in B$

$x = 5 \Rightarrow x + 2 = 7 \in B$

$x = 6 \Rightarrow x + 2 = 8 \in B$

$x = 7 \Rightarrow x + 2 = 9 \notin B$

Luego se tiene: $B = \{3,4,5,6,7,8\}$

(3) **CONJUNTO UNITARIO.-** Se llama conjunto unitario, al conjunto que está formado por un solo elemento.

Ejemplos.- a) $A = \{x \in R / x + 2 = 0\} = \{-2\}$

b) $A = \{x \in N / 1 < x < 3\} = \{2\}$

c) $A = \{x \in Z^+ / x^2 - 1 = 0\} = \{1\}$

④ **CONJUNTOS COMPARABLES.-** Dos conjuntos A y B son comparables sí: $A \subset B \vee B \subset A$.

Los conjuntos A y B no serán comparables sí: $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$.

Ejemplos.-

a) Si $A = \{a,e,i\}$ y $B = \{a,e,i,o,u\}$ de donde A es comparable con B para que $A \subset B$.

b) Si $M = \{1,5,7,8\}$ y $N = \{2,5,6,8,9\}$ los conjuntos M y N no son comparables pues $M \not\subset N \wedge N \not\subset M$.

⑤ **CONJUNTOS DISJUNTOS.-** Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son disjuntos.

En forma simbólica se expresa: A es disjunto con B si y solo si, $\nexists x / x \in A \wedge x \in B$

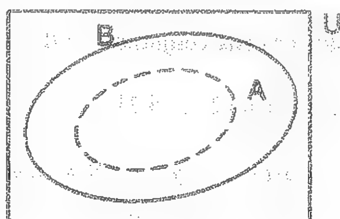
Ejemplos.- a) Los conjuntos $A = \{1,3,5,7\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$ son disjuntos.

b) Los conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{r,s,t,u\}$ son disjuntos.

20.11. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS CONJUNTOS.-

Para mostrar a los elementos de los conjuntos o visualizar relaciones entre estos, existen los llamados diagrama de VENN – EULER que son regiones del plano limitados por líneas geométricas.

Al conjunto universal se acostumbra representar por medio de un rectángulo.



20.12. OPERACIONES CON CONJUNTOS.-

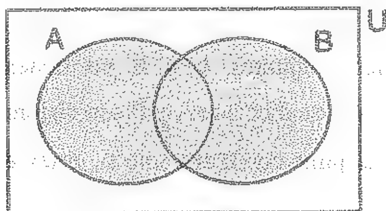
① **UNIÓN DE CONJUNTOS.-** La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todas los elementos de A y todos los elementos B.

A la unión de los conjuntos A y B denotaremos por: $A \cup B$ y se lee "A unión B".

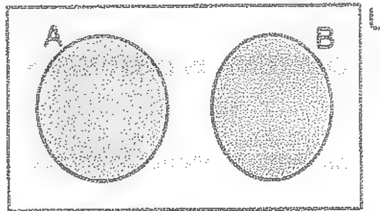
En forma simbólica:

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

La parte sombreada de los siguientes diagramas es una representación gráfica de la unión.



A y B no disjuntos



A y B disjuntos

Donde U representa al conjunto universal y la parte sombreada representa la unión $A \cup B$

Ejemplo.-

① Sí $A = \{x \in N / 1 < x < 6\}$ y $B = \{x \in N / 3 < x < 8\}$. Calcular $A \cup B$.

Desarrollo

Calculando los elementos de cada conjunto A y B: $A = \{2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$

$A \cup B = \{2,4,5\} \cup \{4,5,6,7\} = \{2,4,5,6,7\}$

② Sí $A = \{x \in N / x \text{ es par}\}$ y $B = \{x \in N / x \text{ es impar}\}$ entonces

$A \cup B = \{x \in N / x \text{ es par} \vee x \text{ es impar}\} = N$

a) **PROPIEDADES DE LA UNION DE CONJUNTOS.-**

(1) $A \cup A = A$ (2) $A \cup \phi = A$

(3) $A \cup U = U$ (4) $A \cup B = B \cup A$

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (6) $A \subset (A \cup B)$

(7) $B \subset (A \cup B)$ (8) $A \subset C \wedge B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$

Demostración

(1) i) $A \cup A \subset A$ por demostrar

1° $x \in A \cup A$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in A$, 1° definición de U

3° por la tautología de $P \vee P \Leftrightarrow P$ podemos afirmar que: $x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A$

4° $x \in A \cup A \Rightarrow x \in A$, 3° definición U

5° $A \cup A \subset A$, 4° definición C

ii) $A \subset A \cup A$ por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° Sí $x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in A)$, por tautología $p \Leftrightarrow p \vee p$

3° $x \in A \Rightarrow x \in A \cup A$, 2° definición U

4° $A \subset A \cup A$, 3° definición C

5° de i), ii) se tiene $A \cup A = A$ definición de "="

(2) i) $A \cup \phi \subset A$ por demostrar.

1° $x \in A \cup \phi$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in \phi$, 1° definición U

3° $x \in A$, 2° definición de ϕ

4° $x \in A \cup \phi \Rightarrow x \in A$, 1° y 3°

5° $A \cup \phi \subset A$, 4° definición C

ii) $A \subset A \cup \phi$ por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in \phi$, 1° definición ϕ

3° $x \in A \cup \phi$, 2° definición U

4° $x \in A \Rightarrow x \in A \cup \phi$, 1° y 4°

5° $A \subset A \cup \phi$ 4° definición U

$\therefore$ de i) y ii) se concluye que $A \cup \phi = A$ definición de "="

(3) **i)** $A \cup U \subset U$ por demostrar

1° $x \in A \cup U$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in U$, 1° definición U

3° $x \in U$, 2° y definición de U

4° $x \in A \cup U \Rightarrow x \in U$, 1° y 3°

5° $A \cup U \subset A$, 4° definición C

ii) $U \subset A \cup U$ por demostrar

1° $x \in U$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in U$, 1° definición U

3° $x \in A \cup U$, 2° definición U

4° $x \in U \Rightarrow x \in A \cup U$, 1° y 3°

5° $U \subset A \cup U$, 4° definición C

6° $\therefore A \cup U = U$, por i), ii) definición "="

(4) **i)** $A \cup B \subset B \cup A$ por demostrar

1° $x \in A \cup B$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in B$, 1° definición U

3° $x \in B \vee x \in A$, 2° y tautología $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4° $x \in B \cup A$, 3° definición ∪

5° $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \cup A$, 1° y 4°

6° $A \cup B \subset B \cup A$, 5° definición ⊂

ii) $B \cup A \subset A \cup B$ por demostrar

1° $x \in B \cup A$, por hipótesis

2° $x \in B \vee x \in A$, 1° definición ∪

3° $x \in A \vee x \in B$, 2° y tautología $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4° $x \in A \cup B$, 3° definición ∪

5° $x \in B \cup A \Rightarrow x \in A \cup B$, 1° y 4°

6° $B \cup A \subset A \cup B$, 5° definición ⊂

∴ $A \cup B = B \cup$ de i), ii) y definición "="

5) **i)** $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ por demostrar

1° $x \in (A \cup B) \cup C$, por hipótesis

2° $x \in A \cup B \vee x \in C$ 1° definición ∪

3° $x \in A \vee x \in B \vee x \in C$, 2° definición ∪

4° $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$, 3° propiedad asociativa

5° $x \in A \vee x \in B \cup C$, 4° definición ∪

6° $x \in A \cup (B \cup C)$, 5° definición ∪

7° $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$, 1° y 6°

8° $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$, 7° definición ⊂

ii) $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$, por demostrar

1° $x \in A \cup (B \cup C)$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in B \cup C$, 1° definición U

3° $x \in A \vee x \in B \vee x \in C$, 2° definición U

4° $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$, 3° definición propiedad asociativa

5° $x \in A \cup B \vee x \in C$, 4° definición U

6° $x \in (A \cup B) \cup C$, 5° definición U

7° $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$, 1° y 6°

8° $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$, 7° definición C

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, de i), ii) definición "="

(6) 1° Sea $x \in A$ por hipótesis

2° Pero $p \longrightarrow (p \vee q)$, $\forall q$ es una tautología

3° $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$, 1° y 2°

4° $A \subset A \cup B$, 3° definición C

(7) 1° $x \in B$ por hipótesis

2° Pero $p \longrightarrow (p \vee q)$, $\forall q$ es una tautología

3° $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, 1° y 2°

4° $B \subset A \cup B$, 3° definición C

(8) 1° $A \subset C$, por Hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in C$, 1° y definición C

3° $B \subset C$, por hipótesis

4° $x \in B \Rightarrow x \in C$, 3° definición C

5° $(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$, 2° y 4°

6° $x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$, 5° definición U

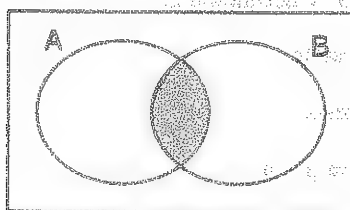
7° $A \cup B \subset C$, 6° definición C

(2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS.- La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos comunes al conjunto A y al conjunto B, y que denotado por "A ∩ B" y se lee "A intersección B".

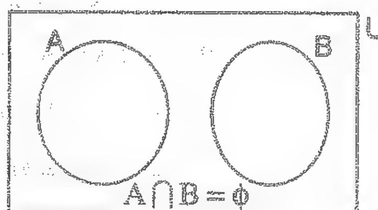
En forma simbólica:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$$

La parte sombreada de las siguientes diagramas es una representación gráfica de la intersección.



A y B no disjuntos



A y B disjuntos

Ejemplo.- Sí $A = \{x \in Z / -2 < x < 6\}$ y $B = \{x \in Z / 0 < x < 10\}$. Hallar $A \cap B$

Desarrollo

Calculando los elementos de los conjuntos A y B.

$A = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\therefore$ $A \cap B = \{1,2,3,4,5\}$

a) **PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS.-**

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap \phi = \phi$

(3) $A \cap B = B \cap A$

(4) $A \cap U = A$

(5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(6) $A \cap B \subset A$

(7) $A \cap B \subset B$

(8) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C, \forall C$

(9) Sí $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$

(10) Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

(11) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(12) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración

(1) i) $A \cap A \subset A$ por demostrar

1° $x \in A \cap A$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in A$, 1° definición $\cap$

3° Por tautología $p \wedge p \Leftrightarrow p$ se tiene

4° $x \in A$, de 2° y 3°

5° $x \in A \cap A \Rightarrow x \in A$, 1° y 4°

6° $A \cap A \subset A$, 5° y definición $\subset$

ii) $A \subset A \cap A$ por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° por tautología $p \Leftrightarrow p \wedge p$

3° $x \in A \wedge x \in A$, 1° y 2°

4° $x \in A \cap A$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A \Rightarrow x \in A \cap A$, 1° y 4°

6° $A \subset A \cap A$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cap A = A$, i), ii) definición =

(2) i) $A \cap \phi \subset \phi$ por demostrar

1° $x \in A \cap \phi$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in \phi$, 1° definición $\cap$

3° $x \in \phi$, 2° y $p \wedge q \Leftrightarrow q$

4° $x \in A \cap \phi \Rightarrow x \in \phi$, 1° y 3°

5° $A \cap \phi \subset \phi$, 4° definición $\subset$

ii) $\phi \subset A \cap \phi$

como ϕ es subconjunto de cualquier conjunto entonces $\phi \subset A \cap \phi$.

Luego por lo tanto: $A \cap \phi = \phi$ de i), ii) y definición =

③ i) $A \cap B \subset B \cap A$, por demostrar

1° $x \in A \cap B$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B$, 1° definición $\cap$

3° $x \in B \wedge x \in A$, 2° y $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4° $x \in B \cap A$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in B \cap A$, 1° y 4°

6° $A \cap B \subset B \cap A$, 5° definición $\subset$

ii) $B \cap A \subset A \cap B$, por demostrar

1° $x \in B \cap A$, por hipótesis

2° $x \in B \wedge x \in A$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \in B$, 2° y $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4° $x \in A \cap B$, 3° definición $\cap$

5° $x \in B \cap A \Rightarrow x \in A \cap B$, 1° y 4°

6° $B \cap A \subset A \cap B$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cap B = B \cap A$, i), ii) definición =

④ i) $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ por demostrar

1° $x \in (A \cap B) \cap C$, por hipótesis

2° $x \in A \cap B \wedge x \in C$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$, 2° y definición $\cap$

4° $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$, 3° propiedad asociativa.

5° $x \in A \wedge x \in (B \cap C)$, 4° definición $\cap$

6° $x \in A \cap (B \cap C)$, 5° definición $\cap$

7° $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$, 1° y 6°

8° $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$, 7° definición $\subset$

ii) $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$, por demostrar

1° $x \in A \cap (B \cap C)$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B \cap C$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$, 2° definición $\cap$

4° $(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$, 3° propiedad asociativa

5° $x \in A \cap B \wedge x \in C$, 4° definición $\cap$

6° $x \in (A \cap B) \cap C$, 5° definición $\cap$

7° $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$, 1° y 6°

8° $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$, 7° definición $\subset$

$\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, i), ii) definición =

(5) 1° $x \in A \cap B$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B$, 1° definición $\cap$

3° por tautología $p \wedge q \Leftrightarrow p$ se tiene.

4° $x \in A$, 2° y 3°

5° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, 1° y 4°

6° $A \cap B \subset A$, 5° definición $\subset$

(6) 1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° definición $\subset$

3° $x \in A \cap C$, por hipótesis

4° $x \in A \wedge x \in C$, 3° definición $\cap$

5° $x \in B \wedge x \in C$, 2° y 4°

6° $x \in B \cap C$, 5° definición $\cap$

7° $x \in A \cap C \Rightarrow x \in B \cap C$, 3° y 6°

8° $A \cap C \subset B \cap C$, 7° definición $\subset$

(7) 1° $A \subset C$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in C$, 1° definición $\subset$

3° $B \subset D$, por hipótesis

4° $x \in B \Rightarrow x \in D$, 3° definición $\subset$

5° $x \in A \wedge x \in B$, 2° y 4°

6° $x \in A \cap B$, 5° definición $\cap$

7° $x \in C \wedge x \in D$, 2° y 4°

8° $x \in C \cap D$, 7° definición $\cap$

9° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in C \cap D$, 6° y 8°

10° $A \cap B \subset C \cap D$, 9° definición $\subset$

(8) i) $A \cap B \subset A$ por demostrar

1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° definición $\subset$

3° $x \in A \cap B$, por hipótesis

4° $x \in A \wedge x \in B$, 4° definición $\cap$

5° $x \in A$, 2° y 4° y $p \wedge q \Rightarrow p$ es tautología

6° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, 3° y 5°

7° $A \cap B \subset A$, 6° definición $\subset$

ii) $A \subset A \cap B$ por demostrar

1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A$, por hipótesis

3° $x \in A \wedge x \in B$, 2° y 1° definición $\subset$

4° $x \in A \cap B$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, 1° y 4°

6° $A \subset A \cap B$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cap B = A$ por i), ii) y definición =

9 i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, por demostrar

1° $x \in A \cup (B \cap C)$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in (B \cap C)$, 1° definición $\cup$

3° $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, 2° definición $\cap$

4° $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, 3° y $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5° $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$, 4° definición $\cup$

6° $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 5° definición $\cap$

7° $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 1° y 6°

8° $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 7° definición $\subset$

ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, por demostrar

1° $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, por hipótesis

2° $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$, 1° definición $\cap$

3° $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, 2° definición $\cup$

4° $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, 3° $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5° $x \in A \vee x \in (B \cap C)$, 4° definición $\cap$

6° $x \in A \cup (B \cap C)$, 5° definición $\cup$

7° $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$, 1° y 6°

8° $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, 7° definición $\subset$

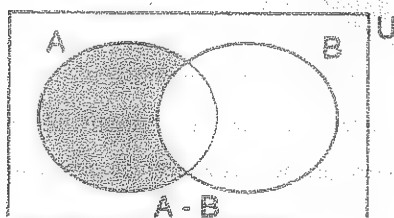
$\therefore$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, i), ii) definición =

③ LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS.-

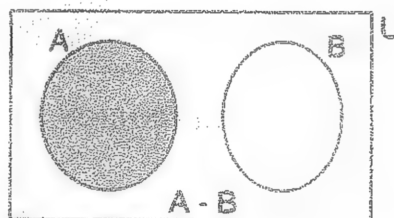
La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero que no pertenecen a B, a la diferencia de los conjuntos A y B denotaremos por "A – B" y se lee "A menos B". En forma Simbólica:

$$A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

La parte sombreada de los diagramas siguientes es una representación gráfica de la diferencia.



A y B no disjuntos



A y B disjuntos

Ejemplo.- Sí $A = \{2,3,4,5,9\}$ y $B = \{1,2,5,7,8\}$. La diferencia es $A - B = \{3,4,9\}$

a) PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS.-

① $A - A = \phi$

② $A - \phi = A$

③ $\phi - A = \phi$

③ $A - B \neq B - A$

⑤ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

⑥ $(A - B) \subset A$

⑦ Si $A \subset B \Rightarrow A - C \subset B - C, \ \forall C$

⑧ $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$

⑨ $B \cap (A - B) = \phi$

⑩ Si A y B disjuntos $\Rightarrow A \cap B = \phi$

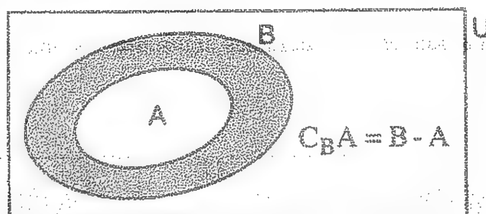
Demostración

Dejamos como ejercicio para el lector.

④ COMPLEMENTACIÓN DE UN CONJUNTO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Si A es un subconjunto de B, al complemento del conjunto A con respecto al conjunto B se define como la diferencia B – A y que denotaremos por $C_B A = B - A$.

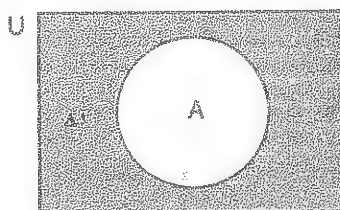
La parte sombreada del siguiente diagrama es la representación gráfica del complemento de A con respecto a B.



b) **DEFINICIÓN.-** El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir: la diferencia del conjunto universal U y el conjunto A, al complemento del conjunto A denotaremos por: A' o C_A y se lee "complemento de A"

En forma simbólica $A' = C_A = U - A = \{x / x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$.

La parte sombreada del siguiente diagrama es una representación gráfica del complemento de A.



Ejemplo.- Sí $U = \{x \in N / x \leq 10\}$ y $A = \{x \in N / 5 \leq x \leq 8\}$. Hallar A'

Desarrollo

Calculando los elementos se tiene: U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, A={5,6,7}

$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$

Ejemplo.- Sí U = N, A = {x ∈ N / x es par}, entonces:

$$A' = U - A = \{x \in N \,/\, x \text{ es impar}\}$$

c) **PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO.-**

① $(A')' = A$ ② $A \cup A' = U$

③ $A \cap A' = \phi$ ④ $U' = \phi$

⑤ $A - B = A \cap B'$ ⑥ $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

Demostración

① i) $(A')' \subset A$, por demostrar

1° $x \in (A')'$, por hipótesis

2° $x \notin A'$, 1° definición de complemento

3° $x \in A$, 2° definición de complemento

4° $x \in (A')' \Rightarrow x \in A$, 1° y 3°

5° $(A')' \subset A$, 4° definición $\subset$

ii) $A \subset (A')'$, por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° $x \notin A'$, 1° definición de complemento

3° $x \in (A')'$, 2° definición de complemento

4° $x \in A \Rightarrow x \in (A')'$, 1° y 3°

5° $A \subset (A')'$, 4° definición $\subset$

$\therefore$ $(A')' = A$ de i), ii) y definición "="

(2) i) $A \cup A' \subset U$, por demostrar

1° $x \in A \cup A'$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in A'$, 1° definición $\cup$

3° $x \in A \vee x \notin A$, 2° definición de complemento.

4° $x \in U$, 3° definición de conjunto universal U

5° $x \in A \cup A' \Rightarrow x \in U$, 1° y 4°

6° $A \cup A' \subset U$, 5° definición $\subset$

ii) $U \subset A \cup A'$, por demostrar

1° $x \in U$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \notin A$, 1° definición U

3° $x \in A \vee x \in A'$, 2° definición del complemento

4° $x \in A \cup A'$, 3° definición U

5° $x \in U \Rightarrow x \in A \cup A'$, 1° y 4°

6° $U \subset A \cup A'$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cup A' = U$ por i), ii) definición "="

(3) i) $A \cap A' \subset \phi$ por demostrar

1° $x \in A \cap A'$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in A'$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \notin A$, 2° definición del complemento

4° $x \in \phi$, 3° definición ϕ

5° $x \in A \cap A' \Rightarrow x \in \phi$, 1° y 4°

6° $A \cap A' \subset \phi$, 5° definición $\subset$

ii) $\phi \subset A \cap A'$ por demostrar, pero como el conjunto vacío ϕ es subconjunto de todo conjunto entonces $\phi \subset A \cap A'$

$\therefore$ $A \cap A' = \phi$, de i), ii) y definición =

(4) i) $U' \subset \phi$ por demostrar

1° $x \in U'$, por hipótesis

2° $x \notin U$, 1° definición de complemento

3° $x \in \phi$, 2° definición ϕ

4° $x \in U' \Rightarrow x \in \phi$, 1° y 3°

5° $U' \subset \phi$, 4° definición $\subset$

ii) $\phi \subset U'$ por demostrar, como el conjunto vacío ϕ es subconjunto de cualquier conjunto entonces $\phi \subset U'$ por lo tanto $U' = \phi$ de i), ii) y definición =

(5) i) $A - B \subset A \cap B'$, por demostrar

1° $x \in A - B$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \notin B$, 1° definición –

3° $x \in A \wedge x \in B'$, 2° definición de complemento

4° $x \in A \cap B'$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$, 1° y 4°

6° $A - B \subset A \cap B'$, 5° definición $\subset$

ii) $A \cap B' \subset A - B$, por demostrar

1° $x \in A \cap B'$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B'$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \notin B$, 2° definición de complemento

4° $x \in A - B$, 3° definición –

5° $x \in A \cap B' \Rightarrow x \in A - B$, 1° y 4°

6° $A \cap B' \subset A - B$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A - B = A \cap B'$ de i), ii) definición =

(6) 1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° definición $\subset$

3° $x \in B'$, por hipótesis

4° $x \notin B$, 3° definición de un complemento

5° $x \notin A$, 4° y 2° definición $\subset$

6° $x \in A'$, 5° definición de un complemento

7° $x \in B' \Rightarrow x \in A'$, 3° y 6°

8° $B' \subset A'$, 7° definición $\subset$

d) TEOREMA (Leyes de Morgan).-

Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal U y designaremos a los respectivos complementos por $A' = C_U A$, $B' = C_U B$, se verifican

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración

a) i) $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$, por demostrar

1° $x \in (A \cup B)'$, por hipótesis

2° $x \notin A \cup B$, 1° definición de complemento

3° $x \notin A \wedge x \notin B$, 2° definición $\cup$

4° $x \in A' \wedge x \in B'$, 3° definición de complemento

5° $x \in A' \cap B'$, 4° definición de $\cap$

6° $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in A' \cap B'$, 1° y 5°

7° $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$, 6° definición $\subset$

ii) $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, por demostrar

1° $x \in A' \cap B'$, por hipótesis

2° $x \in A' \wedge x \in B'$, 1° definición $\cap$

3° $x \notin A \wedge x \notin B$, 2° definición de complemento

4° $x \notin A \cup B$, 3° definición $\cup$

5° $x \in (A \cup B)'$, 4° definición de complemento

6° $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in (A \cup B)'$, 1° y 5°

7° $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$, de i), ii) y definición "="

b) **i)** $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, por demostrar

1° $x \in (A \cap B)'$, por hipótesis

2° $x \notin A \cap B$, 1° definición de complemento

3° $x \notin A \vee x \notin B$, 2° definición de $\cap$

4° $x \in A' \vee x \in B'$, 3° definición de complemento

5° $x \in A' \cup B'$, 4° definición $\cup$

6° $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in A' \cup B'$, 1° y 5°

7° $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$, 6° definición $\subset$

ii) $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$, por demostrar

1° $x \in A' \cup B'$, por hipótesis

2° $x \in A' \vee x \in B'$, 1° definición de $\cup$

3° $x \notin A \vee x \notin B$, 2° definición de complemento

4° $x \notin A \cap B$, 3° definición de $\cap$

5° $x \in (A \cap B)'$, 4° definición de complemento

6° $x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in (A \cap B)'$, 1° y 5°

7° $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$, por i), ii) definición "="

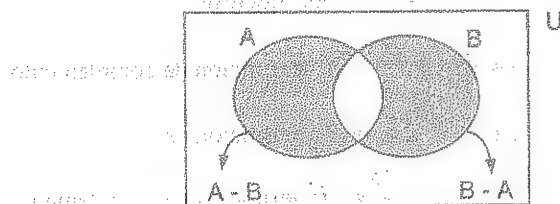
(5) **DIFERENCIA SIMÉTRICA.-** Sean A y B dos subconjuntos de U, a la diferencia simétrica A y B denotado por $A \Delta B$ se define por:

$$A \Delta B = \{x \in U / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

La notación $A \Delta B$ se lee "La diferencia simétrica de A y B".

En el diagrama de VENN – EULER, mostraremos la diferencia simétrica de A y B que es la parte sombreada de la figura.



Ejemplo.- Sean $A = \{1,2,3,4,6\}$ y $B = \{2,3,5,7\}$. Hallar $A \Delta B$

<u>**Desarrollo**</u>

Calculando $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $A \cap B = \{2,3\}$

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,2,3,4,5,6,7\} - \{2,3\} = \{1,4,5,6,7\}$

a) **PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA SIMÉTRICA.-**

(1) $A \Delta A = \phi$ (2) $A \Delta \phi = A$

(3) $A \Delta B = B \Delta A$ (4) $(A \Delta B) \Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

(5) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

(6) $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

Demostración

(1) $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \phi$ $\therefore\ A \Delta A = \phi$

(2) $A \Delta \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi) = A - \phi = A$ $\therefore\ A \Delta \phi = A$

(3) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \Delta A$

$\therefore\ A \Delta B = B \Delta A$

(4) Para demostrar $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, aplicamos:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ como $A - B$ y $B - A$ son conjunto disjuntos, entonces la unión de $A - B$ y $B - A$ es reemplazando por la suma (+)

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A - B) + (B - A) = A \cap B' + B \cap A'$$

Ahora haremos la demostración correspondiente.

$$(A\Delta B)\Delta C = [(A \cap B') \cup (B \cap A')]\Delta C$$

$$= [(A\cap B')\cup(B\cap A')] - C \cup C - [(A\cap B')\cup(B\cap A')]$$

$$= [(A\cap B')\cup(B\cap A')]\cap C' \cup C \cap [(A\cap B')\cup(B\cap A')]'$$

$$= [(A\cap B')\cap C'] \cup [(B\cap A')\cap C'] \cup C \cap [(A\cap B')' \cap (B\cap A')']$$

$$= A\cap B'\cap C' \cup B\cap A'\cap C' \cup C \cap [(A'\cup B)\cap(B'\cup A)]$$

$$= A\cap B'\cap C' \cup B\cap A'\cap C' \cup C \cap [(A'\cup B)\cap B' \cup (A'\cup B)\cap A]$$

$$= A\cap B'\cap C' \cup B\cap A'\cap C' \cup C \cap [(A'\cap B')\cup(B\cap B')\cup(A'\cap A)\cup(A\cap B)]$$

$$= A\cap B'\cap C'\cup B\cap A'\cap C'\cup C\cap[(A'\cap B')\cup(A\cap B)]$$

$$=[A\cap B'\cap C'\cup B\cap A'\cap C']\cup[A'\cap B'\cap C\cup(A\cap B\cap C)]$$

$$= A\cap B'\cap C'+B\cap A'\cap C'+A'\cap B'\cap C + A\cap B\cap C$$

$$=[A\cap B\cap C + A\cap B'\cap C'] + [B\cap(A'\cap C') + C\cap B'\cap A']$$

$$= A\cap[B\cap C + B'\cap C'] + [(B\cap C') + C\cap B']\cap A'$$

$$= A\cap[B\cap C + (B\cup C)'] + [B\Delta C]\cap A'$$

$$= A\cap[B\cup C\cap(B\cap C)'] + (B\Delta C)\cap A'$$

$$= A\cap(B\Delta C)' + (B\Delta C)\cap A' = A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)$$

$$\therefore\quad (A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C = A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)$$

20.13. CONJUNTO POTENCIA (O CONJUNTO DE PARTES DE UN CONJUNTO).-

Dado el conjunto A, llamaremos conjunto potencia de A al conjunto formado por todos los subconjuntos de A incluyendo al conjunto vacío ϕ.

Al conjunto potencia de A denotaremos por P(A) y de acuerdo a la definición P(A) se expresa:

$$P(A) = \{x \,/\, x \subset A\}$$

OBSERVACIÓN.- Para todo conjunto A se cumple: $\phi \subset A$ y $A \subset A$, luego ϕ y A son subconjuntos de A, o sea que son elementos de P(A) por lo tanto, para cualquiera conjunto A se verifica $\phi \in P(A)$, $A \in P(A)$

OBSERVACIÓN.- Un elemento de P(A) es un subconjunto de A, es decir:

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A$$

20.14. PROPIEDADES DEL CONJUNTO POTENCIA.-

Para cualquier conjunto A, se cumple:

① Sí $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

② Sí $B \subset A \Leftrightarrow B \in P(A)$

③ Sí $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

④ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

⑤ $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

Demostración

① i) $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$

1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in P(A)$, por hipótesis

3° $x \subset A$, 3° definición $P(A)$

4° $x \subset B$, 3° y 1° propiedad transitiva

5° $x \in P(B)$, 4° definición $P(A)$

6° $x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$, 2° y 5°

7° $P(A) \subset P(B)$, 6° definición $\subset$

ii) $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

1° $x \in A$, por hipótesis

2° $\{x\} \subset A$, 1°

3° $\{x\} \in P(A)$, 2° definición $P(A)$

4° $P(A) \subset P(B)$, por hipótesis

5° $\{x\} \in P(B)$, 3° y 4° definición $\subset$

6° $\{x\} \subset B$, 5° definición $P(B)$

7° $x \in B$, 6° definición B

8° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° y 7°

9° $A \subset B$, 8° definición $\subset$

(2) 1° $B \subset A$, por hipótesis

2° $B \in P(A)$, 1° definición P(A)

(3) i) $P(A) \subset P(B)$, por demostrar

1° $A = B$ por hipótesis

2° $x \in P(A)$ por hipótesis

3° $x \subset A$, 2° definición de P(A)

4° $x \subset B$, de 3° y 1°

5° $x \in P(B)$, 4° definición P(A)

6° $x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$, 5° y 1°

7° $P(A) \subset P(B)$, 6° definición $\subset$

ii) $P(B) \subset P(A)$ por demostrar

1° $A = B$, por hipótesis

2° $x \in P(B)$, por hipótesis

3° $x \subset B$, 2° definición de P(B)

4° $x \subset A$, 1° y 3°

5° $x \in P(A)$, 4° del P(A)

6° $x \in P(B) \Rightarrow x \in P(A)$, 1° y 5°

7° $P(B) \subset P(A)$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $P(A) = P(B)$, de i), ii) y definición =

(4) i) $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$ por demostrar

1° $x \in P(A \cap B)$, por hipótesis

2° $x \subset (A \cap B)$, 1° definición $P(A \cap B)$

3° $x \subset A \wedge x \subset B$, 2° propiedad

4° $x \in P(A) \wedge x \in P(B)$, 3° del P

5° $x \in P(A) \cap P(B)$, 4° definición $\cap$

6° $x \in P(A \cap B) \Rightarrow x \in P(A) \cap P(B)$, 1° y 5°

7° $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$, 6° definición $\subset$

ii) $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$, por demostrar

1° $x \in P(A) \cap P(B)$, por hipótesis

2° $x \in P(A) \wedge x \in P(B)$, 1° definición $\cap$

3° $x \subset A \wedge x \subset B$, 2° y definición P

4° $x \subset A \cap B$, 3° definición $\cap$

5° $x \in P(A \cap B)$, 4° definición P

6° $x \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow x \in P(A \cap B)$, 1° y 5°

7° $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ de i), ii) definición "="

(5) 1° $x \in P(A) \cup P(B)$, por hipótesis

2° $x \in P(A) \vee x \in P(B)$, 1° definición $\cup$

3° $x \subset A \vee x \subset B$, 2° definición P

4° $x \subset A \cup B$, 3° definición $\cup$

5° $x \in P(A \cup B)$, 4° definición P

6° $x \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow x \in P(A \cup B)$, 1° y 5°

7° $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$, 6° definición $\subset$

Ejemplos.-

① Dados los conjuntos A={3} y B={2,3,5}. Determinar P(A), P(B), P(A∪B), P(A∩B)

Desarrollo

$P(A) = \{\{3\},\phi\}$, $P(B) = \{\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{3,5\},\{2,5\},\{2,3,5\},\phi\}$

$A \cup B = \{2,3,5\}$, $A \cap B = \{3\}$

$P(A \cup B) = \{\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{2,3,5\},\phi\}$

$P(A \cap B) = \{\{3\},\phi\}$

20.15. INTERVALOS.-

Los intervalos son conjuntos de números definidos mediante la relación de orden en el campo de los números reales.

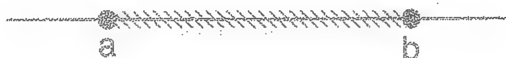
Los intervalos son de varios tipos:

a) **INTERVALOS CERRADOS: [a,b], a ≤ b.-**

Es el conjunto de los números reales "x" para los que se satisfacen $a \le x \le b$ y se denota por: [a,b]. En forma simbólica.

$$[a,b] = \{x \in R / a \le x \le b\}$$

Su representación gráfica es:



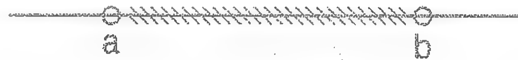
OBSERVACIÓN.- Se dice $x \in [a,b] \iff a \le x \le b$

b) **INTERVALOS ABIERTOS: <a,b>, a < b.-**

Es el conjunto de los números reales "x" para los que se satisfacen $a < x < b$ y se denota por <a,b>. En forma simbólica.

$$<a,b> = \{x \in R / a < x < b\}$$

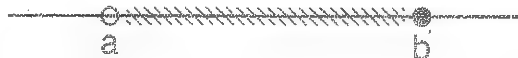
Su representación gráfica es:



También se tiene los siguientes conjuntos de números reales, los cuales se denominan, intervalos abiertos por la izquierda, e intervalos abiertos por la derecha respectivamente.

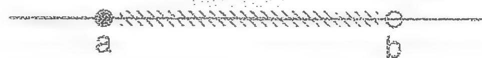
$<a,b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$ abierto por la izquierda y cerrado por la derecha

Su representación gráfica es:



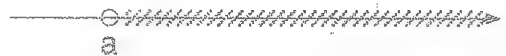
$[a,b> = \{x \in R / a \leq x < b\}$ cerrado por la izquierda y abierto por la derecha

Su representación gráfica es:



También se tiene los intervalos infinitos que son:

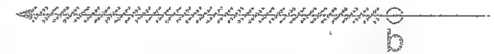
$<a,+\infty> = \{x \in R / x > a\}$



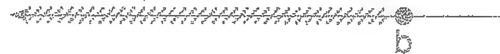
$[a,+\infty> = \{x \in R / x \geq a\}$



$<-\infty,b> = \{x \in R / x < b\}$



$<-\infty,b] = \{x \in R / x \leq b\}$



20.16. OPERACIONES DE CONJUNTOS APLICADOS A LOS INTERVALOS.-

En este caso el conjunto de los números reales R será considerado como el conjunto universal.

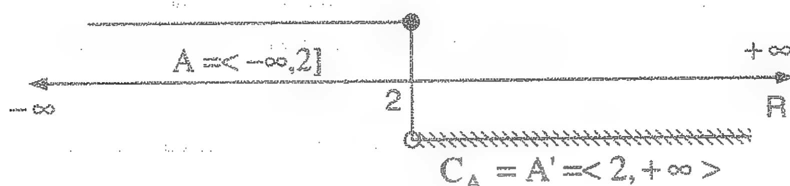
Ejemplos.-

(1) Si $A = <-\infty,2]$, hallar $\complement A = A'$

Desarrollo

$\complement A = \{x \in R / x \notin \langle -\infty, 2]\} = \{x \in R / \sim(x \in \langle -\infty, 2])\}$

$= \{x \in R / \sim(x \leq 2)\} = \{x \in R / x > 2\} = \langle 2, +\infty\rangle$



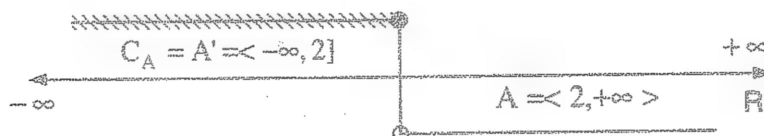
El complemento de A está formado por todo lo que no está en A dentro del conjunto universal R.

(2) Si A = <2,+∞>. Hallar $\complement A = A'$

Desarrollo

$\complement A = A' = \{x \in R / x \notin \langle 2, +\infty\rangle\} = \{x \in R / \sim(x \in \langle 2, +\infty\rangle)\}$

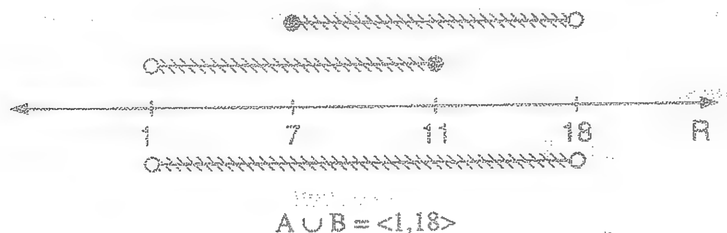
$= \{x \in R / \sim(x > 2)\} = \{x \in R / x \leq 2\} = \langle -\infty, 2]$



(3) Sí A = <1,11] y B = [7,18>. Hallar A ∪ B y A ∩ B

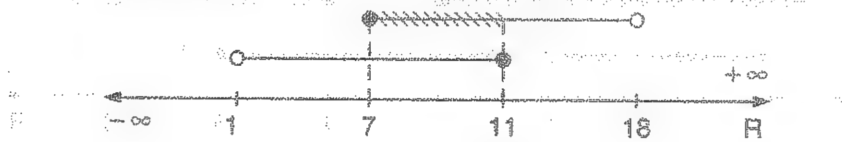
Desarrollo

$A \cup B = \{x \in R / x \in \langle 1, 11] \vee x \in [7, 18\rangle\} = \langle 1, 11] \cup [7, 18\rangle = \langle 1, 18\rangle$



$A \cup B = \langle 1, 18\rangle$

$A \cap B = \{x \in R \,/\, x \in <1,11] \wedge x \in [7,18>\} = <1,11] \cap [7,18> = [7,11]$



$A \cap B = [7,11]$

(4) Si $A = <-7,-1> \cup <0,6]$, $B = <-\infty,1] \cup [4,8>$. Hallar

a) $\complement A = A'$ b) $A \cap B$ c) $\complement(A \cup B)$

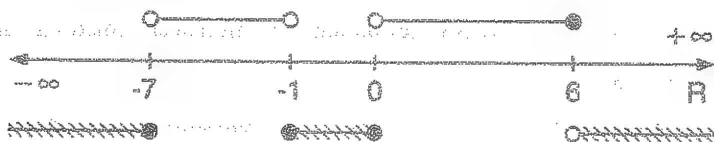
Desarrollo

a) $\complement A = A' = \{x \in R \,/\, x \notin <-7,-1> \cup <0,6]\} = \{x \in R \,/\, \sim(x \in <-7,-1> \cup <0,6])\}$

$= \{x \in R \,/\, \sim(x \in <-7,-1>) \wedge \sim(x \in <0,6])\}$

$= \{x \in R \,/\, \sim(-7 < x < -1) \wedge \sim(0 < x \le 6)\}$

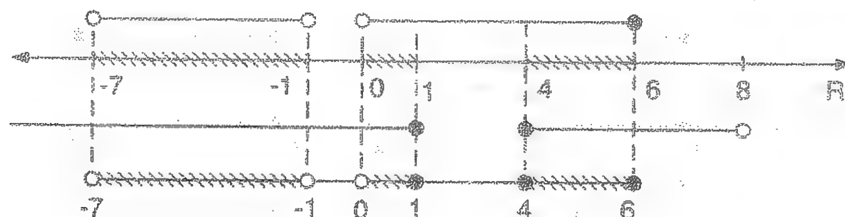
$= \{x \in R \,/\, (x \le -7 \vee x \ge -1) \wedge (x \le 0 \wedge x > 6)\}$



$A = <-7,-1> \cup <0,6]$

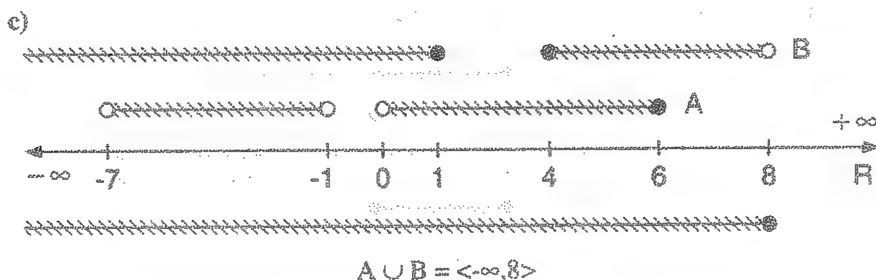
$\complement A = A' = <-\infty,-7] \cup [-1,0] \cup <6,+\infty>$

b)



$A \cap B = <-7,-1> \text{ U } <0,1] \cup [4,6]$

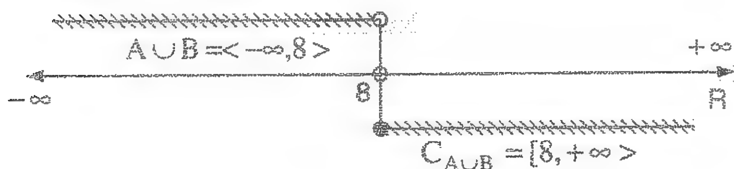
c)



$A \cup B = <-\infty,8>$

$\complement(A \cup B) = (A \cup B)' = \{x \in R / x \notin <-\infty,8>\} = \{x \in R / \sim(x \in <-\infty,8>)\}$

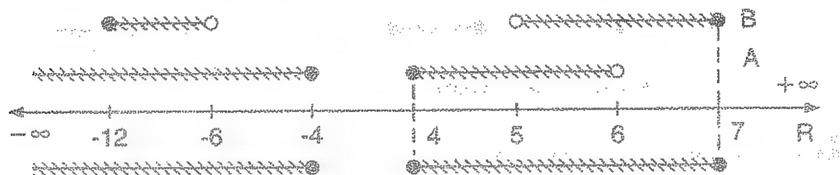
$= \{x \in R / \sim(x < 8)\} = \{x \in R / x \geq 8\} = [8,+\infty>$



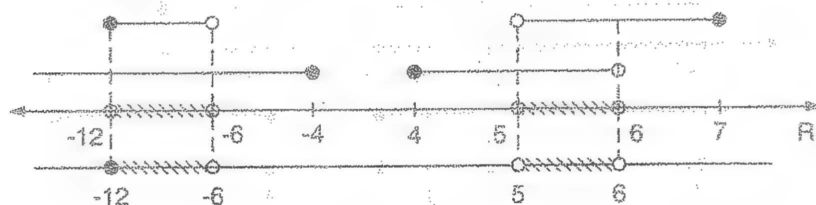
(5) Si $A = <-\infty,-4] \cup [4,6>$ y $B = [-12,-6> \cup <5,7]$, encontrar la diferencia simétrica $A \Delta B$

Desarrollo

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ por definición de diferencia simétrica, ahora calculamos $A \cup B$ y $A \cap B$



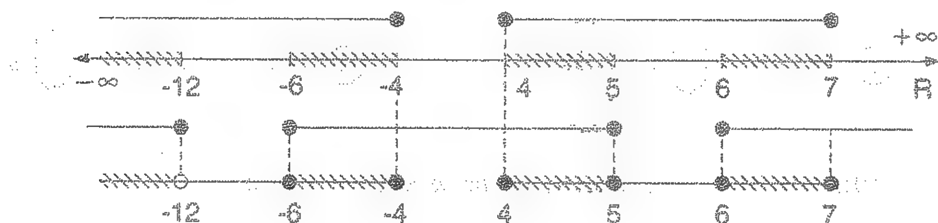
$A \cup B = <-\infty,-4] \cup [4,7]$



$A \cap B = [-12,-6> \cup <5,6>$

$A \cap B = \langle -\infty, -12\rangle \cup [-6,5] \cup [6, +\infty\rangle$

$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A \cup B) \cap C(A \cap B)$



$A \Delta B = \langle -\infty, -12\rangle \cup [-6,-4] \cup [4,5] \cup [6,7]$

20.17. FAMILIA DE CONJUNTOS.-

Llamaremos familia de conjuntos al conjunto cuyos elementos son también conjuntos.

A una familia de conjuntos denotaremos por $\{A_i\}_{i\geq 1}$, donde cada A_i es un conjunto.

Ejemplo.- 1 $\{A_i\}_{1\leq i\leq 3} = \{A_1, A_2, A_3\}$

2 $\{A_i\}_{i\leq 8} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

3 $\{A_i\}_{impar} = \{A_1, A_3, A_5, ...\}$

Ejemplo.- Determinar los componentes de las siguientes familia de conjuntos.

(1) $\{A_i\}_{1\leq i\leq 4}$ donde $A_i = \{i+n \,/\, n \in Z^+ \text{ impar } \wedge n < 5\}$

Desarrollo

$\{A_i\}_{1\leq i\leq 4} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de donde $A_1 = \{1+n \,/\, n \in Z^+ \text{ impar } \wedge n < 5\} = \{2,4\}$

$A_2 = \{2+n \,/\, n \in Z^+ \text{ impar } \wedge n < 5\} = \{3,5\}$

$A_3 = \{3+n \,/\, n \in Z^+ \text{ impar } \wedge n < 5\} = \{4,6\}$

$A_4 = \{4+n \,/\, n \in Z^+ \text{ impar } \wedge n < 5\} = \{5,7\}$

a) **UNIÓN DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-**

NOTACIÓN.-

① $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i=1}^{2} A_i$ ② $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

DEFINICIÓN.- La unión de familia de conjuntos es dado por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \,/\, x \in A_i, \text{ para algún } i\}$$

OBSERVACIÓN.-

① Sí $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists\, i \,/\, x \in A_i$ ② $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall\, i \,/\, x \notin A_i$

Ejemplos.- Sea $\{A_i\}_{1 \le i \le 5}$ donde $A_i = \{x+1 \in N \,/\, x \le i \text{ y } x \in N\}$.

Hallar a) $A_1 \cup A_3 \cup A_5$ b) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$

Desarrollo

a) $A_1 = \{x+1 \in N \,/\, x \le 1 \wedge x \in N\} = \{2\}$

$A_3 = \{x+1 \in N \,/\, x \le 3 \wedge x \in N\} = \{2,3,4\}$

$A_5 = \{x+1 \in N \,/\, x \le 5 \wedge x \in N\} = \{2,3,4,5,6\}$

$\therefore A_1 \cup A_3 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$

b) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$

b) INTERSECCIÓN DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

NOTACIÓN:

① $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \bigcap_{i=1}^{3} A_i$ ② $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

DEFINICIÓN.- La intersección de familia de conjuntos es dado por:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \,/\, x \in A_i, \text{ para todo } i\}$$

OBSERVACIÓN:

① $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall\, i \,/\, x \in A_i$ ② $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists\, i \,/\, x \notin A_i$

Ejemplo.- Sea la familia $\{A_i\}_{1 \le i \le 5}$ donde $A_i = \{x+1 \,/\, x \le i,\ x \in N\}$

Hallar **a)** $A_1 \cap A_3 \cap A_5$ **b)** $(A_1 \cup A_5) \cap A_3$ **c)** $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

d) $(A_1 - A_3) \cap (A_1 \cup A_2)$ **e)** $(A_5 - A_3) \cap (A_4 - A_1)$

Desarrollo

$A_1 = \{x+1 \,/\, x \le 1,\ x \in N\} = \{2\}$ $A_2 = \{x+1 \,/\, x \le 2,\ x \in N\} = \{2,3\}$

$A_3 = \{x+1 \,/\, x \le 3,\ x \in N\} = \{2,3,4\}$ $A_4 = \{x+1 \,/\, x \le 4,\ x \in N\} = \{2,3,4,5\}$

$A_5 = \{x+1 \,/\, x \le 5,\ x \in N\} = \{2,3,4,5,6\}$

a) $A_1 \cap A_3 \cap A_5 = \{2\}$

b) $A_1 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$, $(A_1 \cup A_5) \cap A_3 = \{2,3,4\}$

c) $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

d) $A_1 - A_3 = \phi$, $(A_1 - A_3) \cap (A_1 \cup A_2) = \phi \cap (A_1 \cup A_2) = \phi$

e) $A_5 - A_3 = \{5,6\}$, $A_4 - A_1 = \{3,4,5\}$ $\therefore (A_5 - A_3) \cap (A_4 - A_1) = \{5\}$

c) COMPLEMENTO DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

NOTACIÓN.- ① $\complement(A_1 \cup A_2) = \complement A_1 \cap \complement A_2$

② $\complement(\bigcup_{i=1}^{12} A_i) = \bigcap_{i=1}^{12} \complement A_i$

③ $\complement(\bigcup_{i=1}^{12} A_i) = \bigcap_{i=1}^{12} \complement A_i$

OBSERVACIÓN.- $x \in \complement(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall i / x \notin A_i$

$x \in \complement(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists i / x \notin A_i$

d) PROPIEDADES GENERALES DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

Sea E cualquier conjunto, entonces:

① $E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$

② $E \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cup A_i)$

③ $E \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$

④ $E \cup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (E \cup A_i)$

⑤ $\complement(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (\complement A_i)$

⑥ $\complement(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (\complement A_i)$

<u>**Demostración**</u>

(1) 1° $x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ por hipótesis

2° $x \in E \wedge x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 1° definición $\cap$

3° $x \in E \wedge x \in A_i$, para algún i, 2° del $\cup$

4° $x \in E \cap A_i$, 3° definición $\cap$

5° $x \in \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$, 4° definición $\cup$

6° $x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$. 1° y 5°

7° $E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$, 6° definición $\subset$

8° $x \in \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$ por hipótesis

9° $x \in E \cap A_i$, para algún i, 8° definición $\cup$

10° $x \in E \wedge x \in A_i$, 9° definición $\cap$

11° $x \in E \wedge x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 10° definición $\cup$

12° $x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, 11° definición $\cap$

13° $x\in\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i) \Rightarrow x\in E\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$, 8° y 12°

14° $\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)\subset E\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$, 13° definición $\subset$

15° $E\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)$, 7° y 14° definición =

20.18. NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO.-

DEFINICIÓN.- Sea A un conjunto cualquier, al número de elementos distintos que forman dicho conjunto denotamos por n(A) llamado cardinalidad del conjunto.

NOTA: n(A) se lee "él número de elementos del conjunto A".

Ejemplos.- Sí A = {1,3,5,6}, B = {a,b,c,d,e}, C = {2,4,2,4,2}, D = ϕ

<u>**Desarrollo**</u>

n(A) = 4, n(B) = 5, n(C) = 2, n(D) = 0

20.19. PROPIEDADES DEL NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO.-

① Si A y B son conjuntos cualquiera, entonces: $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$, sí $A\cap B = \phi$

<u>**Demostración**</u>

Supongamos que: A tiene x elementos $\Rightarrow$ n(A) = x

B tiene y elementos $\Rightarrow$ n(B) = y

Por hipótesis no hay elementos comunes a ambos conjuntos.

$A\cup B$ tienen x + y elementos, esto es: $n(A\cup B) = x + y = n(A) + n(B)$

$\therefore\ n(A\cup B) = n(A) + n(B)$

② Si A y B son conjuntos cualquiera, entonces $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

Demostración

Sea $M=A-B=A\cap B'$, $N=A\cap B$, se tiene: $M\cup N=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A$

$M\cap N=(A\cap B')\cap(A\cap B)$ por asociatividad y conmutatividad de $\cap$

$=A\cap(B'\cap B)\cap A$ pero como $B'\cap B=\phi$, se tiene

$M\cap N=\phi$, luego por la propiedad (1) se tiene:

$n(A)=n(M\cup N)=n(M)+n(N)=n(A-B)+n(A\cap B)$

de donde $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

③ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

Demostración

Como $A\cup B=(A-B)\cup B$ y $(A-B)\cap B=\phi$, entonces

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B)$ por la propiedad (1)

$=n(A)-n(A\cap B)+n(B)$ por la propiedad (2)

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

④ $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

Demostración

Sea $E=B\cup C$, entonces por la propiedad (3) se tiene:

$n(A\cup E)=n(A)+n(E)-n(A\cap E)$ entonces:

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B\cup C)-n(A\cap(B\cup C))$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n((A\cap B)\cup(A\cap C))$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)]$

$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

20.20. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Si los conjuntos A y B son iguales. Hallar la suma de los elementos del conjunto C, tal que $A=\{8^{y-1},9^{z+1}\}$, $B=\{64,81\}$ y $C=\{2x/x\in N \wedge z\le x\le y\}$

a) 12 b) 6 c) 18 d) 4 e) 24

Desarrollo

Como los conjuntos A y B son iguales (A = B) entonces se tiene:

$$\begin{cases}8^{y-1}=64\\9^{z+1}=81\end{cases} \text{ entonces } \begin{cases}8^{y-1}=8^2\\9^{z+1}=9^2\end{cases} \text{ de donde } \begin{cases}y-1=2\\z+1=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=3\\z=1\end{cases}$$

Luego $C=\{2x/x\in N \wedge z\le x\le y\}$ entonces $C=\{2x/x\in N \wedge 1\le x\le 3\}$

Como $x\in N$ entonces $x=1,2,3$ obteniéndose $C=\{2,4,6\}$ como nos piden la suma de los elementos de C entonces $2+4+6=12$, la respuesta es **a**

(2) Si $A=\{m+n, 4\}$ y $B=\{m-n, 10\}$ son conjuntos iguales. Calcule el numero cardinal de: $C=\{m\times n, 3n-m, m+2, 2m-3n, n+6\}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Como A = B entonces se tiene: $\begin{cases}m+n=10\\m-n=4\end{cases}$ de donde $\begin{matrix}m=7\\n=3\end{matrix}$

Calculando los elementos del conjunto C

$C=\{mxn, 3n-m, m+2, 2m-3n, n+6\}=\{21,2,9,5,9\}$ entonces $n(C)=4$

por lo tanto la respuesta es **d**

(3) Dados los conjuntos $W=\{1,2,3,4,5,7,8\}$, $A=\{\frac{n-1}{2}/n\in W$ y n es impar$\}$, $B=\{\frac{n}{2}/n\in N$ y n es par$\}$. Determine: $A\cap B$

a) {1,3,5,7} b) {2,4,5,8} c) {1,2,3} d) {1,2} e) {0,1,2,3,4}

Desarrollo

Calculando los elementos de los conjuntos A y B

Para el conjunto A se toma los n impar donde $n \in W$: $A = \{0,1,2,3\}$

Para el conjunto B se toma los n par donde $n \in W$: $B = \{1,2,4\}$

de donde $A \cap B = \{0,1,2,3\} \cap \{1,2,4\} = \{1,2\}$

Por lo tanto la respuesta es **d**

(4) Determine por comprensión el siguiente conjunto $Q = \{\frac{4}{3}, \frac{16}{5}, \frac{36}{7}, \frac{64}{9}, \frac{100}{11}\}$

a) $Q = \{\frac{n+1}{n} / n \in N \wedge 3 \le n \le 11\}$

b) $Q = \{\frac{n+1}{n} / n \in N \wedge 2 \le n \le 12\}$

c) $Q = \{\frac{n^2}{n+1} / n \in N \wedge 2 \le n \le 11\}$

d) $Q = \{\frac{n^2}{n+1} / n$ es par $\wedge\ 2 \le n \le 10\}$

e) $Q = \{\frac{(2n)^2}{n+1} / n$ es número par $\wedge\ 2 \le n \le 10\}$

Desarrollo

Observando a cada uno de los elementos de $Q = \{\frac{4}{3}, \frac{16}{5}, \frac{36}{7}, \frac{64}{9}, \frac{100}{11}\}$ se puede expresar en la forma siguiente: $Q = \{\frac{4}{3}, \frac{16}{5}, \frac{36}{7}, \frac{64}{9}, \frac{100}{11}\} = \{\frac{2^2}{2+1}, \frac{4^2}{4+1}, \frac{6^2}{6+1}, \frac{8^2}{8+1}, \frac{10^2}{10+1}\}$

de donde el conjunto Q queda determinado por comprensión

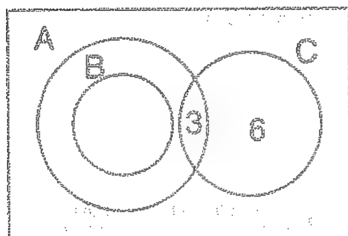
$Q = \{\frac{n^2}{n+1} / n \in N$ y n es número par $\wedge\ 2 \le n \le 10\}$, por lo tanto la respuesta es **d**

(5) Si B y C son conjuntos disjuntos. Además B está incluido en A. Calcule n(B) sabiendo que: $n(A \cap C) = 3$, $n(A) = 18$, $n(A \cup C) = 24$, $n(B \cup C) = 13$.

a) 7 b) 5 c) 4 d) 3 e) 6

Desarrollo

Debemos de calcular $n(B) = ?$ con los datos siguientes $B \subset A$, B y C son conjuntos disjuntos, $n(A \cup C) = 24$, $n(B \cup C) = 13$, $n(A \cap C) = 3$, $n(A) = 18$



Representado gráficamente se tiene:

Como $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) = 24$

$18 + n(C) - 3 = 24$ de donde $n(C) = 9$

como B y C son disjuntos

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) = 13$ de donde $n(B) + 9 = 13$

por lo tanto $n(B) = 4$ la respuesta es **c**

(6) Dados dos conjuntos A y B simplifique la expresión $[(A\cup B)^C \cup (A\cap B)^C]^C \cap A$

a) A b) B c) $A \cup B$ d) $A \cap B$ e) ϕ

Desarrollo

Aplicando la Ley de Morgan $(A\cup B)^C = A^C \cap B^C$ se tiene:

$[(A\cup B)^C \cup (A\cap B)^C]^C \cap A = [((A\cup B)^C)^C \cap ((A\cap B)^C)^C] \cap A$ aplicando $(A^C)^C = A$

$= [(A \cup B) \cap (A \cap B)] \cap A = (A \cap B) \cap A = A \cap B$

por lo tanto la respuesta es **d**

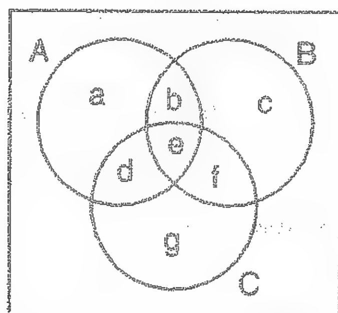
(7) Para tres conjuntos A, B y C se conoce los siguiente: $n(A \cup B \cup C) = 100$; $n(A) = 33$; $n(B) = 37$; $n(C) = 44$; $n(A \cap B \cap C) = 7$

$n(A\cap B^C \cap C^C) + n(B \cap A^C \cap C^C) + n(C \cap A^C \cap B^C) = 53$

calcule: $n(A\cap B \cap C^C) + n(A \cap B^C \cap C) + n(A^C \cap B \cap C)$

a) 0 b) 20 c) 21 d) 60 e) 40

Desarrollo



Los datos dados los representaremos mediante un diagrama

Como $n(A\cap B\cap C^C)=b$, $n(A\cap B^C\cap C)=d$, $n(A^C\cap B\cap C)=f$

Luego lo que nos piden es $x = b + d + f$

Además de los datos que nos dan se tiene mediante el diagrama, las siguientes ecuaciones

$a + c + g = 53 \ \wedge \ e = 7$, además

$a + d + b = 33 - e$

$b + c + f = 37 - e$

$d + g + f = 44 - e$ sumando las tres ecuaciones

$2(b + d + f) + (a + c + g) = 144 - 3e$

$2x + 53 = 114 - 21$ de donde $2x + 53 = 93 \Rightarrow 2x = 93 - 53$ entonces $2x = 40$

por lo tanto $x = 20$. Luego la respuesta es **b**.

(8) Dado el siguiente conjunto: $A = \{1,2,\{2,a\},\{2,1,b\}\}$. Señale cual de las siguientes proposiciones es verdadera

a) $2 \in \{2,a\}$ b) $1 \in \{2,1,b\}$ c) $\{2\} \in A$

d) $\{2,a\} \in A$ e) $\{2,a\} \in \{2,1,b\}$

Desarrollo

a) Como 2 y $\{2,a\}$ son elementos de A entonces es falso.

b) De igual manera de a) ambos son elementos de A es falso.

c) $\{2\}$ no es elemento de A, es falso.

d) $\{2,a\}$ es elemento de A entonces es verdadero.

e) Como $\{2,a\}$ y $\{2,1,b\}$ son elementos de A, es falso

por lo tanto la respuesta es **d**

(9) Dado A = {2,4,6,8,...,48,50}, B = {3,6,9,12,...,45,48} indicar el número de elementos de "A ∪ B".

a) 23 b) 33 c) 27 d) 36 e) 41

Desarrollo

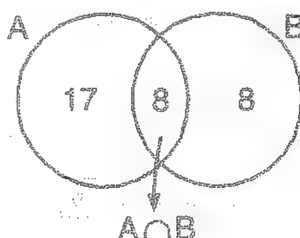
A cada uno de los elementos de los conjuntos A y B expresamos

A = {2x1, 2x2, 2x3,..., 2x25}, número múltiplo de 2

B = {3x1, 3x2, 3x3,..., 3x16}, número múltiplo de 3

Luego n(A) = 25, n(B) = 16, además

A ∩ B = {6,12,18,...,48}, múltiplo de 6. Por lo tanto



Luego lo que se observa es: n(A ∪ B) = 17 + 8 + 8 = 33

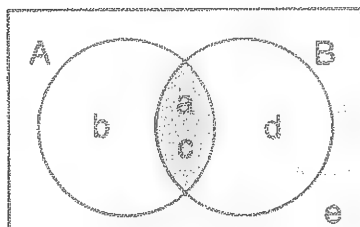
Por lo tanto la respuesta es **b**

(10) Si U = {a,b,c,d,e}; A ∪ B = {a,b,c,d}, A ∩ B = {a,c} y A – B = {b}. Hallar A y B

a) A = {a,b,c}, B = {a,c,d} b) A = {a,b,d}, B = {b,c,d} c) A = {a,b}, B = {c,d}

d) A = {b,c}, B = {a,d} e) A = {a,d}, B = {b,c}

Desarrollo



Para determinar a los conjuntos A y B usaremos un diagrama

Por lo tanto los elementos de los conjuntos A y B son A= {a,b,c} y B = {a,c,d}

Luego la respuesta es **a**

(11) Sea m el máximo número de elementos de $M \cup N \cup P$ y n el máximo número de elementos de $R \cap S \cap T$. Si $\#(M) = 20$, $\#(N) = 18$, $\#(P) = 24$, $\#(R) = 9$, $\#(S) = 7$ y $\#(T) = 13$. Calcular mn

a) 343 b) 434 c) 334 d) 344 e) 443

Desarrollo

Sea $m = \#(M \cup N \cup P) = \#(M) + \#(N) + \#(P) = 20 + 18 + 24 = 62$

n es el máximo número de elementos de $R \cap S \cap T$ entonces $S \subset R \subset T$ entonces

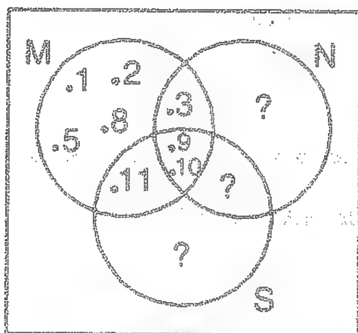
$n = \#(S) = 7$ de donde $mn = (62)(7) = 434$, la respuesta es **b**

(12) Sea $U = \{x / x \in Z^+ \wedge x \leq 15\}$, $M \cap N = \{3,9,10\}$, $M \cap S = \{9,10,11\}$, $(N \cup S)' = \{1,2,5,8\}$, $(M \cup N \cup S)' = \phi$. Hallar $\#[P(M)]$

a) 32 b) 64 c) 128 d) 256 e) 512

Desarrollo

Los elementos de $U = \{1,2,3,4,6,7,8,...,15\}$



Ahora usamos un diagrama para calcular los elementos de M

Luego $M = \{1,2,3,5,9,10,11\}$

$\#(M) = 7$

$\#(P(M)) = 2^{\#(M)} = 2^7 = 128$

la respuesta es **c**

(13) Hallar el conjunto de números enteros tal que su duplo mas cinco es mayor o igual a su mitad disminuida en 7 y su tercio menos 7 es mayor o igual que su cuádruplo mas 15.

a) {-6,-7,-8} b) {7} c) {6,7,8} d) φ e) {-7}

Desarrollo

Sea "x" un número entero, de las condiciones del problema se tiene:

$2x+5 \geq \frac{x}{2}-7 \quad \wedge \quad \frac{x}{3}-7 \geq 4x+15$, simplificando $\quad 2x-\frac{x}{2} \geq -12 \quad \wedge \quad -22 \geq 4x-\frac{x}{3}$

$3x \geq -24 \ \wedge \ -66 \geq 11x$ de donde $x \geq -8 \ \wedge \ -6 \leq x$ por lo tanto

si $-8 \leq x \ \wedge \ x \leq -6$ entonces $-8 \leq x \leq -6$

entonces el conjunto de valores enteros para x es: $\{-6,-7,-8\}$

por lo tanto la respuesta es **a**

(14) Dado el intervalo real $I = [-7,20]$, sean $A = \{x \in Z / x - 8 \in I\}$, $B = \{x \in Z / |x-2| \leq 5\}$. Hallar el número de elementos de $B \cap A$.

a) 7 b) 11 c) 10 d) 8 e) 20

Desarrollo

Calculando los elementos del conjunto A

$x - 8 \in I = [-7,20] \Rightarrow -7 \leq x - 8 \leq 20$

$1 \leq x \leq 28$, como $x \in Z$, entonces $A = \{1,2,3,4,...,28\}$

calculando los elementos del conjunto B

$|x-2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x - 2 \leq 5$

$-3 \leq x \leq 7$, como $x \in Z$, entonces $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

luego se tiene: $A \cap B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ de donde $n(A \cap B) = 7$

Por lo tanto la respuesta es **a**

(15) Si $A \cup B \subset A \cup C$ y $A \cap B \subset A \cap C$, entonces:

a) $B \subset C$ b) $C \subset B$ c) $A \subset B$ d) $A \subset C$ e) $B \subset A$

Desarrollo

Como $A \cup B \subset A \cup C$ entonces $B \subset C$

$A \cap B \subset A \cap C$ entonces $B \subset C$. Por lo tanto la respuesta es **a**

(16) Sea el conjunto $A = \{2^n / n = 1,2,...\}$ y el conjunto $B = \{4^n /$ para $n = 1,2,...\}$ el conjunto C = A – B es igual a:

a) $C = \{2^{3n} / n \in N\}$ b) $C = \phi$ (conjunto vació) c) $C = \{2^{2n-1} / n \in N\}$

d) $C = \{4^{2n-1} / n \in N\}$ e) C = todos los números naturales

Desarrollo

Analizando a los conjuntos $A = \{2^n / n = 1,2,...\}$

$B = \{4^n /$ para $n = 1,2,...\} = \{2^{2n} / n = 1,2,...\}$

observando el conjunto B, se ve que el exponente de 2 es par siempre

Luego $A - B = \{2^k / k$ es impar$\} \Rightarrow A - B = \{2^1, 2^3, 2^5, ...\} = \{2^{2n-1} / n \in N\}$

por lo tanto la respuesta es **c**

(17) Sea P un número primo, formar el conjunto A = {pk / k ∈ Z} entonces podemos afirmar que:

1) Si x,y ∈ A ⇒ x + y ∈ A 2) Si x,y ∈ A ⇒ x – y ∈ A

3) Si x,y ∈ A ⇒ $\frac{x}{y}$ o $\frac{y}{x} \in A$

a) Solo 1) es verdad b) Solo 2) es verdad c) Solo 3) es verdad

d) 1) y 2) es verdad e) 1), 2) y 3) es verdad

Desarrollo

Como A = {pk / k ∈ Z} donde p es primo, entonces

1) $\begin{cases} x \in A \\ y \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = pk_1 \\ y = pk_2 \end{cases} \Rightarrow x + y = p\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\text{entero}} = pk_3,\ k_3 \in Z$ es verdadero

2) $\begin{cases} x \in A \\ y \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = pk_1 \\ y = pk_2 \end{cases} \Rightarrow x - y = p\underbrace{(k_1 - k_2)}_{\text{entero}} = pk_4,\ k_4 \in Z$ es verdadero

3) $\begin{cases} x\in A \\ y\in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5p \\ y=3p \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{x}{y}=\frac{5}{3}\notin A \\ \frac{y}{x}=\frac{3}{5}\notin A \end{matrix}$, es falso

como 1) y 2) es verdadero la respuesta es **d**

(18) Determinar el conjunto $F=\{x\in R/\frac{a}{2}=\frac{c}{6}=\frac{e}{9}=\frac{a+cx+ex^2}{2+6x+9x^2}\}$

a) $\{0,1,2\}$ b) $[0,\infty\rangle$ c) R d) $\langle-\infty,0]$ e) N

Desarrollo

Como $F=\{x\in R/\underset{I}{\frac{a}{2}}=\underset{II}{\frac{c}{6}}=\underset{III}{\frac{e}{9}}=\underset{IV}{\frac{a+cx+ex^2}{2+6x+9x^2}}\}$

Analizando de I) y IV) se tiene:

$\frac{a}{2}=\frac{a+cx+ex^2}{2+6x+9x^2}$; de donde $2a+6ax+9ax^2=2a+2cx+2ex^2$

$6ax+9ax^2=2cx+2ex^2$

$\begin{cases} 9a=2e & \dots(1) \\ 6a=2c & \dots(2) \end{cases}$, analizando II y IV se tiene:

$\frac{c}{6}=\frac{a+cx+ex^2}{2+6x+9x^2}$; de donde $2c+6cx+9cx^2=6a+6cx+6ex^2$

$\begin{cases} 6a=2c & \dots(3) \\ 9c=6e & \dots(4) \end{cases}$

se observa que se cumple la relación $\forall$ x $\in$ R, por lo tanto la respuesta es **c**

(19) Sean los conjuntos $A=\{x / x=|a| \wedge a\in Q\}$, $B=\{x/x\in A^C\}$ el conjunto $B^C\cap A$ será:

a) R b) Q c) I d) Q^+ e) $Q^+\cup\{0\}$

Desarrollo

Determinando el conjunto $A = \{x / x = |a| \wedge a \in Q\}$

Observamos que "x" es positivo de donde $A = Q^+ \cup \{0\}$

Además $B = \{x / x \in A^C\}$ de donde $A \cap B = \phi$

Como $B^C \cap A = A - B = A = Q^+ \cup \{0\}$. La respuesta es **e**

(20) Los conjuntos A, B y C se determinan de la siguiente manera $A = \{x \in R / 2x - 1 = x^2\}$, $B = \phi$, $C = \{x \in R / x < 1\}$. Determinar $(A \cup B)^C \cup C$.

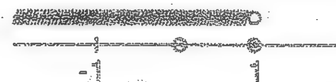
a) B   b) A^C c) $A \cap B$ d) $A^C \cap B$ e) A

Desarrollo

Calculando los elementos del conjunto $A = \{x \in R / 2x - 1 = x^2\}$

$2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ por lo tanto $A = \{1\}$

para el conjunto $C = \{x \in R / x < 1\}$



como el conjunto universal es el conjunto de los números reales R y además $B = \phi$, entonces se tiene:

$A \cup B = \{1\} \Rightarrow (A \cup B)^C = R - \{1\}$



Evaluando $(A \cup B)^C \cup C$ se tiene:



En este ultimo gráfico se observa que es igual al obtenido en $(A \cup B)^C$, y esto es debido a que C esta incluido en $(A \cup B)^C$ además se observa que $A^C = R - \{1\} = (A \cup B)^C \cup C$

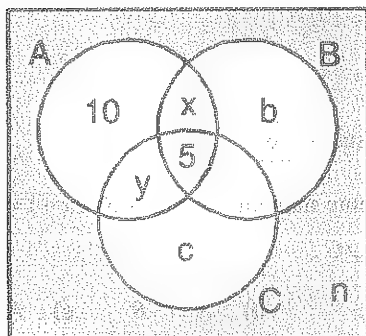
por lo tanto la respuesta es **b**

(21) Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos. Si $(B - C) \cup (C - B)$ tiene 40 elementos; el conjunto $A - (B \cup C)$ tiene 10 elementos, la intersección de los tres conjuntos tiene 5 elementos; y el conjunto $B \cap C \cap A'$ es vació ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A' \cap B' \cap C'$? (A', B' y C' representan el complemento de A, B y C respectivamente)

a) 10   b) 0   c) 5   d) 4   e) 3

Desarrollo

A los datos del problema lo representaremos mediante un diagrama.



La parte sombreada corresponde al conjunto $A'\cap B'\cap C'$ de "n" elementos, además el conjunto (B – C) ∪ (C – B) esta formando por 40 elementos, es decir: $x + b + y + c = 40$ ... (1)

Por otra parte el universo está formado por 60 elementos $10 + x + 5 + y + b + c + n = 60$

$-n + 45 = x + b + y + c$ ... (2)

al reemplazar (1) en (2) se tiene: $-n + 45 = 40$ entonces $-n = -5$ de donde $n = 5$

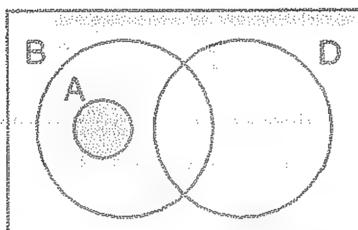
por lo tanto la respuesta es **c**

(22) Si $A \subset B$ y $A \cap D = \phi$, simplificar $[(A\cap D^C)\cap B^C]\cup[B\cup(A-D)]$

a) $A \cap B$ b) A c) B d) ϕ e) $D \cap B$

Desarrollo

De los datos dados, hacemos una grafica



Del gráfico se obtiene:

$A\cap D^C = A \Rightarrow (A\cap D^C)\cap B^C = A\cap B^C = \phi$

$A - D = A$ entonces se tiene:

$[B \cup (A - D)] = B \cup A = B$, la respuesta es **c**

(23) Si $A = \{a,\{a\},\{\phi\},\phi\}$ ¿Cuántas de las proposiciones siguientes son verdaderas.

I) $\{a\} \in A \wedge \{a\} \subset A$

II) $\{a\} \subset A \wedge \{\{a\}\} \subset A$

III) $\{\phi\} \subset A \wedge \{\{\phi\}\} \subset A$

IV) $\phi \subset A \wedge \phi \in A$

V) $\{a,\phi\} \subset A \wedge \{\{a\},\{\phi\}\} \subset A$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 2 e) 4

Desarrollo

I) $\{a\} \in A \wedge \{a\} \subset A$

V $\wedge$ V = F falso

II) $\{a\} \subset A \wedge \{\{a\}\} \subset A$

F $\wedge$ V = V falso

III) $\{\phi\} \subset A \wedge \{\{\phi\}\} \subset A$

V $\wedge$ V = V verdadero

IV) $\{a,\phi\} \subset A \wedge \{\{a\},\{\phi\}\} \subset A$

V $\wedge$ V = V verdadero

como las proposiciones son verdaderas, la respuesta es **e**

(24) Sea el conjunto universal $U = \{\phi, 2, \frac{2}{3}, 5\}$ y los subconjuntos $A=\{x\in U/\text{es par} \vee x \text{ es primo}\}$ $B = \{x \in U / x \neq \phi \wedge x \text{ no es entero}\}$, $C = \{x \in U / x \text{ es un número} \vee x = \phi\}$. Determinar $(A \cup B) - (B \cap C)$

a) $\{\phi,2,5\}$ b) $\{2,\frac{2}{3},5\}$ c) $\{2,5\}$ d) $\{\frac{2}{3},5\}$ e) ϕ

Desarrollo

Calculando los elementos de los conjuntos A, B y C

$A = \{x \in U / x \text{ es par} \vee x \text{ es primo}\} = \{2,5\}$

$B = \{x\in U / x \neq \phi \wedge x \text{ no es entero}\} = \{\frac{2}{3}\}$

$C = \{x\in U / x \text{ es un número} \vee x = \phi\} = U = \{\phi, 2, \frac{2}{3}, 5\}$

Luego $A \cup B = \{\frac{2}{3}, 2, 5\}$, $B \cap C = B = \{\frac{2}{3}\}$ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\frac{2}{3}, 2, 5\} - \{\frac{2}{3}\} = \{2,5\}$

Por lo tanto la respuesta es **c**

(25) Sean los conjuntos $A = \{z \in B / x-1 \leq z \leq w \leq 4y+2\}$, $B = \{w \in A / 2x-4 \leq w \leq z \leq 9-3y\}$; x, y, z, w entero. Hallar la suma de los elementos de $A \cap B$.

a) 16 b) 24 c) 20 d) 28 e) 32

Desarrollo

Como $A = \{z \in B / x - 1 \leq z \leq w \leq 4y + 2\}$ entonces $A \subset B$

$B = \{w \in A / 2x - 4 \leq w \leq z \leq 9 - 3y\}$ entonces $B \subset A$

De donde se deduce que $A = B \wedge z = w$

$A = \{z / x - 1 \leq z \leq 4y + 2\} = \{z / 2x - 4 \leq z \leq 9 - 3y\} = B$

Entonces $\begin{cases} x-1 = 2x-4 \\ 4y+2 = 9-3y \end{cases}$ entonces $\begin{matrix} x = 3 \\ y = 1 \end{matrix}$. Por lo tanto $A = \{z / 2 \leq z \leq 6\}$

Como $A \cap B = A = \{2,3,4,5,6\}$, calculando la suma de sus elementos:

$2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$, la respuesta es **c**

(26) Determinar por extensión el siguiente conjunto $A = \{x^x = \frac{1}{4} / x \in Z\}$

a) $A = \{-2,2\}$ b) $A = \{-2\}$ c) $A = \{2\}$ d) $A = \phi$ e) $A = \{0,2\}$

Desarrollo

Para determinar los valores de A, resolvemos la ecuación exponencial

$x^x = \frac{1}{4}$ de donde $x^x = 4^{-1} \Rightarrow x^x = 2^{-2} = (-2)^{-2}$ de donde $x = -2$

por lo tanto el conjunto A tiene un elemento $A = \{-2\}$, la respuesta es **b**

(27) Simplificar $E = [(B \cap A^C) \cup B^C]^C \cap [A^C \cap (A-C)^C \cap A^C]$

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \cup B^C$ d) $A^C \cup B$ e) ϕ

Desarrollo

$E=[(B\cap A^C)\cup B^C]^C\cap[A^C\cap(A-C)^C\cap A^C]=[(B\cap A^C)^C\cap B]\cap[A^C\cap(A-C)^C]$

$=[(B^C\cup A)\cap B]\cap[A^C\cap(A\cap C^C)^C]=[(B^C\cap B)\cup(A\cap B)]\cap\underbrace{[A^C\cap(A^C\cup C)]}_{A^C}$

$=[\phi\cup(A\cap B)]\cap(A^C)=(A\cap B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cap B=\phi\cap B=\phi$, la respuesta es **e**

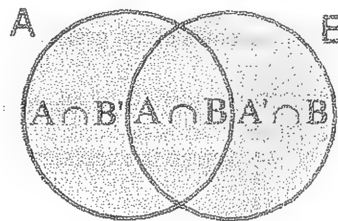
(28) Simplificar: $(A'\cup B)'\cap(B'\cup A)'\cup(A\cap B)$

a) A b) B c) $A\cup B$ d) $A\cap B$ e) A^C

Desarrollo

De acuerdo a la ley de Morgan y de complemento

$(A'\cup B)'\cap(B'\cup A)'\cup(A\cap B)=\underbrace{(A\cap B')\cap(A'\cap B)\cup(A\cap B)}_{\text{representando en un diagrama}}=A\cap B$

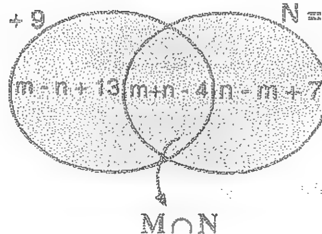


por lo tanto: $(A'\cup B)'\cap(B'\cup A)'\cup(A\cap B)=A\cap B$, la respuesta es **d**

(29) Si #M = 2m + 9; #N = 2n + 3; #(M ∩ N) = m + n − 4. Hallar "(M Δ N)

a) m + n b) 0 c) 1 d) 20 e) 3m+ 9

Desarrollo



Representaremos a los datos mediante un diagrama:

$\#(M\,\Delta\,N)=m-n+13+n-m+7$

$=13+7=20$

la respuesta es **d**

(30) Simplificar: $[(M\cap N)\cup(M\cup N)]'\cap(M-N)$

a) $M\cap N$ b) $M-N$ c) ϕ d) $M\cup N$ e) $N-M$

Desarrollo

$[(M\cap N)\cup(M\cup N)]'\cap(M-N)=(M\cup N)'\cap(M\cap N')$ puesto que $M\cap N\subset M\cup N$

$=(M'\cap N')\cap(M\cap N')=M'\cap M\cap N'=\phi\cap N'=\phi$

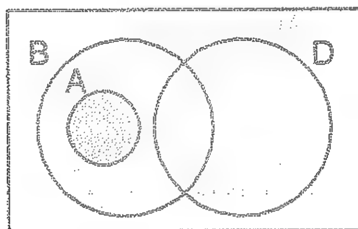
por lo tanto la respuesta es **c**

(31) Si $A\subset B$ y $A\cap D=\phi$, simplificar $[(A\cap D^C)\cap B^C]\cup[B\cup(A-D)]$

a) $A\cap B$ b) A c) B d) ϕ e) $D\cap B$

Desarrollo

Los datos del problema representaremos en un gráfico



$A\cap D^C=A$ de donde $A-D=A$

Luego la expresión pedida será

$[(A\cap D^C)\cap B^C]\cup[B\cup(A-D)]=\underbrace{(A\cap B^C)}_{\phi}\cup(B\cup A)$

$=\phi\cup(B\cup A)=A\cup B=B$

por lo tanto la respuesta es **c**

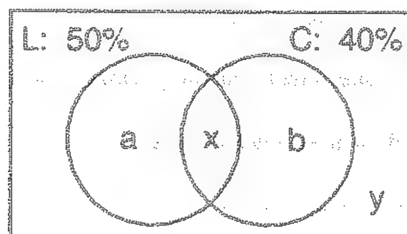
(32) En Cajamarca el 50% la población toman leche, el 40% comen carnes, además los que comen carne o solo leche son el 54% ¿Que porcentaje de la población no toman leche ni comen carne?

a) 29% b) 35% c) 41% d) 28% e) 30%

Desarrollo

Representaremos a los datos del problema mediante un gráfico

De los datos del problema se tiene: $a+b=54$



$\begin{cases} a+x=50 \\ b+x=40 \end{cases}$ de donde $a+b+x+x=90$

$a+b+2x=90$

$54+2x=90 \Rightarrow x=18$

además $y+a+x+b=100$

$y+(a+b)+x=100 \Rightarrow y+54+18=100 \Rightarrow y=28$

por lo tanto se tiene 28%, la respuesta es **d**

(33) Si $(x\cup A)^C \cup (x\cup A^C)^C = B$, hallar x y dar como respuesta $B\cup x$

a) ϕ b) $B\cup A$ c) B d) $B\cup A^C$ e) U

Desarrollo

$(x\cup A^C)\cup(x\cup A^C)^C = B$, aplicando Morgan

$[(x\cup A)\cap(x\cup A^C)]^C = B$, agrupando

$[x\cup(A\cap A^C)]^C = B$, como $A\cap A^C=\phi$ entonces

$(x\cup\phi)^C = B$ de donde $x^C = B \Rightarrow x = B^C$

Luego $B\cup x = B^C \cup B = U$, la respuesta es **e**

(34) Una persona come plátano o naranja cada mañana durante el mes de marzo, si come naranja 25 mañanas y plátano 18 mañanas ¿Cuántas mañanas come plátano y naranjas?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

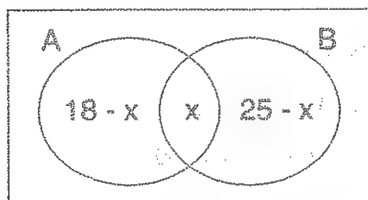
Desarrollo

Sea U = {mes de marzo} conjunto universal $\Rightarrow$ n(U) = 31

A = {mañanas que come plátano} $\Rightarrow$ n(A) = 18

B = {mañanas que come naranja} $\Rightarrow$ n(B) = 25

Ubiquemos la información en un diagrama de Venn – Euler.



Mañanas que comen plátano y naranjas = x

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$31 = 18 - x + 25 - x - x$

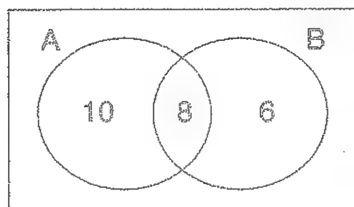
$3x = 43 - 31 = 12$ de donde $x = 4$ mañanas come plátanos y naranja

Luego la respuesta es **b**

(35) Sean A y B dos conjuntos tales que $n(A \cup B) = 24$ y $n(A - B) = 10$, $n(B - A) = 6$. Hallar $5[n(A)] - 4[n(B)]$

a) 26 b) 28 c) 34 d) 38 e) 44

Desarrollo



Ubiquemos los datos un diagrama de Venn – Euler.

Calculando se tiene:

$5[n(A)]-4[n(B)]=5(18)-4(14) = 90 - 56 = 34$

por lo tanto la respuesta es **c**

(36) Sea A un conjunto tal que $n(A) = 3p + q$, B es un conjunto tal que $n(B) = 2q + 3$, y los dos tienen elementos comunes $n(A \cap B) = p + q - 4$ ¿cuántos elementos tiene $A \Delta B$?

a) $p + q + 11$ b) $q + 20$ c) $p + 20$ d) $p + 2q$ e) $2q + p$

Desarrollo

Debemos de calcular $n(A \Delta B) = ?$

$n(A \Delta B) = n[(A \cup B) - (A \cap B)] = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B)$

$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = (3p + q) + (2q + 3) - 2(p + q - 4)$

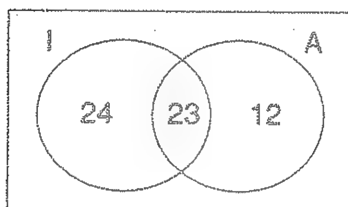
$= p + q + 11$, la respuesta es **a**

(37) En un instituto de investigación trabajan 67 personas. De estas 47 conocen el ingles, 35 el alemán y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no conocen el ingles ni el Alemán?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Desarrollo

Para facilitar la solución utilizamos el diagrama de Venn – Euler.



I = ingles, A = Alemán

En el diagrama se observa que $n(I \cap A) = 23$,

$n(A) = 35$, $n(I) = 47$ por conocer $N(I \cup A)$

Hallaremos $n(I' \cap A') = n((I \cup A)') = n(U) - n(I \cup A) = 67 - n(I \cup A)$ ... (1)

edemas $n(I \cup A) = n(I) + n(A) - n(I \cap A) = 47 + 35 - 23 = 59$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $n(U) - n(I \cup A) = 67 - n(I \cup A) = 67 - 59 = 8$

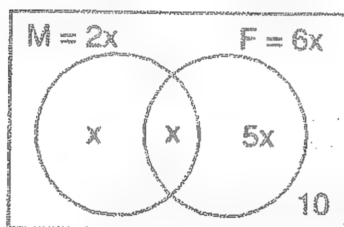
por lo tanto 8 personas no conocen el Ingles y Alemán, la respuesta es **c**

(38) De 45 alumnos, el número de los que estudien matemática es el doble del número de los que estudian Física y matemática y el número de los que estudian física es el séxtuplo del número de los que estudian matemática y física. Si hay 10 que no estudian estos cursos ¿Cuántos estudian ambos cursos?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Desarrollo

Para facilitar la solución utilizaremos el diagrama de Venn – Euler



U = 45 Como $n(U) = 45$, del diagrama

$x + x + 5x + 10 = 45$

$7x = 35$ de donde $x = 5$

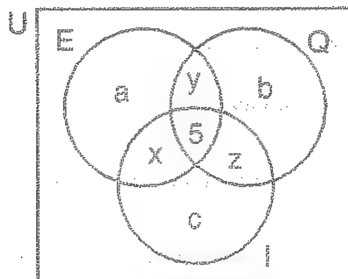
la respuesta es **c**

(39) En un grupo de 55 personas, 25 hablan español, 32 quechua, 33 ingles y 5 los tres idiomas. Hallar el número de personas que hablan solo dos de estos idiomas.

a) 20 b) 25 c) 30 d) 35 e) 28

Desarrollo

Interpretando mediante un diagrama de Venn – Euler



Se tiene: $n(U) = 55$, $n(E) = 25$

$n(Q) = 32$, $n(I) = 33$, $n(E \cap Q \cap I) = 5$

nos piden $x + y + z$

$n(E) = a + x + y + 5 = 25$

$a + x + y = 20$ ... (1)

$n(Q) = b + y + z + 5 = 32 \Rightarrow b + y + z = 27$ ... (2)

$n(I) = c + x + z + 5 = 33 \Rightarrow c + x + z = 28$ ... (3)

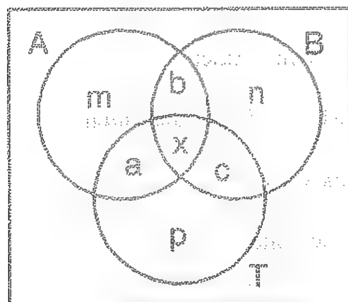
sumando (1), (2) y (3): $a + b + c + 2x + 2y + 2z = 75$

pero $\underbrace{a+b+c+x+y+z)}_{n(U)=55}+x+y+z=75 \Rightarrow 55 + x + y + z = 75$

de donde $x + y + z = 20$, la respuesta es **b**

(40) De 37 turistas que visiten tres centros arquitectónicos de la ciudad de Lambayeque: botan Grande, Túcume y Apurtec. Si 13 turistas visitan a lo más dos de los centros ¿cuántos visitaron los tres centros?

a) 18 b) 20 c) 22 d) 24 e) 26



Desarrollo

Interpretaremos mediante un diagrama de Venn – Euler.

A = Apurtec

B = Botan Grande

T = Túcume

De las condiciones del problema se tiene: $m + n + p + a + b + c = 13$ ... (1)

además $x = 37 - (m + n + p + a + b + c) = 37 - 13 = 24$

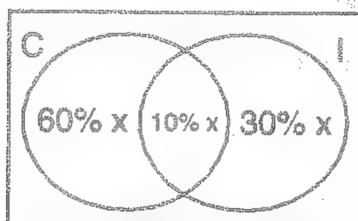
Por lo tanto la respuesta es **d**

(41) En una reunión se observa que el 70% de las personas, hablan castellano, 120 ingles y el 10% hablan ingles y castellano. ¿Cuantas personas hablan castellano?

a) 110 b) 210 c) 230 d) 190 e) 260

Desarrollo

Ilustraremos los datos en un diagrama de Venn – Euler



C = persona que hablan castellano

I = personas que hablan ingles

x = es el total de personas

de la condición del problema se tiene:

$40\%x = 120$ de donde $x = \frac{120}{40\%} = \frac{120(100)}{40} = 300$

nos piden $C = 70\%x = \frac{70}{100}(300) = 210$, por lo tanto la respuesta es **b**

(42) Si $\#[P(M \cup N)] = 128$ y $\#[P(M \cap N)] = 8$, Hallar el máximo número de elementos del conjunto potencias de M – N.

a) 32 b) 64 c) 8 d) 16 e) 4

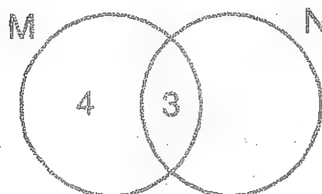
Desarrollo

NOTA: $n(A) = \#(A)$ = número de elementos del conjunto A

además $\#(P(A)) = 2^{\#(A)}$, por lo tanto se tiene:

$\#[P(M \cup N)] = 128 = 2^7 = 2^{\#(M \cup N)}$ entonces $\#(M \cup N) = 7$

$\#[P(M \cap N)] = 8 = 2^3 = 2^{\#(M \cap N)}$ entonces $\#(M \cap N) = 3$



máx $\#(M - N) = 4$
máx $\#[P(M - N)] = 2$ max $\#(M - N)$

$= 2^4 = 16$

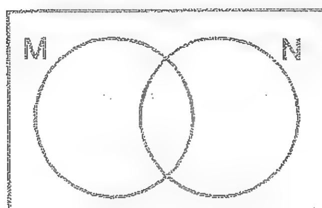
por lo tanto la respuesta es **d**

(43) Si $\#(U) = 15$, $\#(P(M' \cap N')) = 8$, $\#(P(M \Delta N) = 128$. Hallar $\#(P(M \cap N))$.

a) 64 b) 32 c) 16 d) 8 e) 4

Desarrollo

Ilustrando mediante un diagrama de Venn – Euler



$\#[P(M' \cap N')] = 8 = 2^3 = 2^{\#(M' \cap N')}$

de donde $\#(M' \cap N') = 3$

$\#(M' \cap N') = \#(M \cup N)' = 3$

$\#(U) - \#(M \cup N) = 3$ de donde

$\#(M \cup N) = \#(U) - 3 = 15 - 3 = 12$

$\#(P(M \Delta N)) = 128 = 2^7 = 2^{\#(M \Delta N)}$, de donde

$\#(M \Delta N) = 7$, como $\#(M \Delta N) = \#(M \cup N) - \#(M \cap N) = 7$

de donde $\#(M \cap N) = \#(M \cup N) - 7 = 12 - 7 = 5$

$\#(P(M \cap N)) = 2^{\#(M \cap N)} = 2^5 = 32$, la respuesta es **b**

(44) Si el conjunto potencia de A tiene 512 elementos más que el conjunto potencia B, además $\#(A) - \#(B) = 1$. Hallar $\#(A) + \#(B)$

a) 13 b) 15 c) 17 d) 19 e) 21

Desarrollo

Sean $\begin{cases} \#(A)=x \\ \#(B)=y \end{cases}$ entonces $\begin{cases} \#(P(A))=2^x \\ \#(P(B))=2^y \end{cases}$

De la condición del problema: $\begin{cases} 2^x-2^y=512 & \dots (1) \\ x-y=1 & \dots (2) \end{cases}$

De (2) despejamos $y = x - 1$ que reemplazamos en (1)

$2^x-2^{x-1}=512$ de donde $2^x=1024=2^{10}$ entonces $\begin{cases} x=10 \\ y=9 \end{cases}$

como nos poden $\#(A) + \#(B) = x + y = 10 + 9 = 19$, por lo tanto la respuesta es **d**

(45) Para dos conjuntos A y B se cumple que $n(A \cup B) = 6$, además $n(P(A)) + n(P(B)) = 40$. Calcular $n(P(A \cap B))$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

Desarrollo

Como $n(A \cup B) = 6$ y $n(P(A)) + n(P(B)) = 40$ ... (1)

Supongamos que $\begin{cases} n(A)=x \\ n(B)=y \end{cases}$ entonces $\begin{cases} n(P(A))=2^x \\ n(P(B))=2^y \end{cases}$ ... (2)

Al reemplazar (2) en (1) se tiene:

$2^x+2^y=40$, $x,y \in Z^+$ de donde $x = 5$, $y = 3$ (o al revés)

además $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6$ de donde

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 6 = x + y - 6 = 5 + 3 - 6 = 2$

Luego $n(P(A \cap B)) = 2^{n(A \cap B)} = 2^2 = 4$, la respuesta es **b**

(46) Indicar verdadero (V) o (F) según corresponda.

I) Si $n(A \Delta B) = n(A \cup B) \Rightarrow A \subset B$ II) Si $A \subset B$ entonces $n(A \cup B) = n(B)$

III) Si $A - B = \phi$ entonces $n(A \cap B) = n(A)$

a) FFF b) FVV c) VVV d) FFV e) FVF

Desarrollo

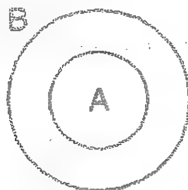
I) Veremos si se cumple: $n(A \Delta B) = n(A \cup B) \Rightarrow A \subset B$

Como $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

como $n(A \Delta B) = n(A \cup B)$ entonces $n(A \cap B) = \phi$, esto significa que A y B son disjuntos o sea que $A \not\subset B$, es F

II) Si $A \subset B$ entonces $n(A \cup B) = n(B)$



Representando mediante un gráfico

Podemos observa que:

$n(A \cup B) = n(B)$ entonces $A \subset B$ es (V)

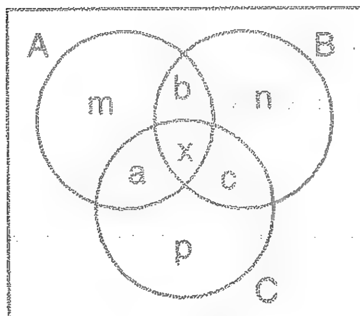
III) Si $A - B = \phi$ entonces $n(A \cap B) = n(A)$

además $A \cap B = A \Rightarrow n(A \cap B) = n(A)$ es V

Como FVV, la respuesta es **b**

(47) Dados tres conjuntos A,B y C, se sabe que: $n(A\Delta B) = 22$, $n(B \Delta C) = 16$, $n(C \Delta A) = 14$, $n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B \cap C) = 30$, determine $n(P(A \cap B \cap C))$.

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 32



Desarrollo

Ubicando un diagrama de Venn – Euler

$n(A \Delta B) = m + n + a + c = 22$

$n(B \Delta C) = n + p + a + b = 16$

$n(C \Delta A) = m + p + b + c = 14$ sumando

$2(m + n + p + a + b + c) = 52$

de donde $m+n+p+a+b+c=26$, entonces observamos que:

$$n(A\cup B\cup C)-n(A\cap B\cap C)=26 \qquad \ldots(1)$$

$$n(A\cup B\cup C)+n(A\cap B\cap C)=30 \qquad \ldots(2)$$

al restar el (1) del (2) se tiene:

$2n(A\cap B\cap C)=4$ de donde $n(A\cap B\cap C)=2$

$n(P(A\cap B\cap C))=2^{n(A\cap B\cap C)}=2^2=4$, la respuesta es **b**

(48) Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $P(A-B)\subset P(A)$ II) $n(A)<n(P(A))$ III) $n(P(A\cap B))\le n(P(A\cup B))$

a) VFV b) VFF c) VVV d) FFF e) FFV

Desarrollo

I) $P(A-B)\subset P(A)$ es (V), aplicamos la propiedad. Si $A\subset B \Rightarrow P(A)\subset P(B)$

Como $A-B\subset A$ entonces $P(A-B)\subset P(A)$

II) $n(A)<n(P(A))$ es (V)

En efecto: sea $n(A)=x$ entonces $n(P(A))=2^x$

Por lo tanto $x<2^x$, $\forall\ x\in Z_0^+$

III) $n(P(A\cap B))\le n(P(A\cup B))$ es (V)

En efecto: como $A\cap B\subseteq A\cup B$ entonces $n(A\cap B)\le n(A\cup B)$

De donde $2^{n(A\cap B)}\le 2^{n(A\cup B)} \Rightarrow n(P(A\cap B))\le n(P(A\cup B))$

como VVV la respuesta es **c**

(49) Simplificar la expresión conjuntista:

$[A\cap(C\Delta A)]\cup[(B\Delta C)\cup\{D\cap(B\Delta C)\}]\cup[B\cap(A^C\cup B^C)]$. Si $C^C\subset B^C$

a) $A\cap B$ b) $A\cap C$ c) $A\cap B^C$ d) $A\cup B\cup C$ e) $A\cap C^C$

Desarrollo

$[A\cap(C\Delta A)]\cup[(B\Delta C)\cup\{D\cap(B\Delta C)\}]\cup[B\cap(A^C\cup B^C)]$ ... (1)

haremos el desarrollo por partes: como $C^C\subset B^C \Rightarrow B\subset C \Rightarrow B\cap C=B$

$[A\cap(C\Delta A)]=[A\cap\{(C-A)\cup(A-C)\}]$, por la distributiva

$$=\underbrace{[A\cap(C-A)]}_{\phi}\cup\underbrace{[A\cap(A-C)]}_{A-C}=\phi\cup(A-C)=A-C$$

$[A\cap(C\Delta A)]=A-C$ ... (2)

$[(B\Delta C)\cup\{D\cap(B\Delta C)\}]=B\Delta C$, por la ley de absorción

$$=(B\cup C)-\underbrace{(B\cap C)}_{B}=(B\cup C)-B=C$$

$[(B\Delta C)\cup\{D\cap(B\Delta C)\}]=C$ ... (3)

$[B\cap(A^C\cup B^C)]=B\cap(A\cap B)^C=B-(A\cap B)=B-A$ ... (4)

ahora reemplazamos (2), (3) y (4) en (1)

$$(A-C)\cup C\cup(B-A)=\underbrace{[(A-C)\cup C]}\cup(B-A)=(A\cup C)\cup(B-A)$$

$$=\underbrace{[A\cup(B-A)]}\cup C=(A\cup B)\cup C$$

$=A\cup B\cup C$, la respuesta es **d**

(50) Si se cumple que: $A=\{\frac{x+1}{2}\in Z/1<x<18\}$, $B=\{\frac{x+1}{2}/1\le x\le 8,\ x\in Z\}$ ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $(A\cap B)$?

a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) 15

Desarrollo

Calculando los elementos de A donde x es impar; $1<x<18$

Entonces x: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Por lo tanto $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Para los elementos de B: x es impar donde $1 \le x \le 8$

Entonces x: 1,3,5,7, por lo tanto B = {1,2,3,4}

Calculando $A \cap B = \{2,3,4\}$

N° de subconjuntos propios de $(A \cap B) = 2^{n(A\cap B)} - 1 = 2^3 - 1 = 7$

Por lo tanto la respuesta es **d**

20.21. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Si: A = {n, n, n + 2, n + 2}, B = {m, m, 10, 10} Si A = B (m y n son diferentes) calcular m + n.

   a) 16 b) 22 c) 28 d) 18 e) 20

2. Si el conjunto A = {5x + 3y + 5; 2x + 7y + 12} es unitario, hallar: 9x – 12y.

   a) 7 b) 14 c) 21 d) 28 e) 32

3. Dado el conjunto A = {4,5,7,9,11,16}, B = {7,8,9,10}, C = {7,9,16} indique cuantas de las afirmaciones son correctas:

   I) $\phi \subset A$ II) $B \subset A$ III) $C \subset A$ IV) $n(B \cap C) = 2$

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. Si $A = \{\frac{\sqrt{x}-1}{2} \in N / 0 < x^2 \le 630\}$; $B = \{\frac{n-1}{2} \in Z^+ / \sqrt{n}$ es multiplo de 3 y $n < 30\}$. Halle (B – A).

   a) ϕ b) $\{\phi\}$ c) {1} d) {2} e) {1,2}

5. De los siguientes conjuntos, cuales son finitos A = {2,2,2,...,2}, B = {a,b,c,d,...,z} y C = {x / x es un estudiante de la UNI}

   a) A b) B y C c) C d) A y B e) A, B y C

6. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda

   * $\{2,3\} \subset \{\{2,3\}\}$
   * $\{1,\{2\}\} \subset \{1,2,\{2\}\}$
   * $\{1,\{2,3\}\} \subset \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$
   * $\phi \in \{\ \}$

a) VFVF b) VVFV c) VVFF d) FVFF e) FVVF

(7) Si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,x,4\}$ y $A \cap B = \{2,x\}$ calcule la suma de los cuadrados de los valores que puede tomar "x".

a) 4 b) 6 c) 9 d) 10 e) 14

(8) De las siguientes notaciones determinar ¿Cuál de ellas es falsa?

a) $\{2,5,3\} = \{3,5,2\}$ b) $\{4\} \in \{\{4\},5\}$ c) $\{3\} \subset \{2,3,4\}$

d) $\phi \in \{3,\{4\},2\}$ e) $\phi \subset \{3,\{4\},2\}$

(9) Si U = {números naturales}; $A = \{2x \,/\, x \in Z \;\wedge\; x < 6\}$, $B = \{\frac{x+4}{2} / x \in A\}$, $C = \{\frac{2y+1}{3} / y \in B\}$. ¿Cuántos elementos tiene C?

a) 2 b) 4 c) 1 d) 3 e) 5

(10) Si $A = \{a^2+1, 3a-1\}$ y $B = \{3x+y, x-y+8\}$ son conjuntos unitarios, entonces $(x+y+a)$ puede ser:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(11) Dado $A = \{1,1,\{1\},\phi\}$, dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) P(A) tiene cuatro elementos II) $\{\phi\} \in P(A)$ III) $\phi \in P(P(A))$

a) VFF b) FVV c) VVF d) VFV e) FVF

(12) Si: $A = \{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{2\},4\}$, $B = \phi$, $C = \{\{b,a\},\{a,b\},\phi\}$, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $P(B) \in P(C)$ II) $n[P(A \cap C)] \in A$ III) $(C - A) \subset P(A)$

a) VVV b) FFF c) VFV d) FVF e) FVV

(13) Si $A \cup B = \{5,6,8,10,11,12,13\}$, $A \cap B = \{8,12\}$, $A - B = \{5,6\}$. Calcule $n(A) + n(B) + n(B - A)$.

a) 8 b) 10 c) 12 d) 13 e) 14

(14) Sean los conjuntos $A = \{a,\{a\},b,\{b\}\}$, $B = \{\{a,b\},\{b\}\}$ indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda

I) $n(A) = n(A - B)$ II) $\{a,b\} \subset A$ III) $\{a\} \subset \{a,b\}$

IV) $n(A \cap B) + 1 = n(B)$ IV) $A \subset B$

a) FFFFV b) VVVFF c) FVVVF d) FFVVF e) VVFFV

(15) Sea el conjunto $A = \{2,3,5,7,11\}$ indicar verdadero (V) o falso (F) las siguientes proposiciones:

I) $\{3\} \subset A$ II) $3 \in A$ III) $\phi \subset A$ IV) $\{3,5\} \in A$

a) VVVF b) FVVF c) VVFF d) VVVV e) FVVV

(16) Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda

I) $A \cap B = n(A)$, entonces $A \subset B$

II) $\{a,a\} \subset \{3,3,3\}$ entonces $a = 6$ III) $\{m\} \subset \{m,n,p\}$

a) VFF b) VFV c) FVV d) FFF e) FVF

(17) Sean los conjuntos $A = \{x / x \in N; 2 < x < 9\}$; $B = \{2x / x \in N; 1 < x < 6\}$ calcule: $n(A \cap B) + n(A \cup B)$

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

(18) Si $A = \{x / x$ son los divisores pares de $6\}$; $B = \{n / n$ es múltiplo de 2; $n \in Z^+\}$; $C = \{m / m \in (A \cap B)$ y $m < 4\}$, calcular $n(A) \times n(B \cap A) + n(C)$

a) 9 b) 12 c) 10 d) 15 e) 11

(19) Se sabe que los siguientes conjuntos son unitarios $A = \{a + 4, 4b - 2, 2a - 10\}$; $B = \{6b - 3, \frac{c+3}{3}\}$, $C = \{\frac{c}{2} - 1, 6d - 4\}$, determinar $a + b + c + d$

a) 101 b) 102 c) 103 d) 104 e) 105

20 Dados los conjuntos $A = \{x^2 + x + 1 / x \in Z,\ x^2 + 1 = 0\}$, $B = \{x^2 - x + 1 / x \in N,\ x^3 + 1 = 0\}$, determinar cuantas de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I) $\phi \in A$ II) $\phi \subset B$ III) $A \subset B$ IV) $B \subset \phi$

a) 1 b) 3 c) 0 d) 2 e) 4

21 Dado el conjunto: $U = \{2,4,5,6,9\}$, $A = \{2,5,9\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{5,6,9\}$ determinar $[(B \Delta C)' - (A \Delta B)']$

a) $\{2,6\}$ b) $\{2,4,6\}$ c) $\{5,6,9\}$ d) $\{5,6\}$ e) $\{4,5,6\}$

22 Sean dos conjuntos A y B, tales que: $n[P(A \Delta B)] = 1024$, $n[P(A \cap B)] = 8$, determinar $n[P(A \cup B)]$

a) 2192 b) 4192 c) 6192 d) 8192 e) 9192

23 Si $n(U) = n(A \cup B \cup C) = 11$, $B \cap C = B$, $C - A = C$, calcular $n(C)$ si: $n(A \cup B) = 9$, $n(B \times A) = 20$, $n(B) > n(A)$

a) 5 b) 7 c) 6 d) 2 e) 3

24 Sean los conjuntos A y B tal que: $n(A \cup B) = 11$; $n(A \cap B') = 3$, $n(A \cap B) = 2$ ¿Cuántos elementos tiene: $[(A \Delta B) \cap (A \cap B')']$?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 12

25 Sean A, B, C y D conjuntos contenidos en el universo U tal que:

- $n\{P[A \cap (B \cup D)]\} = 1$
- $B^C \cap D = D$
- $n(A - C) = n(B - C) = n(D - C) = n(C - (A \cup B \cup D))$
- $n[P[(A \cup B \cup D) \cap C]] = 512$

Calcule $n(C)$, si: $n(U) = n(A \cup B \cup C \cup D) = 29$

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 15

(26) Si $A = \{a-3, b+2\}$, $B = \{b-1, a\}$ son conjuntos iguales donde el conjunto universal $U = \{x / x \in N;\ 7 \leq x < 12\}$. Calcule $a^2 - b^2$

a) 23 b) 32 c) 40 d) 45 e) 64

(27) Determine la verdad o falsedad de las proposiciones siguientes A, B y C son conjuntos, siempre se cumple que:

I) Si $A \cap B = \phi \Rightarrow A' \cap B' = \phi$ II) Si $A \subset B \Rightarrow n(A) < n(B)$

III) Si $A \cap B = \phi, A \cap C = \phi \Rightarrow B \cap \phi$

a) FVF b) FFF c) FFV d) FFV e) VFF

(28) Sabiendo que $A \cup B = \{x / x \in N,\ 5 < 3x < 50\}$, $A \cap B = \{y / 10 < 2y < 20,\ y \in N\}$ calcule la suma del número de elementos de A con el número de elementos de R.

a) 15 b) 17 c) 19 d) 36 e) 11

(29) Sabiendo que $A \subset B$, $n(A - C) = n(C - B) = 3$, $n(A^C \cap B) = 15$, $n(A \cup B \cup C) = 25$, calcule $n(A \cap B \cap C)$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

(30) Sean A, B, C y D, conjuntos tal que:

- $B^C \subset A^C$
- $B \Delta D = B \cup D$
- $n(B - A) = 2n(C \cap D)$
- $n(A - C) = n(D - C) + 3$
- $n(A \cap C) = n[C - (B \cup D)] = 8$

Calcular n(A) si la unión de dichos conjuntos tiene 26 elementos.

a) 8 b) 10 c) 13 d) 7 e) 6

(31) Si $M = \{x \in Z / x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $N = \{x \in Z / x^2 + x - 6 = 0\}$. Hallar $n[(M \cup N) \cup (M \cap N)]$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(32) Siendo $A = \{\frac{3x+1}{4} / 20 \leq x^2 < 100,\ x \in Z\}$, $B = \{\frac{x+2}{3} \in Z^+ / 5 < x \leq 10\}$ Hallar $n(P(A \cap B))$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(33) Simplificar la expresión conjuntista: $[A\cap(A\Delta C)]\cup[(B\cap C)^C\cap A]\cup[B\cup(A\cap B^C)]$

a) $A\cup B$ b) $A\cap B$ c) $A\cup B'$ d) $A-B$ e) $A'-B$

(34) Reducir: $[(A^C\cap A)^C\cap(A-B^C)]\cup(A\Delta B)$

a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) $A\cap B'$ d) $B-A$ e) $B'-A$

(35) Si $A=\{\frac{|x|-1}{3}\in Z/16\le x^2\le 625\}$, $B=\{(2r-3)\in Z/2\le\sqrt{3y-2}\le 5\}$. Hallar $n[A\times(B\cap A^C)]$

a) 26 b) 36 c) 46 d) 56 e) 66

(36) Si para dos conjuntos A y B se cumple que: n(A) + n(B) = 16; n[P(A ∪ B)] = 4096 ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $E=[(A\cup B)'\cup(A\cap B)']$?

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(37) Determinar la relación equivalente a: $\{[(A\Delta B)\cap(A-B)]\cap A\}-(A'\cap B')$

a) $A-B$ b) $B-A$ c) $A\cup B$ d) $A\cap B$ e) $A'\cup B$

(38) Simplificar: $[(A'\cap B)'\cup(A\cap B')]'\Delta A$

a) A b) B c) A' d) B' e) ϕ

(39) Se sabe que "U" es un conjunto universal: n(B) = 28, n(C) = 19, n(A ∩ B) = 14, $n(A'\cap B\cap C)=5$, $n(A\cap C')=12$, $n(A\cap B'\cap C)=1$, n(A ∩ B ∩ C) = 6, n(U) = 50, entonces $n[(A\cup C)\cap B']$ es:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

(40) Simplificar: $[(B'\cup A)\cup B]'\cup\{A\cap[(A'-C')'\cap A]\}$

a) $A\cup B$ b) $A\cap B$ c) $B\cap C'$ d) $A\cup C$ e) $B\cup C$

(41) Dado los conjuntos $A=\{x\in Z/\sim[x\le -2 \vee x>3]\}$, $B=\{x\in N/\sim(-1<x\le 3\Rightarrow x=5)\}$ y $C=\{x\in Z/(x<-2 \vee x\ge 2)\Rightarrow x>1\}$. Hallar el resultado de $(B\cap C)\Delta(A\cap B)$

a) {1,5} b) {5} c) {1,3} d) {4} e) {1,3,5}

(42) Dado los conjuntos A = {x ∈ N / 3 < x ≤ 4}, $B=\{z/z=n^2, n\in N, n\leq 5\}$, C = {x ∈ N / x es divisor de 30}. Hallar la suma de los elementos del conjunto (A ∩ B) ∪ (B ∪ C)

a) 1   b) 3   c) 5   d) 7   e) 9

(43) Si A ⊂ B y C ∩ A = ϕ, simplificar: [A ∪ (B – C)] ∩ [B ∪ (C – A)]

a) B – A   b) B – C   c) A – C   d) A ∪ B   e) B ∩ C

(44) Sean los conjuntos $A=\{x\in N/x=\frac{k^2-1}{2}, k\in N\}$, $B=\{x\in N/x^2=8x\}$, $C=\{x\in N/x^2-32x+192=0\}$. Hallar el resultado de (B – A) ∩ C

a) {8}   b) {4}   c) {4,8}   d) {1,3,5}   e) {2,4,6}

(45) Si los conjuntos A y B son tales que: n(A ∪ B) = 30, n(A – B) = 12 y n(B – A) = 10. Hallar n(A) + n(B)

a) 18   b) 28   c) 38   d) 26   e) 34

(46) Sean A y B dos conjuntos tales que: n(A ∪ B) = 24, n(A – B) = 10, n(B – A) = 6, hallar: 5n(A) – 4n(B).

a) 14   b) 18   c) 24   d) 34   e) 28

(47) Si n(A) =4, n(B) = 3 y n(A ∩ B) =2, hallar la suma de n[P(A) ∪ P(B)] + n[P(A ∪ B)]

a) 52   b) 42   c) 32   d) 22   e) 12

(48) Dado el conjunto U y los subconjuntos A, B y C, se tiene los siguientes datos: n(U) = 44, n(A) =21, n(B) = 17, n(A∩B) = 14, n(B∩ C) = 12, $n(A\cap B\cap C')=3$, n(A ∩ B ∩ C) = 5 y n(A ∪ B ∪ C)' = 6. Hallar n(C)

a) 11   b) 13   c) 19   e) 29   e) 34

(49) Dados los conjuntos $A=\{x\in N/x^3-2x^2-5x+6=0\}$, $B=\{x\in N/2x^2-7x+3=0\}$, C = {2,3} si D = (A – B) ∪ C. Hallar el número de elementos de P(D).

a) 4   b) 8   c) 10   d) 6   e) 12

(50) Si $A = \{a,\phi,\{\phi\}\}$ y $B = \{\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$ ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) $(A \cup B)-(A \cap B) = \{a,\phi,\{\{\phi\}\}\}$ II) El número de elementos de P(A) es 8

III) $P(A) \cap P(B) = \{\phi,\{\{\phi\}\}\}$

a) VVV b) FFF c) VFV d) FVF e) VFF

(51) Si A es un conjunto de 8n elementos, B un conjunto de 5n elementos, y tiene 2n – 1 elementos comunes, hallar la suma de los números de elementos de: $(A \cap B) \cap (A - B)$ y $(A \cup B) \cap (A - B)$

a) 5n + 6 b) 6n + 1 c) 7n + 1 d) 4n + 7 e) 3n + 5

(52) Si se cumple que A, B y C son conjuntos contenidos en un universo U, además $C = \{[(A \Delta B) \cap B']\cap(B' \cup A')\} \cap (A \cap B)$. Hallar $(A \cap C)' \cup B$

a) $A \cup B$ b) $A' \cup B$ c) U d) A e) B

(53) Si se cumple que: $A = \{(x^2+1) \in Z / -2 \le x < 5\}$, $B = \{(y^2-1) / y \in Z, -3 < y \le 7\}$. Determinar la suma de elementos de $A \cap B$

a) 30 b) 35 c) 45 d) 50 e) 55

(54) Si se cumple:
- $n[P(P(A))] = n[P(B-C)]$
- $n(B-(A \cup C)) = 27$
- $n[P(A-B)] = n(B \cup C') = n[P(A \cap C)] = 1$
- $n(U) = [n(B')]^2 = 2n(B-C)$, calcular $n(B \cap C)$

a) 6 b) 12 c) 24 d) 28 e) 32

(55) A es un conjunto de 8n elementos, B un conjunto de 5n elementos y tiene (2n – 1) elementos comunes. Si $n(A-B)-n(B-A) = 12$ ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $A \cap B$?

a) 127 b) 107 c) 80 d) 63 e) 47

(56) Dados los conjuntos $M = \{x \in Z / x \in \langle 8,17]\}$, $N = \{x \in Z / x \in [12,21\rangle\}$. Calcular $n(M - N)$.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

57 Si $A \subset B$, efectuar: $\{[(B \cup A) \cap (B' \cap C)] \cup A'\} \cup B'$

a) A b) A' c) B d) B' e) $A' \cup B'$

58 Si $A = \{x \in N / 3x < 25\}$, $B = \{x \in N / 5x > 20\}$. Hallar la suma de los elementos de $A \cap B$

a) 13 b) 26 c) 30 d) 33 e) 36

59 Dado el conjunto: $A = \{x / \frac{x}{2} \in Z;\ 4 < x < 11\}$, calcular el número de subconjuntos propios de A.

a) 5 b) 7 c) 9 d) 10 e) 11

60 Sean los conjuntos $A = \{\{2,1\},3\}$ y $B = \{\{a,b\},3,\{2,1\}\}$. Hallar $B - A$.

a) ϕ b) $\{\phi\}$ c) $\{a,b\}$ d) $\{\{a,b\}\}$ e) $\{1,\{a,b\}\}$

61 Sean A y B conjuntos tales que $n(A) = 6$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 2$. Hallar $n[P(A \Delta B)]$

a) 8 b) 16 c) 32 d) 20 e) 18

62 Si $n(P) = 15$, $n(Q) = 22$, $n(P \cup Q) = 30$. Hallar $n(P \cap Q)$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

63 Si $n(A) = 18$, $n(B) = 20$, $n(A \cap B) = 4$, entonces el valor de: $n[(A \cup B) \cap (A - B)]$ es:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

64 Si $n(A \cup B) = 14$, $n(A \cap B) = 6$. Hallar $n(A) + n(B)$

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

65 Si $A = \{x \in N / x \text{ es impar}, x < 25\}$, $B = \{y / y \in N;\ y < 20\}$ ¿Cuántos elementos tiene $P(A \Delta B)$?

a) 2^{10} b) 2^{11} c) $2^{11} - 1$ d) 2^{12} e) $2^{12} - 1$

66 Si $A = \{2,3,4,5,...,50\}$, $B = \{2n / n \in Z,\ 1 < n < 30\}$ calcule $n[(A \cup B) - (A \cap B)]$

a) 20 b) 29 c) 28 d) 24 e) 15

(67) Si $A = \{2x / x \in Z, 3 < x < 9\}$, $B = \{3n / n \in Z, 5 < n < 10\}$, calcule $n[(A \cap B)] + n[(A \cup B)]$

a) 5 b) 7 c) 9 d) 10 e) 12

(68) Si $\#(M) = 16$ y $\#(N) = 64$ siendo $M = P(R)$ y $N = P(T)$. Hallar $\#(R) + \#(T)$

a) 4 b) 6 c) 10 d) 8 e) 12

(69) La simplificación de: $[(M \cup N)' \cup (M \cap N)']' \cap M$

a) $M \cap N$ b) $M \cup N$ c) M d) N e) $M - N$

(70) Si M, N y P son conjuntos tales que $M \subset N \subset P$, simplificar:

$[(M \cap P) \cup (N - P)] \cup [(M \cup N \cup P) \cap (N - M)]$

a) N b) M c) P d) $N - M$ e) $P - N$

(71) Si $Q \subset M$, $\#(M' \cap N) = 7$, $\#(Q) = 11$, $\#(M) = 19$, $\#(N) = 15$, $\#[P(N \cap Q)] = 32$. Hallar $\#P[(M - Q) \cap N]$

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

(72) Si los conjuntos M y N, son disjuntos, además, $\#(M-N) = \#(P-N) = 12$, $\#(M \cup N \cup P) = 25$, $\#[P(M) \cap P(P)] = 16$, calcular $\#(N)$.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(73) Si $n(M) = 7x$, $n(R) = 9x$, $n(M \cap R) = 5x + 3$, además $n(M \cup R) = 63$, calcular $n[(M \cup R) \cap (R \cap M')]$.

a) 7 b) 14 c) 18 d) 21 e) 27

(74) Si $\#(U) = 15$, $\# P(M' \cap N') = 8$, $\#P(M \Delta N) = 128$. Hallar $\#[P(M \cap N)]$

a) 64 b) 32 c) 16 d) 8 e) 4

(75) M y N son dos conjuntos tales que: $\#(M \cup N) = 16$, $\#(M \cap N) = 7$, $\#(M) + 3 = \#(N)$ ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $N - M$?

a) 31 b) 33 c) 63 d) 64 e) 127

(76) Sean los conjuntos M, N, P y el conjunto universal $U = M \cup N \cup P$.

i) $\#P(M \cap N) = 1$ ii) $\#(P - M) = 2\#(M \cap P) = 12$

iii) $\#[P' \cup (M \cap P')] = 40$; calcular $\#(U)$

a) 58 b) 56 c) 54 d) 52 e) 48

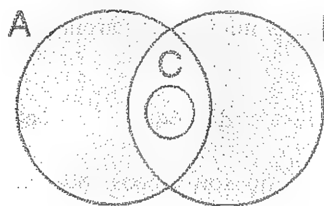
(77) Sean los conjuntos M, N y $P \subset U$, tal que:

i) $M \cap P = P$ ii) $\#(P') = 150$ iii) $\#(M' \cap N') = 90$

iv) $\#[(M \cup N) - P] = 6\#(P)$; calcular $\#(U)$

a) 80 b) 120 c) 160 d) 200 e) 240

(78) La región sombreada corresponde a:

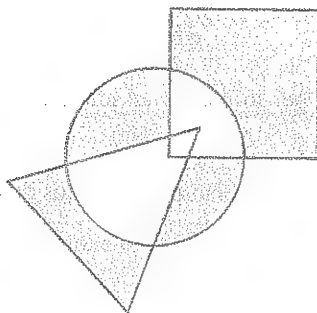


a) $(A \cap B) \cup C$ b) $(A - B) \cup (B - A)$

c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

e) $[(A \cup B) - (A \cap B)] \cup C$

(79) El conjunto sombreado, mostrado en la figura adjunta, representa una operación entre los conjuntos: L = cuadrado, M = circulo, N = triángulo



a) $(M - L \cup N) \cup (L - M)$

b) $(M - L \cap N) \cup (N - M)$

c) $(M - L) \cup (M - N)$

d) $(N - M) \cup (L - M) \cup (L \cap M \cap N)$

e) $(L - M) \cup [M - (L \cup N)] \cup (N - M)$

(80) En un salón de clase de 45 personas, si 15 no practican ajedrez, 25 no practican damas, y 5 no practica ni damas ni ajedrez. Determinar cuántos practican damas y ajedrez.

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(81) 120 alumnos rindieron una prueba que contiene los cursos A, B y C con el siguiente resultado:

- Se anuló 10 pruebas y el resto aprobó por lo menos un curso.
- Los que aprobaron A desaprobaron B o C.
- Hay 20 alumnos que aprobaron B y C.

¿Cuántos aprobaran un solo curso?

a) 60 b) 70 c) 80 d) 90 e) 100

(82) En un salón de 100 alumnos se observa que 40 son mujeres, 73 estudian Historia y 12 son mujeres que estudian historia ¿Cuántos hombres no estudian historia?

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(83) En un aula hay mas de 50 personas, si se retiran la cuarta parte de ellos, quedan menos de 60. La novena parte del total son mujeres. Determine el número de varones que hay en dicha aula.

a) 36 b) 48 c) 56 d) 64 e) 72

(84) De 200 personas se observa: 50 hombres cantantes no son ciegos; 80 mujeres son cantantes o ciegos pero mudos; 40 personas son mudos y 30 personas son mudos, pero no ciegos; 60 hombres son ciegos, pero no mudos ¿Cuántas personas hay que "no son cantantes ciegos y mudos?

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

(85) En un salón de 140 alumnos donde todos hablan por lo menos un idioma entre español, ingles y francés, se observa que:

- 135 hablan a lo más 2 idiomas.
- 50 hablan por lo menos dos idiomas.
- 15 hablan español y francés pero no ingles.
- 35 solo hablan ingles.
- 40 hablan francés pero no ingles.
- 45 hablan francés pero no español.
- 45 hablan español pero no ingles.

Determinar cuántos alumnos hablan los 3 idiomas.

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

86) En un salón de clase, 25 aprobaron aritmética, 23 álgebra, 25 razonamiento matemático, 9 aprobaron aritmética y álgebra solamente, 6 álgebra y razonamiento matemático, 12 aritmética y razonamiento matemático. Determinar el mínimo número de personas que aprobaron solo razonamiento matemático.

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

87) De 212 deportistas, 60 practican voley y ciclismo, 70 practican ciclismo y tenis, 80 voley y tenis, además 75 practican solo uno de estos deportes. Determine la suma del máximo y el mínimo valor que puede tomar el número de deportistas que practican los tres deportes.

a) 46 b) 56 c) 66 d) 86 e) 96

88) De 72 alumnos, 36 estudian en el día, 35 en la tarde y 25 en la noche ¿cuántos estudian en solo dos turnos, si solo uno estudia en tres turnos?

a) 11 b) 22 c) 32 d) 24 e) 16

89) Cien espectadores escuchan a 3 cantantes, 40 aplauden al primero, 39 aplauden al segundo y 48 al tercero, 10 aplauden a los tres, 9 aplauden solo a los dos primeros, 19 aplauden solo al tercero, 21 espectadores no aplauden ¿Cuántas personas aplaudieron por lo menos a dos cantantes?

a) 19 b) 21 c) 38 d) 42 e) 27

90) En un aula de 42 alumnos: a 19 de ellos le gusta el curso de historia; a 21 de ellos le gusta matemática y a 23 de ellos les gusta lenguaje, además 7 alumnos prefieren historia y matemática, 9 prefieren lenguaje y matemática, 8 prefieren lenguaje e historia. Si todos prefieren al menos uno de los cursos mencionados ¿Cuántos prefieren solo uno de los cursos?

a) 24 b) 23 c) 20 d) 21 e) 25

91) En un salón de clase, hay 72 alumnos que se preparan para postular a la UNFV o a la Católica. La cantidad de postulantes a la UNFV es el quíntuplo de los que postulan solo a la Católica, la cantidad de los que postulan únicamente a la UNFV es el triple de los que postulan a ambas ¿Cuántas postulan a una solo universidad.

a) 59 b) 61 c) 55 d) 57 e) 47

(92) De los residentes de un edificio, se ha observado que 29 de ellos trabajan y 56 son mujeres, de los cuales 12 estudian, pero no trabajan. De los varones 32 trabajan o estudian y 21 ni trabajan ni estudian ¿Cuántas mujeres no estudian ni trabajan, si 36 varones no trabajan?

a) 8 b) 16 c) 32 d) 24 e) 28

(93) En una entrevista de selección de personal a la cual asistieron 120 personas se ha observado que el 80% tenia buena presencia, el 75% tenían experiencia previa en compañías similares, el 90% habían estudiado computación y el 70% dominaban ingles. Determine el menor número de personas que reúnen todas las condiciones mencionadas.

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

(94) A un evento asistieron 24 mujeres con falda, 28 varones con reloj, 40 portaban casaca, 9 mujeres tenían casaca pero no falda ¿Cuántos varones con casaca no llevaron reloj? Si 16 mujeres no llevaban falda ni casaca y 28 mujeres no tenia casaca? El número de varones con casaca y reloj son la tercera parte de los varones sin casaca y con reloj.

a) 8 b) 12 c) 16 d) 32 e) 64

(95) En un salón de 100 alumnos se observa que 40 son mujeres, 73 estudian geografía y 12 mujeres que no estudian geografía ¿Cuántos hombres no estudian geografía?

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(96) En un salón de 40 alumnos, se observa que 18 de ellos usan lentes, 25 usan mochila y 7 alumnos no usan lentes ni mochilas ¿Cuántos alumnos usan lentes y mochilas?

a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

(97) Se sabe que en una encuesta sobre las preferencia de 3 productos A, B y C; 22 prefieren A, 24 prefieren B y 20 prefieren C, si los que prefieren al menos un producto son 35 y los que prefieren solamente un producto son 5 ¿Cuántos prefieren los 3 productos?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(98) De un grupo de 500 alumnos matriculados en los ciclos semestral o semianual, 300 lo hicieron para el semianual y 380 al semestral. Del mencionado grupo 120 se incorporaron al ciclo anual y de estos últimos 31 no se matricularon en el semianual y 23 no lo hicieron en el semestral ¿Cuántos se matricularon en el semestral y semianual, pero no se incorporaron al anual?

a) 102 b) 120 c) 148 d) 98 e) 114

(99) En una encuesta realizada a 109 personas todos hombres tienen mas de 20 años, en el grupo hay 90 mujeres. Hay 80 personas de mas de 20 años, 25 mujeres casadas, 15 personas casadas con mas de 20 años. Determinar la cantidad de personas casadas, si ay 56 mujeres solteras con más de 20 años.

a) 32 b) 30 c) 28 d) 40 e) 35

(100) En una fiesta estudiantil se observa que 20 señoritas tienen ojos pardos; 24 señoritas de ojos pardos o negro bailan, 30 personas de ojos negros bailan, 29 hombres que bailan no tienen ojos pardos y 12 señoritas de ojos pardos no bailan. Si 22 hombres no tienen ojos negros ni pardos. ¿Cuántos de los que no bailan, no tienen ojos negros ni pardos, ni son mujeres?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

20.22. RESPUESTAS.-

1	b	2	c	3	c	4	a	5	e	6	d	7	e	8	d
9	a	10	c	11	b	12	c	13	c	14	c	15	a	16	b
17	e	18	a	19	d	20	b	21	a	22	d	23	d	24	c
25	d	26	c	27	b	28	c	29	c	30	c	31	b	32	a
33	a	34	b	35	d	36	c	37	a	38	b	39	c	40	a
41	b	42	c	43	b	44	a	45	c	46	d	47	a	48	d
49	b	50	a	51	b	52	c	53	d	54	c	55	a	56	b
57	b	58	b	59	b	60	d	61	c	62	d	63	e	64	d
65	b	66	c	67	c	68	c	69	a	70	b	71	b	72	c
73	d	74	b	75	c	76	a	77	c	78	e	79	e	80	b
81	d	82	c	83	d	84	c	85	a	86	c	87	e	88	b
89	c	90	a	91	d	92	c	93	a	94	b	95	c	96	a
97	a	98	e	99	e	100	c								

CAPÍTULO XXI

21. SISTEMA DE NÚMEROS REALES.-

21.1. INTRODUCCIÓN.-

El sistema de los números reales que ahora conocemos, fue obtenido después de muchas reflexiones por parte del hombre.

Desde el comienzo de nuestra civilización, ya se conocían los números enteros positivos, o sea 1, 2, 3, ... Los números enteros tan grandes como 100,000 se utilizaban en Egipto en épocas tempranas, como es 300 A.C.

La aritmética que desarrollaron los antiguos Egipcios y Babilonios con los números enteros positivos mediante los cuales podían efectuarse las operaciones de adición y multiplicación, aunque la división no se desarrollo por completo.

En estos dichos pueblos usarán ciertas fracciones, es decir que los números racionales también aparecieron en una temprana etapa de nuestra civilización (un número racional es cociente de dos enteros).

Los que tuvieron más éxito en el desarrollo de la aritmética y el álgebra fueron los babilonios, ellos tenían una notación para los números, muy superior al de los Egipcios, esta notación, análoga a nuestro sistema decimal, excepto por el hombre de que sus bases 60 en lugar 10, una buena notación es el pre–requisito para el desarrollo de los matemáticos.

Nuestro sistema decimal de los números llamados arábigos fue creado por los Hindúes e introducido en Europa Occidental en el siglo XII mediante la traducción de textos Arabes. Sin embargo, esta notación demoró demasiado en una aceptación generalizada, mucho más tarde fue la aceptación de los números negativos, que se prolongo hasta finales del siglo XVI se descartaba las raíces negativas de las ecuaciones.

En contradicción de la geometría que se desarrollaron los Griegos solamente para su satisfacción intelectual y en su modelo del sistema lógico, con el desarrollo del calculo, los números irracionales tales como $\sqrt{3}$, π, $\sqrt[3]{7}$, tuvieron que sustentarse sobre una fundamentación lógica, esto se logro en la ultima parte del siglo XIX, ahora tenemos un sistema de axiomas, que describen completamente los números reales partiendo de estas axiomas podemos deducir todas las propiedades de los números reales.

Esto es el método usado en la Geometría Euclideana, se acepta un cierto número de proposiciones a los que se llama axiomas o postulados o hipótesis y basándose en esos axiomas se prueban todas las Teoremas de la Geometría.

21.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos sistema de los números reales a un conjunto R, provisto de dos operaciones adición (+) y multiplicación (.) (leyes de composición interna), y una relación de orden denotado por "<" y el axioma del supremo, es decir:

1° LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA:

$$+: R \times R \longrightarrow R$$
$$(a,b) \longrightarrow +(a,b) = a + b$$

Además debe cumplirse los axiomas siguientes:

A_0 Cerradura: $\forall\, a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$

A_1 Conmutatividad: $a + b = b + a$, $\forall\, a,b \in R$

A_2 Asociatividad: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall\, a,b,c \in R$

A_3 Identidad aditiva: $\forall a \in R, \exists\ 0 \in R / a + 0 = 0 + a = a$

A_4 Opuesto Aditivo: $\forall a \in R, \exists\ -a \in R$, y es único, tal que: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

2° LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA: $\bullet : R \times R \longrightarrow R$
$(a,b) \longrightarrow a.b$

Además debe cumplirse los axiomas siguientes:

M_0 Cerradura: $\forall\ a, b \in R \Rightarrow a.b \in R$

M_1 Conmutativa: $a.b = b.a,\ \forall a,b \in R$

M_2 Asociativa: $(a.b).c = a.(b.c), \forall a,b,c \in R$

M_3 Identidad Multiplicativa: $\forall a \in R, \exists\ 1 \neq 0, 1 \in R$, tal que: $1.a = a$

M_4 Inverso Multiplicativo: $\forall a \neq 0, \exists\ a^{-1} \in R$, tal que: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

3° RELACIÓN DE ORDEN:

O_1 $\forall a,b \in R$ una y solamente una de las relaciones se cumple $a < b$, $a = b$, $b < a$ (ley de tricotomía).

O_2 Sí $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (transitiva).

O_3 Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ \forall a,b,c \in R$.

O_4 Sí $a < b$, $c > 0$ entonces $a.c < b.c$

OBSERVACIÓN:

i) A los números a y b los llamaremos sumando, y al número $a + b$ suma de a y b.

ii) En a.b; a los números a y b los llamaremos factores y al número a.b producto de a y b.

iii) Cuando existe el inverso multiplicativo es único.

21.3. AXIOMA DE SUSTITUCIÓN.-

Si a y b pertenecen a un conjunto B y si a = b, entonces en toda relación se puede sustituir al elemento a por el elemento b sin que altere el significado de la relación.

21.4. AXIOMAS DISTRIBUTIVAS.-

a) $a.(b + c) = a.b + a.c, \ \forall a, b, c \in R$ distributiva a izquierda

b) $(a + b).c = a.c + b.c, \ \forall a, b, c \in R$ distributiva a derecha

21.5. TEOREMA DE IGUALDAD PARA LA ADICIÓN.-

Sí $a = b$ entonces $a + c = b + c$, para todo $a, b, c \in R$

Demostración

1° $a = b$. por hipótesis.

2° $a + c = a + c$, propiedad reflexiva.

3° $a + c = b + c$, 1°, 2° y axioma 21.3

NOTA.- Propiedad Reflexiva será tratado más adelante.

21.6. TEOREMA DE IGUALDAD PARA LA MULTIPLICACIÓN.-

Sí $a = b$ entonces $a.c = b.c$, para todo $a, b, c \in R$

Demostración

1° $a = b$ por hipótesis.

2° $a.c = a.c$, propiedad reflexiva.

3° $a.c = b.c$, 1°, 2° y axioma 21.3

NOTA.- Propiedad Reflexiva será tratado más adelante.

21.7. TEOREMA DE CANCELACIÓN PARA LA ADICIÓN.-

Sean $a,b,c \in R$; Sí $a + c = b + c$ entonces $a = b$

Demostración

1° $a + c = b + c$. por hipótesis.

2° $a + c + (-c) = b + c + (-c)$, 1° y teorema 21.5

3° $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$, 2° y A_2

4° $a + 0 = b + 0$, 3° axioma A_4

5° $a = b$, 4°, axioma A_3

NOTA.- para $b \neq 0$, $b^{-1} = \frac{1}{b}$

21.8. TEOREMA DE CANCELACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN.-

Sean $a,b,c \in R$; Sí $a.c = b.c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

Demostración

1° $a.c = b.c$, ... por hipótesis.

2° $c \neq 0$, ... por hipótesis

3° $\exists \ \frac{1}{c} \in R \,/\, (a.c).\frac{1}{c} = (b.c).\frac{1}{c}$, ... 2°, 1° y axioma M_4

4° $a.(c.\frac{1}{c}) = b.(c.\frac{1}{c})$, ... 3° y axioma M_2

5° $a.1 = b.1$, ... 4° y axioma M_4

6° $a = b$, ... 5° y axioma M_3

21.9. SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES.-

DEFINICIÓN.- Para cualquier número real $a, b \in R$, definiremos a la sustracción de números reales por:

$$a - b = a + (-b)$$

21.10. DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES.-

DEFINICIÓN.- Para cualquier números reales $a,b \in R$, donde $b \neq 0$, definiremos al cociente de números reales por:

$$\frac{a}{b} = a.b^{-1}$$

21.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Para cada número real a ∈ R, demostrar que a + a = 2a

Demostración

1° a = a.1 ... Por M_3

2° a + a = a.1 + a.1 ... 1° y axioma 21.4

3° a + a = a.(1+1) ... 2° y axioma 21.4.a

4° a + a = a.2 ... 3° y por M_3

5° a + a = 2a ... 4° y por M_3

(2) Para cada número real a ∈ R, demostrar que a.0 = 0

Demostración

1° a.0 = a.0 + 0 ... Por A_3

2° a.0 = a.0 + (a + (-a)) ... 1° y por A_4

3° a.0 = (a.0 + a) + (-a) ... 2° y por A_2

4° a.0 = (a.0 + a.1) + (-a) ... 3° y por M_3

5° a.0 = a(0 + 1) + (-a) ... 4° y por axioma 21.4a

6° a.0 = a.1 + (-a) ... 5° y por A_3

7° a.0 = a + (-a) ... 6° y por M_3

8° a.0 = 0 ... 7° y por A_4

(3) Para cada número real a ∈ R, demostrar que: -a = (-1).a

Demostración

Basta demostrar que a + (-1)a = 0, porque (-1).a, y –a son inversos aditivos de a por A_4

Luego $a+(-1)a = 1.a+(-1)a,$ ... por axioma M_3

$a+(-1)a = (1+(-1))a,$ ... por axioma 21.4b.

$a+(-1)a = 0.a,$ ... por A_4

$a+(-1)a = 0,$ ... por ejercicio 2.

$\therefore \quad -a = (-1)a$

(4) Para cada número real $a \in R$, demostrar que $-(-a) = a$

Demostración

1° $a+(-a)=0$ ... por A_4

2° $(-a)+(-(-a))=0$ ... por A_4

3° $(-a)+(-(-a))=a+(-a)$ ... 1°, 2°

4° $-(-a)=a$ ... 3° y por teorema 21.7

(5) Para cada número real $a,b \in R$, demostrar que $(-a).(-b)=a.b$

Demostración

1° $(-a).(-b)=[(-1)a][(-1)b]$ ... por el ejercicio 3

2° $(-a).(-b)=(-1)[a((-1)b)]$ ... 1° y M_2

3° $(-a).(-b)=(-1)[(-1)a].b$ ... 2° y M_1, M_2

4° $(-a).(-b)=(-1)[(-a)].b$ ... 3° y ejercicio 3

5° $(-a).(-b)=[(-1)(-a)].b$ ... 4° y M_2

6° $(-a).(-b)=a.b$ ... 5° y ejercicio 3

(6) $\forall$ a,b $\in$ R, demostrar que a.(-b) = -(a.b)

Demostración

1° a.(-b) = a.((-1).b) ... por ejercicio 3

2° a.(-b) = (a.(-1)).b ... 1° y por M_2

3° a.(-b) = ((-1)a).b ... 2° y por M_1

4° a.(-b) = (-1)(a.b) ... 3° y por M_2

5° a.(-b) = -(a.b) ... 4° y ejercicio 3

(7) $\forall$ a,b $\in$ R, demostrar que a.(b - c) = a.b – a.c

Demostración

1° a.(b - c) = a.(b + (-c)) ... definición de sustracción

2° a.(b - c) = a.b + a.(-c) ... 1° y axioma 21.4a

3° a.(b - c) = a.b + (-(a.c)) ... 2° ejercicio 6

4° a.(b - c) = a.b – a.c ... 3° definición de sustracción

(8) Para a $\in$ R, demostrar sí a $\neq$ 0, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Demostración

1° $a^{-1} = (a^{-1}).1$ ... por M_3

2° $a^{-1} = 1.(a^{-1})$ ... 1° y M_1

3° $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ... 2° definición de división

(9) $\forall$ a,b $\in$ R, a.b $\neq$ 0, demostrar que $(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$

Demostración

1° $(a.b).\dfrac{1}{(ab)} = 1$ ... por M_4

2° $(a.b).(a.b)^{-1} = 1$ ... 1° y definición de división

3° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = (a).(a)^{-1}.(b).(b^{-1})$ ... por M_2

4° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = (1)(1)$ ... 3° y M_4

5° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = 1$ ... de 4° y M_3

6° $(a.b).(a.b)^{-1} = (a.b)(a^{-1}.b^{-1})$ ... de 2° y 5°

7° $(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$ ... 6° y teorema 21.8

(10) $\forall$ a,b,c,d $\in$ R, b $\neq$ 0, d $\neq$ 0, demostrar que: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a.d + b.c}{b.d}$

Demostración

1° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = a.b^{-1} + c.d^{-1}$ ... por definición de división

2° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = (a.b^{-1}).(d.\dfrac{1}{d}) + (c.d^{-1}).(b.\dfrac{1}{b})$ ... 1° y por M_4

3° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = (a.b^{-1}).(d.d^{-1}) + (c.d^{-1}).(b.b^{-1})$ ... 2° y definición por división.

4° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d).(b^{-1}.d^{-1})+(b.c).(b^{-1}.d^{-1})$ ... 3°, M_2

5° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d).(b.d)^{-1}+(b.c).(b.d)^{-1}$ ... 4° y ejercicio 9

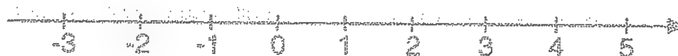
6° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d+b.c).(bd)^{-1}$ ... de 5° y axioma 21.4b.

7° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{bd}$ ... 6° y definición de división

21.12. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES.-

Entre los números reales y los puntos de una recta se puede establecer una correspondencia, es decir:

Si sobre una recta se fija su origen "O", una unidad, y un sentido positivo, entonces, a cada punto de una recta le corresponde un número real y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, al número real correspondiente a un punto de la recta se le llama abscisa del punto.



NOTACIÓN PARA LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS.-

N:	Conjunto de los números naturales.
Z:	Conjunto de los números enteros.
Q:	Conjunto de los números racionales.
I:	Conjunto de los números irracionales.
R:	Conjunto de los números reales.
C:	Conjunto de los números complejos.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

- **R**
  - **Q** racionales
    - $Z_0^+ = \begin{cases} N = \{1,2,...,n,..\} \\ N_0 = \{0,1,2,...,n,...\} \end{cases}$ entero positivo
    - Z^- enteros negativos
    - Decimales periódicos $= 0.\overline{abc} = \dfrac{abc}{999}$
    - Decimales periódico mixto $= 0.ab\overline{cde} = \dfrac{abcde - ab}{99900}$
    - Decimales exactos $= 0.abc = \dfrac{abc}{1000}$
  - $Q = \{\frac{a}{b} / a, b \in Z,\ b \neq 0\}$
  - **I** Irracionales
    - propios: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...
    - trascendentes = $\{e, \pi, ...\}$

21.13. DESIGUALDADES.-

La correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta pueden usarse para dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales.

La relación a < b significa que sobre una recta numérica el punto A corresponde al número "a", que se encuentra a la izquierda del punto B correspondiente al número "b".



El símbolo < se lee "Es menor que". También usaremos los símbolos siguientes:

>, que se lee "Es mayor que".

$\leq$, que se lee "Es menor o igual que".

$\geq$, que se lee "Es mayor o igual que".

a) **DEFINICIÓN.-**

i) Un número real "a" es positivo sí, $a > 0$.

ii) Un número real "a" es negativo sí, $a < 0$.

b) **DEFINICIÓN.-**

Llamaremos desigualdad a una expresión que indica que un número es mayor ó menor que otro. Por ejemplo: $5 < 9$.

21.14. AXIOMA DE LA RELACIÓN DE ORDEN.-

$\forall$ a,b,c $\in$ R, se tiene:

O_1 Orden de tricotomía: una y sólo una de las siguientes posibilidades se cumple:
$a = b \lor a < b \lor a > b$

O_2 Orden transitivo: sí $a < b \land b < c \Rightarrow a < c$

O_3 Orden de adición: sí $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O_4 Orden Multiplicativo: sí $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$

En base a estos axiomas daremos las siguientes definiciones:

21.15. DEFINICIÓN.-

i) $a < b \Leftrightarrow b - a$ es positivo.

ii) $a > b \Leftrightarrow a - b$ es positivo.

iii) $a \leq b \Leftrightarrow a = b \lor a < b$

iv) $a \geq b \Leftrightarrow a > b \lor a = b$

21.16. TEOREMA.-

$\forall$ a,b,c,d $\in$ R; Sí $a < c \land b < d \Leftrightarrow a + b < c + d$

<u>Demostración</u>

1° $a < c$ por hipótesis

2° $a + b < b + c$ 1° y O_3.

3° $b < d$ por hipótesis

4° $b + c < c + d$ 3° y O_3

5° $a + b < c + d$ 2°, 4° y O_2

21.17. TEOREMA.-

Para $a,b \in R$, si $a < b \Rightarrow -a > -b$

Demostración

1° $a < b$ por hipótesis

2° $b - a > 0$ 1° y definición 21.15 i.

3° $(b - a) + (-b) > 0 + (-b)$ 2° y O_3

4° $-a + (b + (-b)) > -b$ 3°, A_2 y A_3

5° $-a + 0 > -b$ 4° y A_4

6° $-a > -b$ 5° y A_3

21.18. TEOREMA.-

Sí $a, b, c \in R$, donde $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

Demostración

1° $a < b$ por hipótesis

2° $c < 0$ por hipótesis

3° $-c > 0$ 2° y definición 21.15.i

4° $-a.c < -b.c$ 1°, 3° y O_4 y ejercicio 6

5° $a.c > b.c$ 4° y teorema 21.17

21.19. TEOREMA.-

Para $a \in R$, $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Demostración

1°	$a \neq 0$	por hipótesis
2°	$a > 0 \vee a < 0$	1° y O_1
3°	sí $a > 0 \Rightarrow a.a > 0.a$	2° y O_4
4°	$a^2 > 0$	3° y ejercicio 2
5°	sí $a < 0 \Rightarrow -a > 0$	2° y definición 21.15i
6°	$(-a)(-a) > 0.(-a)$	5° y O_4
7°	$a^2 > 0$	6°, ejercicio 2 y 5

21.20. TEOREMA.-

Para $a \in R$, $a \neq 0$ entonces a^{-1} tiene el mismo signo que "a" es decir:

i) Sí $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ ii) Sí $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

Demostración

Las demostración es por medio del absurdo

i)

1°	$a > 0$	por hipótesis
2°	$a^{-1} < 0$	hipótesis auxiliar
3°	$a.a^{-1} < 0$	1°, 2° y teorema 1.18
4°	$1 < 0$	3° y M_4 es absurdo
5°	$a^{-1} > 0$,	por 2° y 4°
6°	Sí $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$	1° y 5°

ii) Es la recíproca no necesita demostración debido a que: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

21.21. TEOREMA.-

Para a,b ∈ R, donde a y b tienen el mismo signo, sí $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

Demostración

Como a y b tienen el mismo signo entonces se tiene dos casos:

i) $a > 0 \wedge b > 0$ ii) $a < 0 \wedge b < 0$

i) 1° $a < b$ por hipótesis

2° $a > 0 \wedge b > 0$ por hipótesis

3° $a^{-1} > 0 \wedge b^{-1} > 0$ 2°, teorema 21.20

4° $a.a^{-1} < b.a^{-1}$ 3° y 1°; O_4

5° $(a.a^{-1})b^{-1} < (b.a^{-1})b^{-1}$ 3° y 4°; O_4

6° $(a.a^{-1})b^{-1} < (b.b^{-1})a^{-1}$ 5° y M_2

7° $1.b^{-1} < 1.a^{-1}$ 6° y M_4

8° $b^{-1} < a^{-1}$ 7° y M_3

9° sí $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$ 1° y 8°

ii) Su demostración es en forma similar.

21.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Si $a \geq b \geq 0$, Demostrar que: $a^2 \geq b^2$, donde a,b ∈ R.

Demostración

Por hipótesis se tiene $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Como $a \geq b \Rightarrow a + b \geq 2b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$ ... (α)

$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ ... (β)

de (α) y (β) se tiene: $(a+b)(a-b) \geq 0.(a-b)$

de donde $a^2 - b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$ $\therefore$ Sí $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$

(2) Sí $a,b > 0$ y $a^2 > b^2$ demostrar que $a > b$

Demostración

Por hipótesis se tiene $a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$ de donde $(a+b)(a-b) > 0$ ... (α)

como $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a+b > 0$, de donde $\frac{1}{a+b} > 0$ ... (β)

de (α) y (β) se tiene $\frac{(a+b)(a-b)}{a+b} > 0$, de donde $a - b > 0$ entonces $a > b$.

(3) Si $b > a > 0$ y $c > 0$. Demostrar: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

Demostración

Como $b > a > 0 \Rightarrow a.b > 0$ ... (1)

$b > a$ y $c > 0 \Rightarrow b.c > a.c$ ... (2)

en (2) sumando $a.b > 0$ en ambos lados. $a.b + b.c > a.b + a.c$

$b.(a+c) > a.(b+c)$, de donde: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

(4) Si $a,b,c,d > 0$ y $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ Demostrar $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

Demostración

Como $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, donde $b,d > 0 \Rightarrow a.d > b.c$ ... (1)

Además $c > 0$, $d > 0$ entonces $c.d > 0$

Sumando $c.d > 0$, a ambos miembros en (1): $a.d + c.d > b.c + c.d$

d.(a + c) > c.(b + d), de donde: $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

(5) Para a,b,c números reales. Demostrar que $a^2+b^2+c^2 \ge a.b+a.c+b.c$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ a,b \in R,\ (a-b)^2 \ge 0\\ \forall\ a,c \in R,\ (a-c)^2 \ge 0\\ \forall\ b,c \in R,\ (b-c)^2 \ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2+b^2-2a.b \ge 0\\ a^2+c^2-2a.c \ge 0\\ b^2+c^2-2b.c \ge 0\end{array}$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(a.b+a.c+b.c) \ge 0$$

de donde $a^2+b^2+c^2 \ge a.b+a.c+b.c$

(6) ∀ a,b ∈ R^+, demostrar que $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$

Demostración

Como a,b ∈ R^+ $\Rightarrow$ $\sqrt{a}-\sqrt{b} \in$ R

Sí $\sqrt{a}-\sqrt{b} \in$ R $\Rightarrow$ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$, de donde $a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$$

(7) Demostrar que sí a < b, Entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

Demostración

Como a < b ⇒ a + a < a + b ⇒ 2a < a + b ... (1)

a < b ⇒ a + b < b + b ⇒ a + b < 2b ... (2)

de (1) y (2) por transitividad se tiene: 2a < a + b < 2b $\quad \therefore \quad a < \frac{a+b}{2} < b$

(8) Demostrar que sí, $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, entonces: 1 ≥ a.c + b.d, para a,b,c,d ∈ R

Demostración

$\forall$ a,c $\in$ R, $(a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+c^2 \geq 2a.c$ ... (1)

$\forall$ b,d $\in$ R, $(b-d)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2+d^2 \geq 2b.d$ ... (2)

sumando (1) y (2) se tiene: $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(a.c+b.d)$

$2 \geq 2(a.c+b.d)$ $\therefore$ $1 \geq a.c+b.d$

(9) $\forall$ a,b,c,d $\in R^+$ y n $\in Z^+$, demostrar que: $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4(abcd)^{n/2}$

Demostración

a,b $\in R^+ \Rightarrow a^n, b^n \in R^+$, pero $a^n - b^n \in$ R, entonces:

$(a^n-b^n)^2 \geq 0 \Rightarrow a^{2n}+b^{2n} \geq 2a^n b^n$ ... (1)

c,d $\in R^+ \Rightarrow c^n, d^n \in R^+$, pero $c^n - d^n \in$ R, entonces:

$(c^n-d^n)^2 \geq 0 \Rightarrow c^{2n}+d^{2n} \geq 2c^n d^n$ ... (2)

Sumando (1) y (2) se tiene: $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 2(a^n b^n + c^n d^n)$ ... (3)

$(\sqrt{a^n b^n} - \sqrt{c^n d^n})^2 \geq 0 \Rightarrow a^n b^n + c^n d^n \geq 2\sqrt{a^n b^n c^n d^n}$ ... (4)

$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4\sqrt{a^n b^n c^n d^n}$

$\therefore$ $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4(abcd)^{n/2}$

(10) Si a + b + c = 1, donde a;b,c > 0, Demostrar que (1 – a)(1 – b)(1 – c) ≥ 8abc

Demostración

Como a,b,c > 0 $\Rightarrow$ $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} > 0$ entonces:

$$\begin{cases}\sqrt{b}-\sqrt{c}\in R\\ \sqrt{a}-\sqrt{c}\in R\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\in R\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+c\geq 2\sqrt{bc}\\ a+c\geq 2\sqrt{ac}\\ a+b\geq 2\sqrt{ab}\end{cases}$$

$$(b+c)(a+c)(a+b)\geq 8abc \qquad \ldots (1)$$

Pero sí $a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases}1-a=b+c\\ 1-b=a+c\\ 1-c+a+b\end{cases}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$

(11) Si $a,b,c,d\in R^{+}$, Demostrar que: $(ab+cd)(ac+bd)\geq 4abcd$

Demostración

Como $a,b,c,d\in R^{+} \Rightarrow ab\geq 0,\ cd\geq 0,\ ac\geq 0,\ bd\geq 0$

De donde $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\in R$ y $\sqrt{ac}-\sqrt{bd}\in R$, entonces:

$$\begin{cases}(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2\geq 0\\ (\sqrt{ac}-\sqrt{bd})^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab+cd\geq 2\sqrt{abcd}\\ ac+bd\geq 2\sqrt{abcd}\end{cases}$$

multiplicando se tiene: $(ab+cd)(ac+bd)\geq 4abcd$

(12) Sean $a,b,c,d\in R^{+}$ tal que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, demostrar que: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Demostración

Como $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow a.d<b.c$ por que $b,d\in R^{+}$ $a.d<b.c$, sumando a.b, a ambos miembros $ad+ab<bc+ab$, factorizando

$a(b+d)<b(a+c)$, de donde $\boxed{\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}}$ ... (1)

En $ad<bc$ sumando cd, a ambos miembros $ad+cd<bc+cd$,

Factorizando d(a + c) < c(b + d), de donde: $\boxed{\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}}$ ... (2)

De (1) y (2) se tiene: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \wedge \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

De donde por transitividad se tiene: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

(13) Si a,b,c y d, son números reales cualesquiera. Demostrar que: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$

Demostración

Como a,b,c,d ∈ R ⇒ $a^2, b^2, c^2, d^2 \in R$, además:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 \in R \\ c^2 - d^2 \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a^2 - b^2)^2 \geq 0 \\ (c^2 - d^2)^2 \geq 0 \end{matrix}$$

de donde al efectuar se tiene: $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$ ... (1)

$c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2$ ... (2)

Sumando (1) y (2) miembro a miembro se tiene:

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2(a^2b^2 + c^2d^2)$ ... (3)

Como ab, cd ∈ R ⇒ ab − cd ∈ R, entonces: $(ab - cd)^2 \geq 0$ de donde $a^2b^2 + c^2d^2 \geq 2abcd \Rightarrow 2(a^2b^2 + c^2d^2) \geq 4abcd$ ... (4)

de (3) y (4) por transitividad se tiene: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$

(14) Si a > 0, a ∈ R, demostrar que: $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Demostración

Como a > 0 ⇒ $\sqrt{a} > 0$, de donde $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \in R$ por lo tanto

$(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$, desarrollando se tiene: $a-2+\frac{1}{a}\geq 0$ de donde $a+\frac{1}{a}\geq 2$

(15) Si a,b,c, $\in R^+$, demostrar que: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

Demostración

Por hipótesis se tiene que a,b,c > 0, entonces

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$ entonces aplicando el ejercicio 14).

Se tiene: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ ... (1)

Ahora a (1) multiplicamos por c, a, b respectivamente.

$$\begin{cases}\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geq 2c\\ \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\geq 2a\\ \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b\end{cases} \Rightarrow 2\frac{ac}{b}+2\frac{bc}{a}+2\frac{ab}{c}\geq 2c+2a+2b$$

$2(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})\geq 2(a+b+c)$ $\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

(16) Si $a\geq 0$, $b\geq 0$, demostrar que: $\frac{a+b}{a+b+1}\leq\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$

Demostración

Como $a\geq 0, b\geq 0$, entonces $a+1\geq 1$, $b+1\geq 1$ luego se tiene:

$$\begin{cases}a+1\geq 1\\ b+1\geq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b+1\geq b+1\\ a+b+1\geq a+1\end{cases}$$

ahora invirtiendo cada una de las desigualdades: $\frac{1}{a+b+1}\leq\frac{1}{b+1}$ y $\frac{1}{a+b+1}\leq\frac{1}{a+1}$

multiplicando a las desigualdades por a y b respectivamente.

$$\frac{a}{a+b+1} \le \frac{a}{b+1} \quad y \quad \frac{b}{a+b+1} \le \frac{b}{a+1}$$

Sumado estas dos desigualdades se tiene: $\frac{a+b}{a+b+1} \le \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}$

(17) Si a,b $\in$ R, b $\neq 0$, demostrar que: $\frac{1}{a^2+ab+b^2} \le \frac{4}{3b^2}$

Demostración

Completando cuadrado en a^2+ab+b^2 se tiene: $a^2+ab+b^2 = (a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}$ ... (1)

Como a,b $\in$ R $\Rightarrow$ $a+\frac{b}{2} \in$ R, de donde $(a+\frac{b}{2})^2 \ge 0$

Sumando $\frac{3b^2}{4}$ se tiene: $(a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \ge \frac{3b^2}{4}$ ... (2)

Ahora de (1) y (2) se tiene.

$a^2+ab+b^2 \ge \frac{3b^2}{4}$ como b $\neq 0$ invertimos $\frac{1}{a^2+ab+b^2} \le \frac{4}{3b^2}$

(18) Si a > 0 y b < 0, Demostrar que: $\frac{b+1}{a} < \frac{1}{a}$

Demostración

Como a > 0, b < 0 $\Rightarrow$ ab < 0, sumando "a" a ambos miembros se tiene:

a + b.a < a, de donde a(b + 1) < a ... (1)

Como a > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{a^2} > 0$, ahora multiplicamos a (1) por $\frac{1}{a^2}$

Obteniéndose $\frac{a(b+1)}{a^2} < \frac{a}{a^2}$ simplificando $\therefore \frac{b+1}{a} < \frac{1}{a}$

(19) Si $a > 0, b > 0$ tal que $a + b = 1$, demostrar que: $ab \le \frac{1}{4}$

Demostración

Como $a > 0, b > 0 \Rightarrow a - b \in R$, de donde:

$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$ sumando 4ab.

$a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$ de donde: $(a+b)^2 \ge 4ab$

pero como $a + b = 1$, se tiene $1 \ge 4ab$, por lo tanto $ab \le \frac{1}{4}$

(20) Sí $a > 0, b > 0, 3a \ne 5b$, demostrar que: $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$

Demostración

Como $3a \ne 5b \Rightarrow 3a - 5b \ne 0$ y $3a - 5b \in R$ entonces $(3a-5b)^2 > 0$

Desarrollando se tiene: $9a^2 - 30ab + 25b^2 > 0$

Sumando 30ab, a ambos miembros: $9a^2 + 25b^2 > 30ab$ multiplicando por $\frac{1}{15ab}$

$\frac{9a^2 + 25b^2}{15ab} > \frac{30ab}{15ab}$, de donde: $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$

21.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Si a y b son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) \ge 4$

(2) Si a, b, c son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(a+b+c) \ge 9$

(3) Si a, b, c, d son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})(a+b+c+d) \ge 16$

(4) Si a y b dos números reales positivos tal que $a \geq b$, demostrar que: $\frac{a}{b}+\frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2}+3$

(5) $\forall a \in R$, $a \neq 0$, demostrar que: $a^2+\frac{9}{a^2} \geq 6$

(6) Si $a,b,c \in R^+$, demostrar que: $(b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc$

(7) Si $a,b \in R$, demostrar que: $a^3b+ab^3 \leq a^4+b^4$

(8) Si $a,b,c \in R$, demostrar que: $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$

(9) Si $0 < a < 1$, demostrar que $a^2 < a$

(10) Si a, b, c son números reales positivos y $\frac{d}{a} < \frac{e}{b} < \frac{f}{c}$. Demostrar que: $\frac{d}{a} < \frac{d+e+f}{a+b+c} < \frac{f}{c}$

(11) Demostrar que si a,b,c son números positivos y no iguales entre si, entonces: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > 9abc$

(12) Si a,b,c son números positivos y no iguales entre si. Demostrar que: $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) > 9$

(13) Si a y b son números reales diferentes de cero. Demostrar que: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{16b^2}{a^2}+24 \geq \frac{8a}{b}+\frac{32b}{a}$

(14) Si $a^2+b^2=1$. Demostrar que: $-\sqrt{2} \leq a+b \leq \sqrt{2}$

Sug. $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

(15) Si $a+b=c$, $a>0$, $b>0$, demostrar que: $a^{2/3}+b^{2/3} > c^{2/3}$

(16) Si $a+b \geq c > 0$, demostrar que: $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$

(17) Si a,b,c ≥ 0, demostrar que: $3abc \leq a^3+b^3+c^3$

(18) Si $c>0$, $d>0$, $2d \neq 3c$, demostrar que: $\frac{d}{3c} > 1-\frac{3c}{4d}$

(19) Si $a>0$, $b>0$, $a \neq b$, demostrar que: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} > 2$

(20) Si a, b, c $\in$ R, demostrar que: $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$

(21) Sea $a+b=2$, donde a y b son números reales, demostrar que: $a^4+b^4 \geq 2$

(22) Si $a^2+b^2+c^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=1$, demostrar que: $ax+by+cz \leq 1$

(23) Si $a>0$, $b>0$, demostrar que: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

(24) Si $0<a<1$, demostrar que: $a^2<a$

(25) Si $a, b>0$, demostrar que: $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

(26) Si $a>0$, $b>0$, demostrar que: $\frac{a^3+b^3}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^3$

(27) Si $a>0$, $a \neq 1$, demostrar que: $a^3+\frac{1}{a^3} > a^2+\frac{1}{a^2}$

(28) Si $a>0$ y $b>0$, demostrar que: $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$

(29) Si a y b son números reales, demostrar que: $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

(30) Si a,b,c $\in R^+$, demostrar que: $(a+b+c)^3 \geq 27abc$

(31) Si a,b,c y d son números reales cualesquiera. Demostrar $(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$

(32) Si a,b ∈ R, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4$

(33) Si a > 0 y b > 0, demostrar que: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{1}{2}(\frac{(a+b)^2+4}{a+b})^2$

(34) Si a > 0, b > 0 tal que a + b = 1, demostrar que: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$

(35) Si a, b, c, d ∈ R, demostrar que: $ac+bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

(36) Si a, b ∈ R tal que a + b = 1, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$

(37) Si a, b ∈ R tal que a + b = 3, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{81}{8}$

(38) Si a, b, c, d ∈ R^+, demostrar que: $\frac{1}{4}(a+b+c+d) \geq \sqrt[4]{abcd}$

(39) Si $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n \in R$ tal que: $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=1$, $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2=1$, demostrar que: $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \leq 1$

(40) Demostrar que si -1 < a < 0 entonces $a^3 > a$

(41) Si -a > 0 y $(a-b)^2 > (a+b)^2$, entonces b >0

(42) Si a, b ∈ R, tal que 2a + 4b = 1, Demostrar que: $a^2+b^2 \geq \frac{1}{20}$

(43) Si a > 0, b > 0 ⇒ $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

(44) Si $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ y si $\beta=\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$ y $\alpha=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$, demostrar que: β ≤ α.

(45) Si a,b,c,m,n,p ∈ R / m > 0, n > 0, p > 0: $\frac{a}{m}<\frac{b}{n}<\frac{c}{p}$ entonces: $\frac{a}{m}<\frac{b+a+c}{m+n+p}<\frac{c}{p}$

(46) Probar que si $a_1 < a_2 < ... < a_n$ entonces $a_1 < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} < a_n$

(47) Demostrar que si $0 < a < b < c$ entonces: $\frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} < a+b+c$

(48) Probar que: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4|abcd|$ para a,b,c,d ∈ R

(49) Si a,b,c > 0, demostrar que: $2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b+c) + ac(c+a) + ab(a+b)$

(50) Demostrar que: $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a+b+c)$ ∀ a,b,c ∈ R

(51) ∀ x ∈ R y n par, demostrar que: $\frac{x^n}{x^{2n}+1} \leq \frac{1}{2}$

(52) Demostrar que si $r > 0$ y $a < b$ entonces $a < \frac{a+br}{1+r} < b$

(53) Si a y b son números positivos y distintos, demostrar que: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(54) Consideremos x, y, z, w números reales, demostrar que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq \frac{2}{3}(xy + xz + xw + yz + yw + zw)$$

(55) Si a y b son números desiguales positivos demostrar que: $a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$

(56) Si a,b y c son números positivos distintos. Demostrar que: $(a+b+c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$

(57) Si a y b son números positivos distintos, demostrar que: $(a^3 + b^3)(a+b) > (a^2 + b^2)^2$

(58) Si x,y son números distintos, demostrar que: $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) > (x^3 + y^3)^2$

(59) Si x,y,z son números positivos distintos, demostrar que:

$xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) > 6xyz$

(60) Demostrar que: $a \le b < 1 \Rightarrow \frac{a-2}{a-1} \le \frac{b-2}{b-1}$

(61) Sean a,b,c,x,y,z números positivos distintos, demostrar que:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) > (ax+by+cz)^2$

(62) Demostrar que: $0 < d < c \Rightarrow \frac{c^3}{3} - \frac{d^3}{3} > d^2(c-d)$

(63) Sí $0 \le d < c$ demostrar que: $d^3(c-d) < \frac{c^4}{4} - \frac{d^3}{3} < c^2(c-d)$

(64) Si $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, demostrar que:

a) $xyz = 1 \Rightarrow x + y + z \ge 3$

b) $xyz = 1 \wedge x + y + z = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

(65) Demostrar que: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3$ (sug: $\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x} = 1$ y ejercicio 64)

(66) Demostrar para todo a y b real $\sqrt[3]{ab} \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{a^2+b^2}$

(67) Si x e y ∈ R, demuestre que: $|x| + |y| \ge |x+y|$

(68) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^+$ tal que $x_1.x_2 \ldots x_n = 1$. Entonces $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge 1$

(69) Si a,b ∈ R, demostrar que: $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$

(70) Si $a > 0$, probar que: $\frac{x^2+1+a}{\sqrt{x^2+a}} \ge a+1$

(71) Si a,b,c ∈ R^+, y si $a^2+b^2+c^2 = 8$, demostrar que: $a^3+b^3+c^3 \ge 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

(72) Si $a > 0$, $b > 0$, demostrar que: $(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})(a^2+b^2) \ge 4$

(73) Demostrar que sí a,b,c nos números reales positivos entonces $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

(74) Sí $\forall$ a,b$\in$ R tal que $a \geq 0 \wedge b > 0$ y $a \leq x^2 < b \Rightarrow \sqrt{a} \leq x < \sqrt{b} \vee -\sqrt{b} < x \leq -\sqrt{a}$

(75) Si $x_1, x_2, ..., x_n \in$ R, tal que $x_1.x_2....x_n = 1$. Demostrar que $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$

(76) Si $a, b \in R^+$, Demostrar que $(a^2 + b^2)(a+b)^2 \geq 8a^2b^2$

(77) Si a + b + c = 0, Demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

(78) Si $a, b \in R^+$, Demostrar que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$

21.24. INECUACIONES.-

a) **DEFINICIÓN.-** Una inecuación es una desigualdad en las que hay una o más cantidades desconocidas (incógnita) y que sólo se verifica para determinados valores de la incógnita o incógnitas.

Ejemplo.- La desigualdad: 2x + 1 > x + 5, es una inecuación por que tiene una incógnita "x" que se verifica para valores mayores que 4.

b) **INTERVALOS.-** Los intervalos son sub-conjuntos de los números reales que sirven para expresar la solución de las inecuaciones, estos intervalos sé representan gráficamente en la recta numérica real.

Consideremos los siguientes tipos de intervalos:

i) **Intervalo cerrado.-** [a,b]

[a,b] = {x ∈ R / a ≤ x ≤ b}



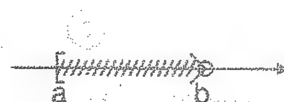
ii) **Intervalo abierto.-** <a,b>

<a,b> = {x ∈ R / a < x < b}



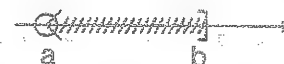
iii) Intervalo cerrado en a y abierto en b.-

$[a,b> = \{x \in R / a \leq x < b\}$



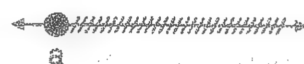
iv) Intervalo abierto en a y cerrado en b.-

$<a,b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$

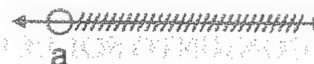


v) Intervalo infinitos.-

$[a,+\infty> = \{x \in R / x \geq a\}$



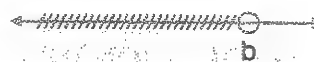
$<a,+\infty> = \{x \in R / x > a\}$



$<-\infty,b] = \{x \in R / x \leq b\}$



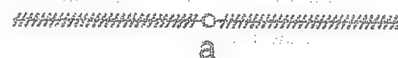
$<-\infty,b> = \{x \in R / x < b\}$



$<-\infty,+\infty> = \{x/x \in R\} = R$



$<-\infty, a> \cup <a,+\infty> = \{x \in R / x \neq a\}$



Nota.- (1) $\text{Sí } x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

Ejemplo.- Demostrar que: sí $x \in [2,4]$ entonces $2x + 3 \in [7,11]$

Desarrollo

$x \in [2,4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$, multiplicando por 2

$4 \leq 2x \leq 8$, sumando 3

$7 \leq 2x + 3 \leq 11$

Sí $7 \leq 2x + 3 \leq 11 \Rightarrow 2x + 3 \in [7,11]$

Por lo tanto, sí $x \in [2,4] \Rightarrow 2x + 3 \in [7,11]$

② Sí $x \in \langle a,b\rangle \Leftrightarrow a < x < b$

Ejemplo.- Demostrar que: Sí $2x - 6 \in \langle -4,4\rangle \Rightarrow x \in \langle 1,5\rangle$

Desarrollo

$2x - 6 \in \langle -4,4\rangle \Rightarrow -4 < 2x - 6 < 4$, sumando 6

$2 < 2x < 10$ dividiendo entre 2

$1 < x < 5$, entonces $x \in \langle 1,5\rangle$

Por lo tanto, sí $2x - 6 \in \langle -4,4\rangle \Rightarrow x \in \langle 1,5\rangle$

21.25. CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN.-

Se llama conjunto solución de una inecuación a todos los números reales que la verifiquen, es decir, que dichos números reales dan la desigualdad en el sentido prefijado.

21.26. RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN.-

El resolver una inecuación consiste en hallar un conjunto solución; es decir, encontrar el intervalo donde están los valores que puede tomar la incógnita para que verifique la inecuación.

21.27. INECUACIÓN DE PRIMER GRADO EN UNA INCÓGNITA.-

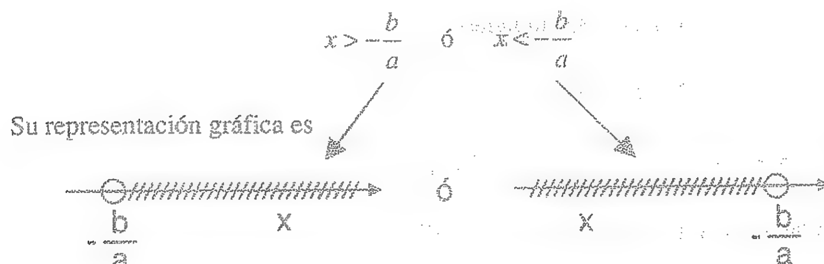
Las inecuaciones de primer grado en una incógnita, son de la forma:

$$ax + b > 0 \quad ó \quad ax + b < 0, \quad a \neq 0$$

Para resolver estas inecuaciones se debe considerar $a > 0$, es decir, sí $a > 0$, entonces:

$$x > -\frac{b}{a} \quad ó \quad x < -\frac{b}{a}$$

Su representación gráfica es



Luego la solución es dado en la forma: $x \in \langle -\frac{b}{a}, +\infty \rangle$ ó $x \in \langle -\infty, -\frac{b}{a} \rangle$

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones.

(1) $3x - 4 < x + 6$

Desarrollo

Las inecuaciones de primer grado en una incógnita, se resuelve, expresando la inecuación en la forma:

En un sólo miembro se pone la incógnita, en el otro miembro los números, es decir:

$3x - x < 6 + 4$, simplificando se tiene: $2x < 10$ de donde $x < 5$, es decir: $x \in \langle -\infty, 5 \rangle$



La solución es: $x \in \langle -\infty, 5 \rangle$

(2) $3(x - 4) + 4x < 7x + 2$

Desarrollo

Poniendo en un sólo miembro la incógnita y en el otro miembro los números:

$3x - 12 + 4x < 7x + 2 \Rightarrow 3x + 4x - 7x < 2 + 12$ simplificando $0 < 14$

esta desigualdad obtenida es cierta, entonces la solución de la inecuación dada , es el conjunto de todos los números reales ($x \in \mathbb{R}$).

(3) $5x - 4(x + 5) < x - 24$

Desarrollo

En forma análoga a los ejemplos anteriores en un sólo miembro ponemos las incógnitas y en el otro miembro los números: $5x - 4x - x < -24 + 20$ simplificando $0 < -4$

Como la desigualdad obtenida no es correcta, entonces no hay ningún valor de x, que verifique que la inecuación dada. Por lo tanto la solución es el vacío (ϕ).

(4) $2 \le 5 - 3x \le 11$

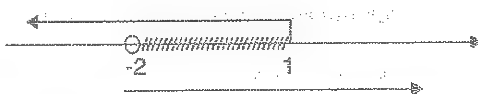
Desarrollo

Aplicando la propiedad de transitividad: $a \le b < c \Leftrightarrow a \le b \wedge b < c$

$2 \leq 5-3x < 11 \iff 2 \leq 5-3x \wedge 5-3x < 11$

$\iff 3x \leq 5-2 \wedge 5-11 < 3x$

$\iff x \leq 1 \wedge -2 < x$



La solución es: $x \in \langle -2, 1]$

21.28. INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UNA INCÓGNITA.-

Las inecuaciones de segundo grado en una incógnita son de la forma:

$$ax^2+bx+c>0 \text{ ó } ax^2+bx+c<0,\ a\neq 0$$

donde a,b,c ∈ R, siendo $a \neq 0$, la solución de estas inecuaciones, se obtiene mediante las propiedades de los números reales ó también por medio de la naturaleza de las raíces del trinomio $ax^2+bx+c=0$.

a) **CARÁCTER DE LAS RAICES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.**

Consideremos el trinomio de segundo grado

$$ax^2+bx+c=0,\ \text{con } a>0 \qquad \ldots (1)$$

al analizar el valor numérico de la ecuación (1) dando valores reales a "x" se presentan tres casos:

1° Caso.- Si $\Delta = b^2-4ac>0$, entonces hay dos valores reales diferentes $r_1<r_2$ que anulan el trinomio $ax^2+bx+c=0$.

Es decir: $a(x-r_1)(x-r_2)=0$, si se hace variar x a lo largo de la recta real resulta:

i) Cuando x toma valores menores que r_1, los factores $(x-r_1)$ y $(x-r_2)$ son negativos, luego el trinomio ax^2+bx+c, tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

ii) Cuando x toma valores intermedio entre r_1 y r_2; entonces el factor $(x-r_1)$ es positivo y el factor $(x-r_2)$ es negativo, luego el trinomio ax^2+bx+c, tiene signo opuesto del coeficiente de "a".

iii) Cuando x toma valores mayores que r_2, entonces los factores $(x-r_1)$, $(x-r_2)$ son positivos, luego el trinomio ax^2+bx+c, tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

2° Caso.- Si $\Delta=b^2-4ac=0$, entonces hay un solo valor real $r_1=r_2=r$, que anulan el trinomio ax^2+bx+c, luego como $(x-r)^2$ es positivo, el signo del trinomio ax^2+bx+c es el mismo del coeficiente de "a".

3° Caso.- Si $\Delta=b^2-4ac<0$, entonces se tiene dos valores no reales $r_1=\alpha+\beta i$ y $r_2=\alpha-\beta i$ que anulan el trinomio ax^2+bx+c, y para cualquier valor de x, el trinomio: ax^2+bx+c tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

NOTA.- Sí $ax^2+bx+c=0$ entonces $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

b) RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.-

Para resolver una inecuación cuadrática de las formas $ax^2+bx+c>0$ ó $ax^2+bx+c<0$, donde a,b,c $\in$ R, a $\neq$ 0, por medio de la naturaleza de las raíces primero se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$, y de acuerdo a la naturaleza de las raíces se presenta tres casos:

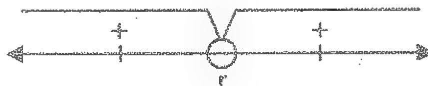
1° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene dos raíces reales diferentes $r_1<r_2$.



i) Si la inecuación es de la forma $ax^2+bx+c>0$, con a > 0, la solución es todos los valores de x que pertenecen al intervalo $<-\infty,r_1>\ U\ <r_2,+\infty>$.

ii) Si la inecuación es de la forma $ax^2+bx+c<0$ con a > 0, la solución es todos lo valores de x que pertenece al intervalo $<r_1,r_2>$.

2° Caso.- Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene una raíz real única $r_1 = r_2 = r$.



i) Si la inecuación es de la forma: $ax^2 + bx + c > 0$, con a > 0.

La solución es todos los valores de x ≠ r, es decir: $x \in \langle -\infty, r \rangle \cup \langle r, +\infty \rangle$

ii) Si la inecuación es de la forma: $ax^2 + bx + c < 0$, con a > 0.

No se verifica para ningún valor real de x.

3° Caso.- Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos raíces no reales.

i) Si la inecuación es de la forma: $ax^2 + bx + c > 0$, con a > 0.

La solución es todos los valores reales de x.

ii) Si la inecuación es de la forma: $ax^2 + bx + c < 0$, con a > 0.

No se verifica para ningún valor real de x.

RESUMIENDO EN EL SIGUIENTE CUADRO.

Forma de la Inecuación	Raíces de la Ecuación $ax^2 + bx + c = 0$	Conjunto Solución
$ax^2 + bx + c > 0$, a > 0	Raíces diferentes $r_1 < r_2$	$< -\infty, r_1 > U < r_2, +\infty >$
	Raíz Real Única r	R − {r}
	Raíces no reales	R
$ax^2 + bx + c < 0$, a > 0	Raíces diferentes $r_1 < r_2$	$< r_1, r_2 >$
	Raíz Real Única	φ
	Raíces no reales	φ

NOTA.- Presentaremos las propiedades que nos permitan con suma facilidad resolver inecuaciones cuadráticas: $P(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$ de discriminante $\Delta > 0$

① Demostrar que: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b \geq 0$

Demostración

i) Si $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$ por demostrar

Si $a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$ de donde se tiene: $(a + b)(a - b) > 0$ ... (1)

como $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ de donde $\frac{1}{a+b} > 0$ ... (2)

de (1) y (2) se tiene $\frac{(a+b)(a-b)}{a+b} > 0$, de donde $a - b > 0$ entonces $a > b$

ii) Si $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ por demostrar

por hipótesis $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$

como $a > b \Rightarrow a + b > 2b \geq 0 \Rightarrow a + b > 0$ ... (3)

$a < b \Rightarrow a - b > 0$ ... (4)

Luego de (3) y (4) se tiene: $(a + b)(a - b) > 0$ de donde $a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

Por lo tanto de i) y ii) se concluye: $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

② $\forall\, b \geq 0$. Demostrar que: $a^2 > b \Leftrightarrow (a < -\sqrt{b} \vee a > \sqrt{b})$

Demostración

Para la demostración consideremos dos casos: $a \geq 0 \vee a < 0$

i) Para $a \geq 0$, tenemos:

$a^2 > b \Leftrightarrow a^2 > \sqrt{b}^2$ aplicando la propiedad anterior

$\Leftrightarrow a > \sqrt{b}$

ii) Para $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, además $a^2 = (-a)^2$

entonces $(-a)^2 > b \Leftrightarrow (-a)^2 > \sqrt{b}^2$, por la propiedad anterior

$$\Leftrightarrow -a > \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow a < -\sqrt{b}$$

como se ha considerado los dos casos, entonces de i) y ii) se concluye que:

$$a^2 > b \Leftrightarrow (a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b})$$

(3) $\forall$ b >0. Demostrar que: $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

Demostración

Para la demostración consideremos dos casos: $a \geq 0 \vee a < 0$

i) Para $a \geq 0 \wedge b > 0$, entonces

$$a^2 < b \Leftrightarrow a^2 < (\sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \sqrt{b}^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) < 0, \text{ como } a+\sqrt{b} > 0$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{b} > 0 \wedge a-\sqrt{b} < 0 \text{ (signos diferentes)}$$

$$\Leftrightarrow a > -\sqrt{b} \wedge a < \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow a > -\sqrt{b} \wedge a < \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

ii) Si $(a < 0 \wedge b > 0) \Leftrightarrow (-a > 0 \wedge b > 0)$

$$\Leftrightarrow -a + \sqrt{b} > 0$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{b} < 0$$

como de $a^2 < b$ se tiene $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) < 0$

Luego $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a+\sqrt{b} > 0 \wedge a-\sqrt{b} < 0$

$$\Leftrightarrow a > -\sqrt{b} \wedge a < \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

OBSERVACIÓN.- Como resultado de las propiedades anteriores de los números reales para resolver inecuaciones cuadráticas, tenemos el método de los puntos críticos, que es más práctico y solo se utiliza cuando el discriminante de $P(x) = ax^2 + bx + c \underset{<}{\geq} 0$ es positiva $(\Delta > 0)$.

Los pasos a seguir son:

i) Se encuentra los dos puntos críticos, luego se ordenan en la recta real en forma creciente.

ii) Los puntos críticos determinan un intervalo en la recta real y en dichos intervalos se colocan los signos (+) y (-) en forma alternada de derecha a izquierda empezando con el signo (+).

iii) Si tenemos $P(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ $(a > 0 \wedge \Delta > 0)$ el conjunto solución esta formado por los intervalos donde aparece el signo (+) de igual manera para el caso $P(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$ $(a > 0 \wedge \Delta > 0)$ el conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparece el signo (-).

Ejemplos.- Resolver las inecuaciones:

① $x^2 + 8x - 65 < 0$

Desarrollo

Completando cuadrados: $x^2 + 8x + 16 < 65 + 16$

$(x+4)^2 < 81$ aplicando $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

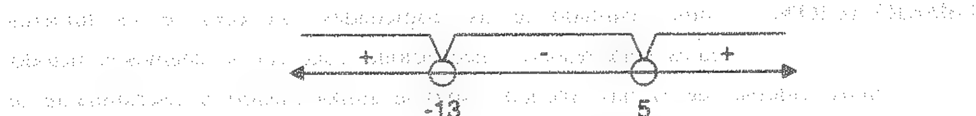
$(x+4)^2 < 81 \iff -\sqrt{81} < x+4 < \sqrt{81}$

$\iff -9 < x+4 < 9$

$\iff -13 < x < 5$. Luego la solución es $x \in \langle -13,5 \rangle$

Ahora aplicando los puntos críticos: $x^2+8x-65=0 \Rightarrow (x+13)(x-5)=0$

de donde $x_1=-13$, $x_2=5$ puntos críticos



como $x^2+8x-65<0$ la solución es $x \in \langle -13,5 \rangle$

(2) $x^2-3x+2>0$

Desarrollo

Completando cuadrados se tiene: $x^2-3x+\frac{9}{4} > -2+\frac{9}{4}$, de donde

$(x-\frac{3}{2})^2 > \frac{1}{4} \iff x-\frac{3}{2} > \sqrt{\frac{1}{4}} \vee x-\frac{3}{2} < -\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\iff x-\frac{3}{2} > \frac{1}{2} \vee x-\frac{3}{2} < -\frac{1}{2}$

$\iff x > \frac{3}{2}+\frac{1}{2} \vee x < \frac{3}{2}-\frac{1}{2}$

$\iff x > 2 \vee x < 1$

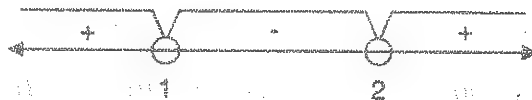


La solución es $x \in \langle -\infty,1 \rangle \cup \langle 2,+\infty \rangle$

La otra forma de obtener la solución es por el método de los puntos críticos

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0$, de donde

$x_1=1$; $x_2=2$ son los puntos críticos



como $x^2-3x+2>0$, de acuerdo al criterio establecido la solución es:

$$x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

(3) $2x^2-x-10>0$

a) $\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle \frac{5}{2},\infty\rangle$ b) $\langle -\infty,-2\rangle$ c) $\langle \frac{5}{2},\infty\rangle$

d) $\langle -2,\frac{5}{2}\rangle$ e) ϕ

Desarrollo

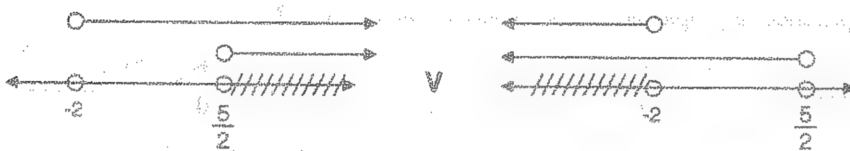
Resolveremos la inecuación usando propiedades de los números reales:

$$a.b>0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$$

$2x^2-x-10>0 \Rightarrow (x+2)(2x-5)>0$

$(x+2)(2x-5)>0 \Leftrightarrow (x+2>0 \wedge 2x-5>0) \vee (x+2<0 \wedge 2x-5<0)$

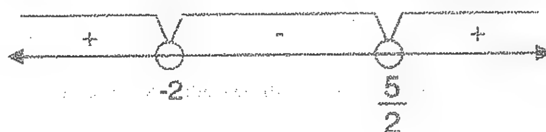
$\Leftrightarrow (x>-2 \wedge x>5/2) \vee (x<-2 \wedge x<5/2)$



La solución es: $x \in \langle -\infty,-2\rangle U \langle \frac{5}{2},+\infty\rangle$ cuya respuesta es a

Otra forma de resolver esta inecuación, es por la naturaleza de sus raíces de la ecuación $2x^2-x-10=0$, de donde $r_1=-2$, $r_2=\frac{5}{2}$, luego $r_1<r_2$ y como $2x^2-x-10>0$, de acuerdo al cuadro la solución es:

$x \in <-\infty,-2> U <\frac{5}{2},+\infty>$



(4) $x^2+20x+100>0$

a) <-∞,-10> b) <-10,∞> c) R – {0} d) R e) ϕ

Desarrollo

Mediante propiedad de los números reales se tiene:

$x^2+20x+100>0 \Rightarrow (x+10)^2>0$ entonces:

$\forall$ x ∈ R; x ≠ -10, $(x+10)^2>0$, por lo tanto la solución es; x ∈ R – {-10}

Ahora veremos de acuerdo a la naturaleza de las raíces:

$x^2+20x+100=0 \Rightarrow r=-10$, multiplicidad 2, y como $x^2+20x+100>0$, de acuerdo al cuadro de solución es: x ∈ R – {-10}. Luego la respuesta es **c**

(5) $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0$

a) R b) ϕ c) $<-\infty,-\frac{3}{10}>$ d) $<-\frac{3}{10},\infty>$ e) $<-\frac{3}{10},\frac{3}{10}>$

Desarrollo

Aplicando la propiedad de los números reales: $\forall$ x ∈ R, $x^2 \geq 0$

luego $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0 \Rightarrow (x+\frac{3}{10})^2<0$ pero $(x+\frac{3}{10})^2 \geq 0$, entonces no existe ningún valor real para x que verifique a la inecuación, es decir: ϕ.

Ahora resolvemos mediante la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}=0$, de donde $r=-\frac{3}{10}$ de multiplicidad dos, pero se tiene que $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0$ y de acuerdo al cuadro la solución es: ϕ. La respuesta es **b**

21.29. INECUACIONES POLINÓMICAS.-

Una inecuación polinómica en una incógnita, es de la forma siguiente:

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \geq 0 \quad ó \quad P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \leq 0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$, $n \in Z^+$

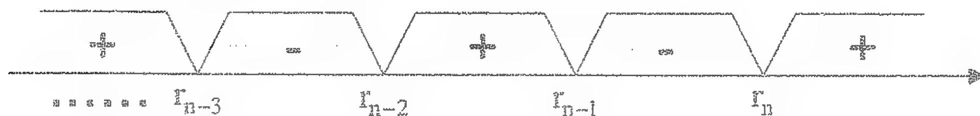
a) RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN POLINÓMICA.-

Una inecuación polinómica de la forma P(x) ≥ 0 ó P(x) ≤ 0, se resuelve de acuerdo a la naturaleza de sus raíces de la ecuación polinómica P(x) = 0, en una forma sencilla y rápida, considerando $a_n > 0$.

Para esto hallaremos primero las raíces del polinomio $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$, y como éste polinomio es de grado n entonces tiene n raíces, lo cual pueden ser reales diferentes, reales de multiplicidad y no reales.

1° Caso.- Cuando las raíces de la ecuación polinómica p(x) = 0, son reales diferentes. Es decir: $r_1 < r_2 < ... < r_{n-1} < r_n$

a) En los intervalos consecutivos determinados por las raíces del polinomio P(x) = 0, se alternan los signos "+" y "–" reemplazando por asignar el signo (+) al intervalo $[r_n, \infty >$.



b) Si la inecuación polinómica es de la forma: $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \geq 0$, $a_n > 0$; al conjunto solución será la unión de los intervalos a los cuales se le ha asignado el signo "+".

c) Si la inecuación polinómica es de la forma: $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \leq 0$, $a_n > 0$; el conjunto solución, será la unión de los intervalos a los cuales se le ha asignado el signo "-".

Ejemplo: Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 > 0$

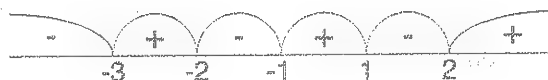
Desarrollo

Expresamos el 1° miembro de la inecuación en forma factorizada

$(x + 3)(x + 2)(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$

1	3	-5	-15	4	12	1
	1	4	-1	-16	-12	
1	4	-1	-16	-12	0	2
	2	12	22	12		
1	6	11	6	0		-1
	-1	-5	-6			
1	5	6	0			-2
	-2	-6				
1	3	0				-3
	-3					
1	0					

Luego las raíces son: $r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$



Como P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+).

Es decir: x ∈ <-3,-2> U <-1,1> U <2,+∞>

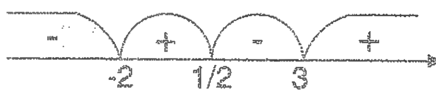
(2) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$

Desarrollo

Hallaremos las raíces de la ecuación: $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

2	-3	-11	6	-2
↓	-4	14	-6	
2	-7	3	0	3
↓	6	-3		
2	-1	0		½
↓	1			
2	0			

Luego las raíces del polinomio son: $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = 3$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-). Es decir: $x \in \langle -\infty, -2 \rangle U \langle \frac{1}{2}, 3 \rangle$

2° Caso.- Si algunas de las raíces del polinomio P(x) = 0 son reales de multiplicidad de orden mayor que 1 se tiene:

a) Cuando el orden de la multiplicidad de una de las raíces del polinomio P(x) = 0 es par, en este caso a la raíz no se considera para la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo proceso del 1° caso.

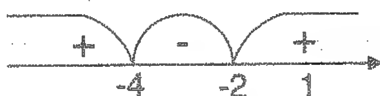
b) Cuando el orden de la multiplicidad de una de las raíces del polinomio P(x) = 0, es impar, en este caso a la raíz se considera para la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo proceso del 1° caso.

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes.

(1) $(x-1)^2(x+2)(x+4)>0$

Desarrollo

Resolviendo la ecuación $(x-1)^2(x+2)(x+4)=0$, de donde $r_1=-4$, $r_2=-2$, y $r_3=1$, de multiplicidad 2.

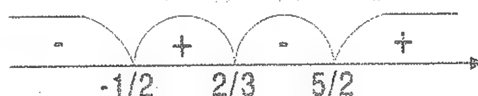


Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty,-4\rangle \cup \langle -2,+\infty\rangle - \{1\}$

(2) $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5)<0$

Desarrollo

Resolviendo la ecuación $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5)=0$, de donde $r_1=-\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{2}{3}$ de multiplicidad 3, $r_3=\frac{5}{2}$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-). Es decir: $x \in \ <-\infty,-\frac{1}{2}> U <\frac{2}{3},\frac{5}{2}>$

3° Caso.- Cuando alguna de las raíces del polinomio P(x) = 0 no son reales, en este caso a estas raíces no se consideran en la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo procedimiento de los casos anteriores.

Ejemplo.- Resolver las siguientes inecuaciones.

(1) $(x^2-7)(x^2+16)(x^2-16)(x^2+1)<0$

Desarrollo

Resolviendo la ecuación: $(x^2-7)(x^2+16)(x^2-16)(x^2+1)=0$, de donde

$r_1 = -4\,,\; r_2 = -\sqrt{7}\,,\; r_3 = \sqrt{7}\,,\; r_4 = 4\,,\; r_5 = -4i\,,\; r_6 = 4i\,,\; r_7 = i\,,\; r_8 = -i$



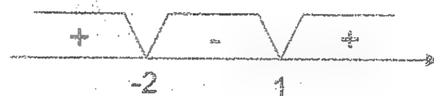
Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es de la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \langle -4,-\sqrt{7}\rangle \cup \langle \sqrt{7},4\rangle$

(2) $(1+x+x^2)(2-x-x^2) \geq 0$

Desarrollo

La inecuación la expresaremos así: $(x^2+x+1)(x^2+x-2) \leq 0$

ahora resolviendo la ecuación $(x^2+x+1)(x^2+x-2)=0$ de donde: $r_1 = -2\,,\; r_2 = 1\,,$ $r_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\,,\; r_4 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$



Como la inecuación es de la forma P(x) ≤ 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in [-2,1]$

OBSERVACIÓN.- Una forma práctica de simplificar las inecuaciones que tienen factores de multiplicidad es aplicando las propiedades siguientes: ∀ a, b ∈ R, n ∈ N entonces:

(1) $a^{2n}.b \geq 0 \iff b \geq 0 \vee a = 0$

(2) $a^{2n}.b < 0 \iff b < 0 \wedge a \neq 0$

(3) $a^{2n+1}.b \geq 0 \iff a.b \geq 0$

(4) $a^{2n+1}.b < 0 \iff a.b < 0$

Ejemplo.- Resolver la inecuación: $(x-3)^4(x+3)^5(2x+1)^3(1-x)^7(7-x) \geq 0$

Desarrollo

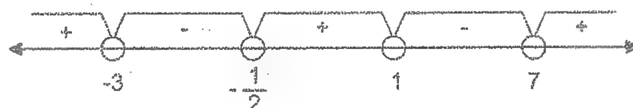
Aplicando las propiedades indicadas se tiene:

$(x-3)^4(x+3)^5(2x+1)^3(1-x)^7(7-x) \geq 0 \iff (x+3)(2x+1)(x-1)(x-7) \geq 0 \vee x-3=0$

$\iff (x+3)(2x+1)(x-1)(x-7) \geq 0 \vee x = 3$

aplicando el método de los puntos críticos donde los puntos críticos son: -3, $-\frac{1}{2}$, 1, 7

Luego tenemos:



Como $P(x) \geq 0$, elegimos los intervalos donde aparecen el signo (+)

$x \in <-\infty,-3] \cup [-\frac{1}{2},1] \cup [7,+\infty>$ $\qquad \therefore \; C.S. = <-\infty,-3] \cup [-\frac{1}{2},1] \cup [7,+\infty> \cup \{3\}$

21.30. INECUACIONES FRACCIONARIAS.-

Una inecuación fraccionaria en una incógnita es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \text{ ó } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad Q(x) \neq 0$$

donde P(x) y Q(x) son monomios o polinomios diferente de cero.

Para resolver una inecuación fraccionaria debe tenerse en cuenta que las inecuaciones:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ó $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, son equivalentes a las inecuaciones polinómicas

$P(x).Q(x) > 0$ ó $P(x).Q(x) < 0$ es decir: Si $Q(x) \neq 0 \Rightarrow Q^2(x) > 0$, de donde se tiene:

$$\text{Si } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Rightarrow \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)} > 0.Q^2(x) \Rightarrow P(x).Q(x) > 0$$

$$\text{Si } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Rightarrow \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)} < 0.Q^2(x) \Rightarrow P(x).Q(x) < 0$$

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$

Desarrollo

La inecuación $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)}>0$, es equivalente a la siguiente inecuación.

$(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7)>0$, para $x \neq -7, 5$

ahora hallaremos las raíces de la ecuación $(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7)=0$.

de donde $r_1=-7$, $r_2=-3$, $r_3=-1$, $r_4=1$, $r_5=2$, $r_6=5$, que son reales diferentes.



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo + es decir: $x \in \langle -\infty,-7\rangle \cup \langle -3,-1\rangle \cup \langle 1,2\rangle \cup \langle 5,+\infty\rangle$

(2) $\frac{x-2}{x+3}<\frac{x+1}{x}$

Desarrollo

La inecuación dada se expresa en la forma, mayor que cero o menor que cero, es decir:

$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x}<0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)}<0$, de donde:

$\frac{-6x-3}{x(x+3)}<0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)}>0$, que es equivalente a:

$(2x+1)(x+3)x>0$, para $x \neq -3,0$ ahora encontramos las raíces de la ecuación.

$(2x+1)(x+3)x=0$, de donde $r_1=-3$, $r_2=-\frac{1}{2}$, $r_3=0$



Como la inecuación es de la forma: $(2x+1)(x+3)x>0$,

la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \left< -3, -\frac{1}{2} \right> U \left< 0, +\infty \right>$$

(3) $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} < \frac{2x}{x+1}$

Desarrollo

La inecuación dada expresaremos en la forma: $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} - \frac{2x}{x+1} < 0$

$\frac{x^2(x+1) + (x-1)(x-1)(x+1) - 2x^2(x-1)}{(x-1)x(x+1)} < 0$, simplificando

$\frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)x(x+1)} < 0$, que es equivalente a la inecuación.

$(2x^2 - x + 1)(x-1)x(x+1) < 0$, para $x \neq -1, 0, 1$

ahora encontramos las raíces de $(2x^2 - x + 1)(x-1)x(x+1) = 0$, de donde sus raíces son:

$r_1 = -1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 1$, $r_4 = \frac{1+\sqrt{7}i}{4}$, $r_5 = \frac{1-\sqrt{7}i}{4}$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \left< -\infty, -1 \right> U \left< 0, 1 \right>$

21.31. INECUACIONES EXPONENCIALES.-

Las inecuaciones exponenciales en una incógnita son de la forma:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \vee \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

donde f(x) y g(x) son expresiones en x, $a \in R^+$, $a \neq 1$.

Para resolver estas inecuaciones, se consideran dos casos:

1° Caso.- Si $a > 1$, entonces los exponentes de la inecuación dada preservan el mismo sentido que la ecuación.

$$\text{Si } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\text{Si } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

2° Caso.- Si $0 < a < 1$, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en sentido contrario al prefijado, es decir:

$$\text{Si } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

$$\text{Si } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones:

① $\sqrt[3]{3^{(5x+1)/3}} < \sqrt{9^{3(x+1)/5}}$

Desarrollo

La inecuación dada es equivalente a: $3^{\frac{5x+1}{9}} < 9^{\frac{3(x+1)}{10}} \Rightarrow 3^{\frac{5x+1}{9}} < 3^{\frac{6x+6}{10}}$

como $a = 3 > 1$ entonces $\dfrac{5x+1}{9} < \dfrac{6x+6}{10}$

$50x+10 < 54x+54 \Rightarrow -44 < 4x \Rightarrow x > -11 \Rightarrow x \in \langle -11,+\infty\rangle$

$\therefore$ La solución es: $x \in \langle -11,+\infty\rangle$

② $[(0,2)^{(x+1)(x-2)}]^{\frac{1}{x-3}} > \dfrac{(0.0128)^{3x-1}}{8^{3x-1}}$

Desarrollo

La inecuación dada se puede escribir en la forma:

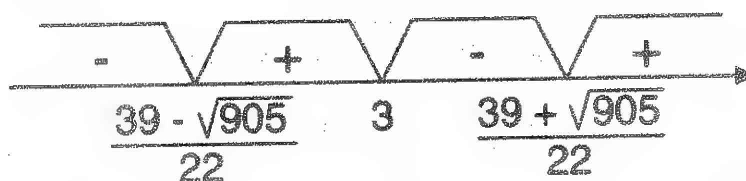
$(0,2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (\dfrac{0.0128}{8})^{3x-1}$ de donde: $(0,2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (0,2)^{12x-4}$,

como $a = 0.2 < 1$, se tiene: $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} < 12x-4 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} - 12x + 4 < 0$

efectuando operaciones y simplificando tenemos: $\frac{11x^2-39x+14}{x-3}>0$, esta inecuación es equivalente a: $(11x^2-39x+14)(x-3)>0$ para $x \neq 3$.

Ahora hallando las raíces de : $(11x^2-39x+14)(x-3)=0$, de donde:

$$r_1=\frac{39-\sqrt{905}}{22}\ ,\quad r_2=3\ ,\quad r_3=\frac{39+\sqrt{905}}{22}$$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo + es decir: $x\in <\frac{39-\sqrt{905}}{22},3> U <\frac{39+\sqrt{905}}{22},+\infty>$

21.32. INECUACIONES IRRACIONALES.-

Las inecuaciones irracionales en una incógnita son de la forma:

$$F(x,\sqrt{P_2(x)},\sqrt[3]{P_3(x)},...,\sqrt[n]{P_n(x)})>0 \quad ó \quad F(x,\sqrt{P_2(x)},\sqrt[3]{P_3(x)},...,\sqrt[n]{P_n(x)})<0$$

donde $P_2(x), P_3(x),..., P_n(x)$ son monomios o polinomios diferentes de cero.

Para que la solución de la inecuación sea valida debe resolverse antes la condición $P_i(x)\geq 0$, i = 2,3,...,n en las expresiones con una radical par, cuyo conjunto solución constituirá el universo o dentro del cual se resuelve la inecuación dada. Debe observarse que $\sqrt{P(x)}$, quiere decir, $(+\sqrt{P(x)})$ y si se desea la raíz negativa se escribirá expresamente como $(-\sqrt{P(x)})$; es decir:

i) $\forall\ P(x)\geq 0\ ,\ \sqrt{P(x)}\geq 0$ ii) $\sqrt{P(x)}=0 \Leftrightarrow P(x)=0$

para resolver las inecuaciones radicales se debe tener en cuenta las siguientes propiedades:

① $0 \le x \le y \iff 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y}$ ② $0 < x < y \iff 0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$

③ $0 \le x < y \iff 0 \le \sqrt{x} < \sqrt{y}$

④ i) Si n es un entero positivo par.

$a_1)$ $\forall$ $P(x) \ge 0$ $\therefore$ $\sqrt[n]{P(x)} \ge 0 \iff P(x) \ge 0$

$a_2)$ $\sqrt[n]{P(x)} = 0 \iff P(x) = 0$

$a_3)$ $\sqrt[n]{P(x)} \le \sqrt[n]{Q(x)} \iff 0 \le P(x) \le Q(x)$

ii) Si n es entero positivo impar.

$b_1)$ $\sqrt[n]{P(x)} \ge 0 \iff P(x) \ge 0$

$b_2)$ $\sqrt[n]{P(x)} < 0 \iff P(x) < 0$

$b_3)$ $\sqrt[n]{P(x)} \le \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \le Q(x)$

Las propiedades $b_1)$, $b_2)$ indican que $\sqrt[n]{P(x)}$ tienen el mismo signo que $P(x)$ si n es impar.

OBSERVACIÓN.- Cuando en una expresión existen k radicales par entonces se calculan los universos relativos $U_1, U_2, ..., U_k$ para cada radical y el universo general será $U = U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k$.

Daremos algunos ejemplos de ilustración de estas propiedades, para después estudiar las diversas formas de inecuaciones irracionales.

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones

① $\sqrt{x+5} > -2$

<u>Desarrollo</u>

Como $\sqrt{x+5} > -2$ es valida para todo x tal que $x \in U$: $x + 5 \ge 0$

$\Rightarrow x \ge -5 \Rightarrow U = [-5, +\infty>$, luego el conjunto solución es $[-5, +\infty>$

(2) $\sqrt{x+7} > 0$

Desarrollo

Como $\sqrt{x+7} > 0$ entonces el conjunto universal es:

$x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7 \Rightarrow U = [-7,+\infty\rangle$

Además $\sqrt{x+7} > 0 \Leftrightarrow x + 7 > 0 \Rightarrow x \in \langle -7,+\infty\rangle$.

Luego el conjunto solución es $x \in [-7,+\infty\rangle \wedge \langle -7,+\infty\rangle \quad \therefore \quad x \in \langle -7,+\infty\rangle$

(3) $\sqrt{x-5} \leq 0$

Desarrollo

Como $\sqrt{x-5} \leq 0$, el conjunto universal es $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow U = [5,+\infty\rangle$ y como $0 \leq \sqrt{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \in U$

Luego el conjunto solución es $\{5\}$.

(4) $\sqrt{x-8} < 0$

Desarrollo

Como $\sqrt{x-8} < 0$ es absurdo entonces la solución es ϕ.

(5) $\sqrt{x+9} \geq 0$

Desarrollo

Como $\sqrt{x+9} \geq 0$ es verdadero $\forall\ x \in U$: $x + 9 \geq 0$ es decir $U = [-9,+\infty\rangle$, luego el conjunto solución es $x \in [-9,+\infty\rangle$.

(6) $\sqrt{8-2x} < \sqrt{13}$

Desarrollo

El conjunto universal es $8 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ de donde $U = \langle -\infty,4]$.

$\sqrt{8-2x} < \sqrt{13} \Leftrightarrow 8 - 2x < 13 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$ de donde $x \in [-\frac{5}{2},+\infty\rangle$. Luego el conjunto solución es: $U \cap [-\frac{5}{2},+\infty\rangle = [-\frac{5}{2},4]$

⑦ $\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}>-3$

Desarrollo

Calculando los universos relativos.

$U_1:\ x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow x\in [-3,+\infty>$

$U_2:\ 4-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 4 \Rightarrow x\in <-\infty,4]$

$U=U_1\cap U_2=[-3,+\infty>\cap<-\infty,4]=[-3,4]$

como la suma de dos positivos es siempre mayor que un negativo.

$\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}>-3$ es valido $\forall\ x\in U=[-3,4]$.

⑧ $\sqrt{x-7}>3$

Desarrollo

Sea U: $x-7\geq 0 \Rightarrow x\geq 7 \Rightarrow x\in [7,+\infty>$

$\sqrt{x-7}>3 \Leftrightarrow x-7>9 \Rightarrow x>16 \Rightarrow x\in <16,+\infty>$

el conjunto solución es $x\in U\cap <16,+\infty> = <16,+\infty>$

⑨ $-\sqrt{x-5}>0$

Desarrollo

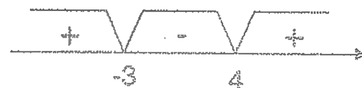
$-\sqrt{x-5}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}<0$ el conjunto solución es ϕ.

⑩ $\sqrt{x^2-x-12}\leq\sqrt{x^2-6x+5}$

Desarrollo

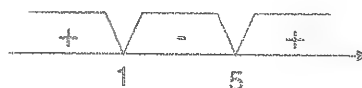
Calculando los universos relativos.

$U_1:\ x^2-x-12\geq 0 \Rightarrow (x-4)(x+3)\geq 0$



$U_1=<-\infty,-3]\ U\ [4,+\infty>$

$U_2:\ x^2-6x+5\geq 0 \Rightarrow (x-5)(x-1)\geq 0$



$U_2=<-\infty,1]\ U\ [5,+\infty>$

$U = U_1 \cap U_2 = <-\infty-3] \ U \ [5,+\infty>$

$\sqrt{x^2-x-12} \leq \sqrt{x^2-6x+5} \iff x^2-x-12 \leq x^2-6x+5$

de donde $5x \leq 17 \Rightarrow x \leq \frac{17}{5} \Rightarrow x \in <-\infty,\frac{17}{5}]$

Luego el conjunto solución es: $x \in U \ \Lambda <-\infty,\frac{17}{5}] = <-\infty,-3]$

(11) $\frac{\sqrt[3]{x^2-4}(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$

Desarrollo

Como $\sqrt[3]{x^2-4}$ tiene el mismo signo que x^2-4 y $(x+4)^3$ tiene el mismo signo que x + 4 entonces la inecuación dada es equivalente.

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-4}(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0 \iff \frac{(x^2-4)(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

Como $\forall$ x $\in$ R, $(x-2)^2 \geq 0$ entonces $\frac{(x^2-4)(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$

$\frac{(x+2)(x-2)^3(x-1)(x^2+x-12)}{(x+4)(x-2)(x+6)(x+4)} \geq 0$, para $x \neq 2, -4$

$\frac{(x+2)(x-1)(x+4)(x-3)}{(x+6)} \geq 0$, para $x \neq 2, -4$



Luego el conjunto solución es: x $\in$ <-6,-4] U [-2,1] U [3,+∞>

(12) $$\frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}\sqrt[4]{10-x}}{\sqrt[6]{x+9}(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\leq 0$$

Desarrollo

Los radicales pares nos da el universo U. $10-x\geq 0 \;\wedge\; x+9>0 \Rightarrow x\leq 10 \;\wedge\; x>-9$

$x\in\ <-9,10] \;\Rightarrow\; U=\ <-9,10]$

(no se incluye el –9 por que anula al denominador)

como los radicales pares son positivos la inecuación es equivalente a:

$$\frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}\sqrt[4]{10-x}}{\sqrt[6]{x+9}(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}}{(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\leq 0$$

como los radicales impares tienen el mismo signo que las cantidades subradicales entonces:

$$\frac{(x+7)(x+2)^4(x+3)(x^2-7x+12)}{(x-8)^3(x-3)(x^2+3x+9)(x-6)(x-8)}\leq 0,$$ como para todo $x\in R \quad (x+2)^4\geq 0$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x-3)(x-4)}{(x-8)^3(x-3)(x-6)(x-8)}\leq 0,$$ para $x\neq 3,8$ simplificando tenemos

$$\frac{(x+7)(x+3)(x-4)}{x-6}\leq 0,\quad x\neq 3,8$$

+ -7 - -3 + 4 - 6 +

$x\in[-7,-3]\cup[4,6>\cup\{-2\}$ luego el conjunto solución es: $x\in U\cap([-7,-3]\cup[4,6>\cup\{-2\})$

$\therefore \quad x\in[-7,-3]\cup[4,6>\cup\{-2\}$

ahora veremos como resolver diversas formas de la inecuación con radicales aplicando criterios de acuerdo a cada tipo de inecuación irracional.

1° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)}>Q(x)$. La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)}>Q(x)\Leftrightarrow (P(x)\geq 0 \wedge [Q(x)\leq 0] \vee (Q(x)\geq 0 \wedge P(x)>Q^2(x))$$

b) $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) \leq 0 \vee (Q(x) \leq 0 \vee P(x) \geq Q^2(x))$$

2° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} < Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) > 0 \wedge P(x) < Q^2(x))]$$

b) $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \leq Q^2(x)]$$

3° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

a) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) > 0 \wedge Q(x) > 0$$

b) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$$

c) $\sqrt[2n]{P(x)} + \sqrt[2n]{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$

4° Para la inecuación irracional de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K$, K > 0; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K \Rightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0) \wedge P(x) \geq (k - \sqrt{Q(x)})^2]$$

5° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0 \Rightarrow P(x) = 0 \wedge Q(x) = 0$$

OBSERVACIÓN.-

Consideremos otros casos más generales.

1° Caso.- Si n es impar positivo mayor que uno.

a) $\frac{P(x)\sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{P(x).Q(x)}{R(x)} \geq 0$

b) $\frac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{R(x)Q(x)} \leq 0$

c) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$

2° Caso.- Si n es par positivo

a) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$

b) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \leq 0$

c) $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0 \wedge \frac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

d) $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0 \wedge \frac{P(x)}{R(x)} \leq 0$

e) $\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \leq 0 \vee (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq Q^n(x))]$

f) $\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0) \wedge P(x) \leq Q^n(x)]$

Ejemplo.- Resolver las siguientes inecuaciones

① $\sqrt{x^2 - 14x + 13} \geq x - 3$

Desarrollo

$\sqrt{x^2 - 14x + 13} \geq x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 \geq 0 \wedge [x - 3 \leq 0 \vee$

$(x^2 - 14x + 13 \geq 0 \wedge x^2 - 14x + 13 \geq (x-3)^2)]$

$$\Leftrightarrow\ x^2-14x+13\geq 0\ \Lambda\ [x\leq 3\ \text{V}\ (x^2-14x+13\geq 0\ \Lambda\ x\leq\frac{1}{2})]$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-14x+13\geq 0\ \Lambda\ [x\leq 3\vee x\in\langle-\infty,1]\cup[13,\infty\rangle\ \Lambda\ x\leq\frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-14x+13\geq 0\ \Lambda\ [x\leq 3\ \text{V}\ x\leq\frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-14x+13\geq 0\ \Lambda\ x\leq 3$$

$$\Leftrightarrow\ (x-13)(x-1)\geq 0\ \ \Lambda\ \ x\leq 3$$

$$\Leftrightarrow\ x\in\langle-\infty,1]\cup[13,+\infty\rangle\ \ \Lambda\ \ x\leq 3 \qquad\qquad \therefore\ x\in\langle-\infty,1]$$

(2) $\sqrt{x^2-14x+13}<x+1$

Desarrollo

Aplicando la parte b) del 1° caso:

$$\sqrt{x^2-14x+13}<x+1\Leftrightarrow(x^2-14x+13\geq 0\ \Lambda\ [x+1>0)\ \Lambda\ (x^2-14x+13<(x+1)^2])$$

$$\Leftrightarrow\ ((x-13)(x-1)\geq 0\ \Lambda[x>-1)\ \Lambda\ ((x-13)(x-1)<(x+1)^2])$$

$$\Leftrightarrow\ ((x-13)(x-1)\geq 0\ \Lambda\ [x>-1)\ \Lambda\ x>\frac{3}{4}]$$

$$\Leftrightarrow\ x\in\langle-1,1]\cup[13,+\infty\rangle\ \Lambda\ \ x>\frac{3}{4}]$$

$$\Leftrightarrow\ x\in\langle\frac{3}{4},1]\cup[13,+\infty\rangle$$

(3) $\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}}+\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}\geq 0$

Desarrollo

Aplicando la parte b), del 3° caso: $\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}\geq 0\ \Leftrightarrow\ P(x)\geq 0\ \ \Lambda\ \ Q(x)\geq 0$

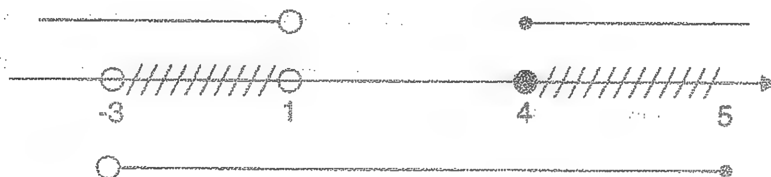
$$\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}}+\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-8}{x-1}\geq 0 \;\; \wedge \;\; \frac{5-x}{x+3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x-1)\geq 0,\; x\neq 1 \;\; \wedge \;\; (5-x)(x+3)\geq 0,\; x\neq -3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x-1)\geq 0,\; x\neq 1 \;\; \wedge \;\; (x-5)(x+3)\leq 0,\; x\neq -3$$



$x \in \; <-\infty,1> \cup [4,\infty> \;\; \wedge \;\; x \in \; <-3,5]$



La solución es: $x \in \; <-3,1> \cup [4,5]$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo impar, entonces:

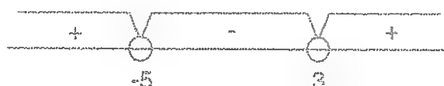
① $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$ ② $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) < Q(x)$

③ $\sqrt[n]{P(x)} \geq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \geq Q(x)$ ④ $\sqrt[n]{P(x)} > \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) > Q(x)$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[4]{x^2-1}\sqrt[5]{x+5}} > 0$

Desarrollo

El conjunto de referencia o conjunto universal se obtiene del radical par y diferente de cero: $x^2-1>0$, dé donde $x^2>1 \;\Rightarrow\; x>1 \vee x<-1 \;\therefore\; x \in \; <-\infty,-1> \cup <1,+\infty>$ luego el radical par resulta positivo y puede simplificar quedando la inecuación $\dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[5]{x+5}}>0$, que de acuerdo a las observaciones, las expresiones del subradical tiene el mismo signo $\dfrac{3-x}{x+5}>0$, de donde $\dfrac{x-3}{x+5}<0$



$$x \in <-5,3>$$

Luego la solución de la inecuación es: $x \in <-5,3> \cap (<-\infty,-1> \cup <1,+\infty>)$

$$\therefore \; x \in <-5,-1> \cup <1,3>$$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\dfrac{\sqrt[3]{x^2-9}.(x^3+8x^2+4x-48)}{(x+4)^5(x^3-13x+12)} \geq 0$

Desarrollo

De acuerdo a las observaciones indicadas se tiene que $\sqrt[3]{x^2-9}$ tiene el mismo signo que x^2-9 y que $(x+4)^5$ tiene el mismo signo que $x+4$, por lo tanto la inecuación dada resulta equivalente a la inecuación:

$\dfrac{(x^2-9)(x^3+8x^2+4x-48)}{(x+4)(x^3-13x+12)} \geq 0$ factorizando el numerador y el denominador

$$\frac{(x+3)(x-3)(x-2)(x+6)(x+4)}{(x+4)(x-1)(x+4)(x-3)} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+3)(x-2)(x+6)(x+4)}{(x+4)^2(x-1)} \geq 0,\; x \neq 3$$

$$\frac{(x+3)(x-2)(x+6)(x+4)}{x-1} \geq 0$$

- + - + - +
-6 -4 -3 1 2

$\therefore \; x \cup [-6,-4> \cup [-3,1> \cup [2,+\infty> - \{3\}$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo par, entonces:

① $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) \leq Q(x)$ ② $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) < Q(x)$

Ejemplo.- $\sqrt{\dfrac{32-2x}{x+2}} \geq \sqrt{x}$

Desarrollo

Aplicando la observación se tiene:

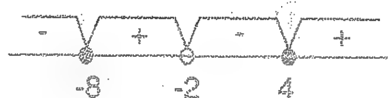
$$\sqrt{x} \leq \sqrt{\frac{32-2x}{x+2}} \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq \frac{32-2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq \frac{32-2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x - \frac{32-2x}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2+4x-32}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{(x+8)(x-4)}{x+2} \leq 0$$



$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty,-8] \cup \langle -2,4]$ $\qquad \therefore \; x \in [0,4]$

21.33 VALOR ABSOLUTO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Al valor absoluto del número real x denotaremos por | x |, y se define por la regla.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo.- $|7| = 7$, $\quad |-7| = -(-7) = 7$

b) **PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO.-**

① $|a| \geq 0, \; \forall a \in R$ ② $|a| \geq a \; \forall a \in R$

③ $|a| = |-a|$ ④ $|ab| = |a||b|$

⑤ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \; b \neq 0$ ⑥ $|a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

Demostraremos la 6° propiedad, las demás dejamos para el lector.

$$|a+b|^2 = |(a+b)^2| = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2$$

$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ entonces $\qquad \therefore \; |a+b| \leq |a| + |b|$

21.34. PROPIEDADES BÁSICAS PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIÓNES DONDE INTERVIENE VALOR ABSOLUTO.-

① $|a| = 0 \iff a = 0$

② $|a| = b \iff [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

③ $|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b$

④ Sí $b > 0$, entonces:

i) $|a| < b \iff -b < a < b$ ii) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

⑤ Si $a, b \in R$ se verifica

i) $|a| > b \iff a > b \vee a < -b$ ii) $|a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b$

⑥ i) $|a| = \sqrt{a^2}$ ii) $|a|^2 = a^2$

La demostración de estas propiedades dejamos para el lector.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|4x + 3| = 7$

Desarrollo

$|4x + 3| = 7 \iff 4x + 3 = 7 \vee 4x + 3 = -7$

$\iff x = 1 \vee x = -\frac{5}{2}$

Luego para $x = 1$, $x = -\frac{5}{2}$ son soluciones para la ecuación dada.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|2x + 2| = 6x - 18$

Desarrollo

$|2x + 2| = 6x - 18 \iff [6x - 18 \geq 0 \wedge (2x + 2 = 6x - 18 \vee 2x + 2 = -6x + 18)]$

$\iff [x \geq 3 \wedge (x = 5 \vee x = 2)]$



Luego la solución de la ecuación es $x = 5$.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|x-2|=|3-2x|$

Desarrollo

$|x-2|=|3-2x| \Leftrightarrow x-2=3-2x \ \vee \ x-2=-3+2x$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{5}{3} \ \vee \ x=1, \quad \text{la solución es: } \{1,\frac{5}{3}\}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de la expresión: $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x}$, sí $x \in \langle 0,1 \rangle$

Desarrollo

$$|4x+1|=\begin{cases} 4x+1, & x \geq -\frac{1}{4} \\ -4x-1, & x < -\frac{1}{4} \end{cases}, \qquad |x-1|=\begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x<1 \end{cases}$$

si $x \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow |4x+1|=4x+1$, $|x-1|=1-x$

Luego: $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x}=\frac{4x+1-(1-x)}{x}=\frac{5x}{x}=5$

$\therefore \quad \frac{|4x+1|-|x-1|}{x}=5$, para $x \in \langle 0,1 \rangle$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $|2x-5|<3$

Desarrollo

$|2x-5|<3 \Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow 2<2x<8$

$$\Leftrightarrow 1<x<4 \Leftrightarrow x \in \langle 1,4 \rangle$$

Luego la solución es $x \in \langle 1,4 \rangle$

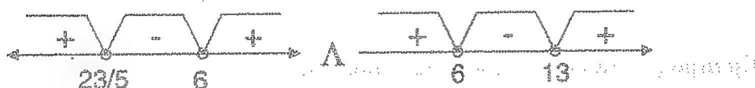
Ejemplo.- Resolver la inecuación: $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$

Desarrollo

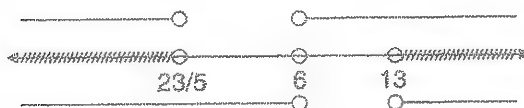
$$\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3 \iff -3<\frac{2x-5}{x-6}<3 \iff -3<\frac{2x-5}{x-6} \wedge \frac{2x-5}{x-6}<3$$

$$\iff \frac{5x-23}{x-6}>0 \wedge \frac{x-13}{x-6}>0$$

$$\iff (5x-23)(x-6)>0 \wedge (x-13)(x-6)>0, \quad x\neq 6$$



$$x\in <-\infty,\frac{23}{5}> U <6,+\infty> \wedge <-\infty,6> U <13,+\infty>$$



La solución es: $x\in <-\infty,\frac{23}{5}> U <13,+\infty>$

21.35. MÁXIMO ENTERO.-

Si x es un número real, el máximo entero de x representaremos por $[\![x]\!]$ y es el mayor de todo los entero menores o iguales a x, es decir:

$$[\![x]\!] = \text{máx } \{n \in Z / x \geq n\}$$

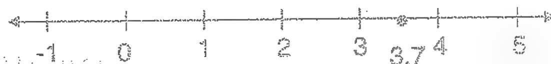
Para calcular el máximo entero de un número real x, se observa todos los enteros que se encuentran a la izquierda de x (o que coinciden con x, en caso que x sea entero) y el mayor de todos ellos es el máximo entero $[\![x]\!]$, por ejemplo:



De donde $[\![x]\!] = 2$

Ejemplo.- Hallar $[\![3.7]\!]$

De donde $[\![3.7]\!] = 3$



Si x se encuentra entre dos enteros consecutivos de la forma:



Entonces: $[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n+1,\ n \in Z$

Ejemplo.- Sí $[\![x]\!] = 5 \iff 5 \leq x < 6$

$[\![x]\!] = -5 \iff -5 \leq x < -4$

NOTA.- Como se podrá observar siempre se toma él numero entero mas próximo a la izquierda.

OBSERVACIÓN.- Por definición de máximo entero se tiene:

$$[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n+1,\ n \in Z$$

$$\iff x \in [n, n+1>,\ n \in Z$$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = -4 \iff -4 \leq x < -3 \implies x \in [-4,-3>$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = 2.15$, es absurdo, puesto que todo máximo entero es un numero entero.

21.36. PROPIEDADES DEL MÁXIMO ENTERO.-

① $[\![x]\!] \in Z$, por definición

② $[\![x]\!] = x \iff x \in Z$

③ $\forall x \in R,\ [\![x]\!] \leq x$, por definición

④ $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1,\ \forall x \in R$

⑤ $0 \leq x - [\![x]\!] < 1,\ \forall x \in R$

⑥ $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!],\ \forall x \in R$

⑦ $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n,\ n \in Z$

En efecto: Sea $[\![x]\!] = k,\ k \in Z$, entonces $k \leq x < k+1$

$$\implies k+n \leq x+n < (k+n)+1$$

$$\implies [\![x+n]\!] = k+n = [\![x]\!] + n$$

⑧ $[\![x]\!] \leq n \iff x < n+1,\ n \in Z$

⑨ $[\![x]\!] < n \iff x < n,\ n \in Z$

(10) $[\![x]\!] \geq n \Leftrightarrow x \geq n,\ n \in Z,\ x \in R$

(11) $[\![x]\!] > n \Leftrightarrow x \geq n+1$

(12) $\forall\ x, y \in R$, sí $x \leq y \Leftrightarrow [\![x]\!] \leq [\![y]\!]$

(13) $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

En efecto: Sean $\begin{cases} [\![x]\!] = m \\ [\![y]\!] = n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m \leq x < m+1 \\ n \leq y < n+1 \end{matrix}$

$$m + n \leq x + y < (m+n) + 2$$

entonces $[\![x+y]\!] = m+n$ o $m + n + 1$

por lo tanto $[\![x+y]\!] \geq m+n$ $\quad\therefore\ [\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

(14) Sí $n \in Z^+ \Rightarrow [\![nx]\!] \geq n[\![x]\!]$

En efecto: Sea $[\![x]\!] = m \Rightarrow m \leq x < m+1$

$$\Rightarrow nm \leq nx < mn + n$$

$$\Rightarrow [\![nx]\!] \geq nm \qquad \therefore\ [\![nx]\!] \geq n[\![x]\!]$$

(15) Si $x \in R$ y $n \in Z^+$, entonces $\left[\!\!\left[\dfrac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\dfrac{x}{n}\right]\!\!\right]$

(16) Si a y b $\in Z$, $x \in R$, entonces se cumple:

i) $a \leq [\![x]\!] \leq b \Rightarrow a \leq x < b+1$

ii) $a \leq [\![x]\!] < b \Rightarrow a \leq x < b$

iii) $a < [\![x]\!] < b \Rightarrow a+1 \leq x < b$

Ejemplo.-

(1) Resolver la ecuación $[\![3x+1]\!] = 2$

Desarrollo

$[\![3x+1]\!] = 2 \Rightarrow 2 \leq 3x+1 < 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3}$ entonces $x \in [\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}>$

(2) Resolver la inecuación $[\![5x]\!] < 3$

Desarrollo

$[\![5x]\!] < 3 \Rightarrow 5x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{5}$ $\therefore$ $x \in \langle -\infty, \frac{3}{5} \rangle$

(3) $[\![2x]\!] < x$

Desarrollo

Sí $x < 0 \Rightarrow 2x < x \Rightarrow [\![2x]\!] \le 2x < x$

Es decir $[\![2x]\!] < x$ $\therefore$ $S_1 = \langle -\infty, 0 \rangle$

Sí $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2x < 1 \Rightarrow [\![2x]\!] = 0 < x$

Es decir $[\![2x]\!] < x$ $\therefore$ $S_2 = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

Si $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow [\![2x]\!] \ge 1$ es decir: $[\![2x]\!] \ne x$ $\therefore$ $S_3 = \phi$

$\therefore$ $S = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

(4) $[\![2x]\!] < [\![4x]\!]$

Desarrollo

Sea $[\![4x]\!] = P \Leftrightarrow P \le 4x < P + 1 \Rightarrow \frac{P}{2} \le 2x < \frac{P}{2} + \frac{1}{2} < \frac{P}{2} + 1$

$\Rightarrow [\![2x]\!] = \frac{P}{2} \wedge \frac{P}{2} \in Z$

$[\![2x]\!] < [\![4x]\!] \Rightarrow \frac{P}{2} < P \Rightarrow 0 < \frac{P}{2} \Rightarrow 0 < P \Rightarrow 0 < [\![4x]\!] \Rightarrow 4x \ge 1$

$\therefore$ $x \ge \frac{1}{4} \Rightarrow Cs = [\frac{1}{4}, +\infty \rangle$

(5) $[\![-5x]\!]<[\![x]\!]$

Desarrollo

Sí $0<x<\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases}0<5x<1\\ [\![x]\!]=0\end{cases} \Rightarrow -1<-5x<0 \Rightarrow [\![-5x]\!]=-1$ y $-1<0$

$\therefore \quad S_1=<0,\frac{1}{5}>$

Sí $x\geq\frac{1}{5} \Rightarrow -5x<x \Rightarrow [\![-5x]\!]<[\![x]\!]$ $\qquad \therefore \quad S_2=[\frac{1}{5},+\infty>$

$\therefore$ S = <0,+∞>, para x < 0, $S_3=\phi$

(6) $[\![x-1]\!]<[\![x]\!]$

Desarrollo

Como $[\![x-1]\!]=[\![x]\!]-1$ de donde se tiene:

$[\![x-1]\!]<[\![x]\!] \Rightarrow [\![x]\!]-1<[\![x]\!]$

-1 < 0, verdadero. Luego C.S. = R

(7) $([\![x]\!]-2)(x-2)(x+1)>0$

Desarrollo

a) Si x < 2 $\Rightarrow [\![x]\!]-2<0$, luego resolveremos

-(x – 2)(x + 1) > 0 es decir (x – 2)(x + 1) < 0 de donde $S_1=<-1,2>$

b) Sí 2 ≤ x < 3, entonces $[\![x]\!]-2=0$ de donde $S_2=\phi$

c) Si x ≥ 3 $\Rightarrow [\![x]\!]-2>0$ luego resolveremos (x – 2)(x + 1) > 0

$S_3=[3,+\infty>\cap(<-\infty,-1>\cup<2,+\infty>)$ $\qquad \therefore \quad S_3=[3,+\infty>$

$\therefore$ S = <-1,2> ∪ [3,+∞>

(8) $(x^3-1)(x^2+1)\sqrt{[\![x]\!]-x}\geq 0$

Desarrollo

$[\![x]\!]-x\geq 0$, entonces $[\![x]\!]\geq x$, pero por definición se tiene: $[\![x]\!]\leq x$,

$\forall\, x\in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; [\![x]\!]=x\in Z$

Luego resolveremos $(x^3-1)(x^2+1)\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq 1$ $\qquad\therefore\; S=Z^+=N$

(9) $([\![x-2[\![x]\!]]\!])(x-1)(x+1)\geq 0$

Desarrollo

Como $-2[\![x]\!]\in Z$

$[\![x-2[\![x]\!]]\!]=[\![x]\!]-2[\![x]\!]=-[\![x]\!]$

i) Si $x<0, \Rightarrow -[\![x]\!]>0$, entonces resolveremos

$(x-1)(x+1)\geq 0$ $\qquad\therefore\; S_1=<-\infty,-1]$

ii) Si $0\leq x<1 \Rightarrow [\![x]\!]=0$ entonces $S_2=[0,1>$

iii) Si $x\geq 1 \Rightarrow [\![x]\!]>0$, entonces resolveremos $(x-1)(x+1)\leq 0$ $\therefore S_3=\{1\}$

$\therefore\; S=<-\infty,-1]\cup[0,1]$

(10) $\left[\!\!\left[\dfrac{x+2}{x+3}\right]\!\!\right]=2$

Desarrollo

Se conoce que $[\![x]\!]+n \;\Leftrightarrow\; n\leq x<n+1$

$$\left[\!\!\left[\frac{x+2}{x+3}\right]\!\!\right]=2 \;\Leftrightarrow\; 2\leq\frac{x+2}{x+3}<3 \;\Leftrightarrow\; 2\leq 1-\frac{1}{x+3}<3$$

$$\Leftrightarrow\; 1\leq-\frac{1}{x+3}<2 \;\Leftrightarrow\; 1\leq-\frac{1}{x+3}\;\wedge\; -\frac{1}{x+3}<2$$

$$\Leftrightarrow\; 1+\frac{1}{x+3}\leq 0 \;\wedge\; 2+\frac{1}{x+3}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+4}{x+3} \le 0 \;\; \Lambda \;\; \frac{2x+7}{x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [(x+4)(x+3) \le 0 \;\; \Lambda \;\; (2x+7)(x+3) > 0], \quad x \ne -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [-4,-3> \;\; \Lambda \;\; x \in <-\infty,-\frac{7}{2}> U <-3,+\infty>$$

Luego la solución es: $x \in [-4,-\frac{7}{2}>$

(11) Resolver la inecuación $[\![\frac{|x|-1}{5}]\!] \ge 4$

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente: Sí $y \in Z$, $[\![x]\!] \ge y \Leftrightarrow x \ge y$

$4 \in Z$, $[\![\frac{|x|-1}{5}]\!] \ge 4 \Leftrightarrow \frac{|x|-1}{5} \ge 4 \Leftrightarrow |x| - 1 \ge 20$

$\Leftrightarrow |x| \ge 21 \Leftrightarrow x \ge 21 \;\; V \;\; x \le -21$

La solución es: $x \in <-\infty,-21] \; U \; [21,+\infty>$

(12) Resolver la inecuación $[\![|x|-2x]\!] = 0$

Desarrollo

Por definición de máximo entero se tiene:

$[\![|x|-2x]\!] = 0 \Leftrightarrow 0 \le |x| - 2x < 1 \Leftrightarrow 2x \le |x| < 1 + 2x$

ahora por la propiedad transitiva $(a \le b < c \Leftrightarrow a < b \;\; \Lambda \;\; b < c)$

se tiene: $2x \le |x| < 1 + 2x \Leftrightarrow 2x \le |x| \;\; \Lambda \;\; |x| < 1 + 2x$ ...(1)

además se conoce que: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1° Si $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$ reemplazando en (1) se tiene:

$2x \le 0 \;\; \Lambda \;\; x < 1 + 2x \Rightarrow x \le 0 \;\; \Lambda \;\; x > -1 \Rightarrow x \in <-1,0]$

La primera parte de la solución es: $x \in [0,+\infty> \;\; \Lambda \;\; <-1,0] \Rightarrow x = 0$

2° $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ reemplazando en (1) se tiene:

$$2x \leq -x \wedge -x < 1 + 2x \Rightarrow x \leq 0 \wedge x > -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in \langle -\frac{1}{3}, 0]$$

la segunda parte de la solución es: $x \in \langle -\infty, 0\rangle \wedge \langle -\frac{1}{3}, 0] \Rightarrow x \in \langle -\frac{1}{3}, 0\rangle$

Por lo tanto la solución de $[\![|x| - 2x]\!] = 0$ es: $x \in \langle -\frac{1}{3}, 0\rangle \cup \{0\} = \langle -\frac{1}{3}, 0]$

Luego la solución general es $\langle -1, 0] \cup \langle -\frac{1}{3}, 0] = \langle -1, 0]$

21.37. INECUACIONES LOGARÍTMICAS.-

Para el estudio de las inecuaciones logarítmicas es necesario recordar lo siguiente:
En primer lugar la definición de logaritmo es decir:

$$\log_b N = x \Leftrightarrow N = b^x, \ N > 0 \wedge b > 0$$

En segundo lugar las propiedades del logaritmo

a) $\log_b AB = \log_b A + \log_b B$

b) $\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$

c) $\log_b A^n = n \log_b A$

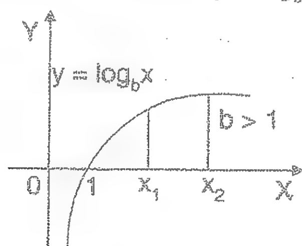
d) $\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_b A$

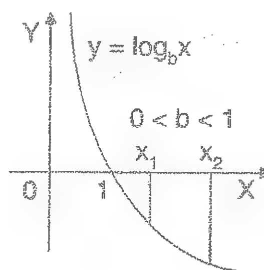
e) $\log_b 1 = 0$

f) $\log_b b = 1$

g) $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

En tercer lugar se observa la gráfica $y = \log_b x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$. También dentro del campo de los números reales, solo tiene logaritmo los números reales positivo: ahora gratificamos la ecuación $y = \log_b x$.





Al observar la gráfica se tiene los siguientes casos:

1° Caso.- Cuando la base es b > 1, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo positivo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo negativo, entonces para cualquier $x_1, x_2 \in R^+$ se tiene

$$\text{Sí } b > 1 \text{ y } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$$

De donde deducimos las relaciones siguientes:

a) Sí $x > 0,\ b > 1;\ N \in R \Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow x > b^n$

b) Si $x > 0,\ b > 1;\ N \in R \Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x < b^n$

2° Caso.- Cuando la base es 0 < b < 1, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo negativo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo positivo, entonces para cualquier x_1, x_2 de R^+ se tiene:

$$\text{Sí } 0 < b < 1 \text{ y } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$$

de donde deducimos las relaciones siguientes:

Sí $x > 0,\ 0 < b < 1$ y $N \in R \Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow 0 < x < b^N$

Sí $x > 0,\ 0 < b < 1$ y $E \in R \Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x > b^N$

OBSERVACIÓN.- Resumiendo, para la solución de las inecuaciones logarítmicas se obtiene de la siguiente manera:

$$\log_b a > \log_b c \Leftrightarrow \begin{cases} a > c & \text{si } b > 1 \\ a < c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b a > c \Leftrightarrow \begin{cases} a > b^c & \text{si } b > 1 \\ a < b^c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

① $\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3)$

Desarrollo

Calculando el campo de existencia de los logarítmicos dados

$2x+4>0 \;\wedge\; 5x+3>0$ de donde $x>-2 \;\wedge\; x>-\frac{3}{5}$ $\quad \therefore U=<-\frac{3}{5},+\infty>$

como la base es $2>1$, entonces se tiene:

$\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3) \Leftrightarrow 2x+4>5x+3 \Rightarrow x<\frac{1}{3} \Rightarrow x\in<-\infty,\frac{1}{3}>$

La solución es: $x\in<-\frac{3}{5},+\infty>\cap<-\infty,\frac{1}{3}>=<-\frac{3}{5},\frac{1}{3}>$ $\quad \therefore S=<-\frac{3}{5},\frac{1}{3}>$

② $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<-2$

Desarrollo

Calculando el campo de existencia del logaritmo

$2x+5>0$, entonces $x>-\frac{5}{2}$ de donde $U=<-\frac{5}{2},+\infty>$

como la base es $\frac{1}{3}<1$, entonces se tiene:

$\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<-2 \Leftrightarrow (2x+5>(\frac{1}{3})^{-2} \Rightarrow 2x+5>9 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x\in<2,+\infty>$

Luego la solución es: $x\in<-\frac{5}{2},+\infty>\cap<2,+\infty>=<2,+\infty>$ $\therefore$ $S=<2,+\infty>$

③ $\log_2(|x-2|-1)>1$

Desarrollo

Calculando el campo de existencia del logaritmo

$|x-2|-1>0 \Rightarrow |x-2|>1 \Rightarrow x-2>1 \vee x-2<-1 \Rightarrow x>3 \vee x<1$

de donde $U=<-\infty,1>\cup<3,+\infty>$

como la base es $2>1$, entonces se tiene:

$\log_2(|x-2|-1)>1 \Rightarrow |x-2|-1>2$

$\Rightarrow |x-2|>3 \Rightarrow x-2>3 \vee x-2<-3 \Rightarrow x>5 \vee x<-1$

$x\in<-\infty,-1>\cup<5,+\infty>$

La solución es: $x\in(<-\infty,1>\cup<3,+\infty>)\cap(<-\infty,-1>\cup<5,+\infty>)$

$\therefore\ S=<-\infty,-1>\cup<5,+\infty>$

(4) $\log_x(\frac{x+15}{x-1})>1$

Desarrollo

El logaritmo dado esta bien definida sí $x>0$ y $x\neq 1$ además $\frac{x+15}{x-1}>0$

Luego el campo de existencia es $U=<1,+\infty>$

$\log_x(\frac{x+15}{x-1})>1 \Rightarrow \frac{x+15}{x-1}>x^1 \Rightarrow \frac{x+15}{x-1}-x>0$, de donde

$\frac{x+15-x^2+x}{x-1}>0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-15}{x-1}<0$ de donde $\frac{(x-5)(x+3)}{x-1}<0$

de donde $x\in<1,+\infty>\cup<1,5>$

La solución es: $x\in<1,+\infty>\cap(<-\infty,-3>\cup<1,5>)=<1,5>$ $\therefore\ S=<1,5>$

(5) Resolver la inecuación $\log_{1/3}(2x+5)<-2$

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente: $x>0,\ 0<b<1,\ N\in R,\ \log_b x<N \Leftrightarrow x>b^N$

para nuestro caso $2x+5>0 \Rightarrow x>-\frac{5}{2}$

$$\log_{1/3}(2x+5)<-2 \iff 2x+5>(\frac{1}{3})^{-2}$$

$2x+5>9 \iff 2x>4 \Rightarrow x>2$, la solución es: $x \in \langle 2,+\infty\rangle$

(6) Resolver la inecuación $\log_2(|x-2|-1)>1$

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente: $x>0$, $b>1$, $N \in R$, $\log_b x>N \iff x>b^N$

para nuestro caso se tiene $|x-2|-1>0$

$|x-2|>1 \iff x-2>1 \lor x-2<-1 \iff x>3 \lor x<1$

$\log_2(|x-2|-1)>1 \iff |x-2|-1>2$

$|x-2|>3 \iff x-2>3 \lor x-2<-3 \iff x>5 \lor x<-1$

La solución es $x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 5,+\infty\rangle$

21.38. CONJUNTOS ACOTADOS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos **cota superior** de un conjunto $A \subset R$ a todo número $k \in R$ tal que $x \leq k$, $\forall x \in A$, ósea que cualquier número que sea mayor o igual que los elementos de A se llama "cota superior de A".

Cuando A tiene alguna cota superior, diremos que el conjunto A es acotado superiormente.

Ejemplo.- Sea $A=\langle -\infty,3\rangle$ y la cota superior $k=5$



Observamos que cualquiera de los números reales mayores que 3 e incluso el 3 es cota superior de A.

De todas estas cotas superiores de A, él número 3 es la menor. Luego daremos la siguiente definición.

b) **DEFINICIÓN.-** A la menor de las cotas superiores de un conjunto $A \subset R$ y acotado superiormente, se le llama supremo de A o mínima cota superior de A y se denota por Sup(A).

OBSERVACIÓN.-

① El supremo de A es también una cota superior de A.

② La menor cota superior k = Supremo de A = Sup A está caracterizada por las condiciones siguientes que es equivalente a la definición.

K = Sup A $\Leftrightarrow \forall$ x $\in$ A y para toda cota superior k' de A, se tiene que $x \le k \le k'$

③ El supremo de un conjunto A, si existe, no es necesariamente un elemento de A, como en el caso de A = <-∞,3> cuyo supremo es 3 no pertenece al conjunto A.

La existencia del supremo para conjuntos acotados superiormente está dado por el siguiente axioma.

21.39. AXIOMA DEL SUPREMO O AXIOMA DE LA MÍNIMA COTA SUPERIOR.-

Todo conjunto A de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene una menor cota superior en R.

Ejemplo.- Demostrar que sí A = <-∞,3> entonces Sup A = 3

<u>Desarrollo</u>

Probaremos esta afirmación por el absurdo.

Supongamos que 3 no es la menor cota superior de A, entonces se puede asegurar que existe una cota superior k de A tal que k < 3 y puesto que $k < \frac{k+3}{2} < 3$

Tomamos $k' = \frac{k+3}{2} \Rightarrow k < k' < 3$ ... (1)

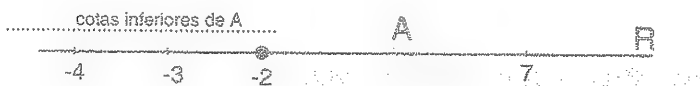
De donde $k' \in A = <-\infty,3>$, pero siendo l cota superior de A debería tenerse $k' < k$ contradiciendo a (1).

La suposición es absurda por lo tanto Sup A = 3.

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos cota inferior de un conjunto $A \subset R$ a todo número $k \in R$ tal que $k \leq x$, $\forall x \in A$. Ósea que cualquier número que sea menor o igual que los elementos de A se llama "cota inferior de A".

Cuando A tiene alguna cota inferior, diremos que el conjunto A es acotado inferiormente.

Ejemplo.- Sea $A = [-2,7>$ y la cota inferior $k = -2$.



Se observa que cualquiera de los números reales menores que –2 e incluso el –2 es cota inferior de A.

De todas estas cotas inferiores de A el número –2 es la mayor. Luego daremos la siguiente definición.

b) **DEFINICIÓN.-** A la mayor de las cotas inferiores de un conjunto $A \subset R$ y acotado inferiormente, se le llama ínfimo de A o máxima cota inferior de A y se denota por inf (A).

OBSERVACIÓN.-

① El ínfimo de A es también una cota inferior de A.

② La mayor cota inferior k = inf(A) = ínfimo de A está caracterizada por la condición.

$K = \inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A$ y para toda cota inferior k' de A se tiene $k' \leq k \leq x$.

③ El ínfimo de un conjunto puede no ser elemento del conjunto dado.

Ejemplo.- El conjunto A = [-2,7> esta acotado superiormente por 8 e inferiormente por −3, además la mayor cota inferior es −2 y la menor cota superior es 7 por lo tanto: Sup(A) = 7 y Inf(A) = -2 de donde Sup(A) ∉ A, Inf(A) ∈ A

Cuando en un conjunto A se tiene que Sup(A) ∈ A entonces el Sup(A) también se le llama el máximo de A y si el Inf(A) ∈ A entonces al ínfimo de A también se le llama el mínimo de A.

c) **DEFINICION.-** Un conjunto A se dice que es acotado, si es a la vez acotado inferiormente y superiormente.

Ejemplo.- El conjunto A = <1,7> U [30,50] es acotado y Sup(A) = 50, Inf(A) = 1.

Ejemplo.- El conjunto A = <-∞,-5] U <1,+∞> no es acotado inferiormente ni superiormente.

21.40. PRINCIPIO ARQUIMEDIANO.-

Si x es un número real positivo entonces existe un número natural n_0 tal que $0 < \frac{1}{n_0} < x$ (o equivalentemente tal que $xn_0 > 1$)

Demostración

Demostraremos por el absurdo. Suponiendo que nx ≤ 1, ∀ n ∈ N

Por lo tanto el conjunto A = {nx / n ∈ N} esta acotado superiormente al menor por k = 1, y por el axioma del supremo el conjunto A posee una menor cota superior k (Sup A) en R que satisface la condición nx ≤ k ≤ 1, ∀ n ∈ N pero siendo x > 0 ⇒ k − x < k y por lo tanto (k − x) no puede ser cota superior de A puesto que k es la menor de todas ellas. Luego existe un elemento de A: $m_1 x$ como $m_1 \in N$ tal que $k - x < m_1 x \le k$ ... (1)

Pues si así no fuese, entonces se tendría que nx < k − x, ∀ nx ∈ A ⇒ k − x seria cota superior de A lo cual es falso.

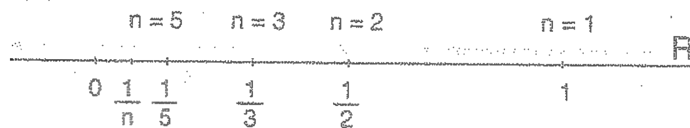
Luego de (1) ⇒ $k < (m_1 + 1)x$ ⇒ k < mx, con $m = (m_1 + 1) \in N$

lo cual es absurdo, pues siendo k = Sup A debería tenerse mx ≤ k, de esta manera el principio queda demostrado por el absurdo.

Ejemplo.- Probar que el conjunto $A = \{\frac{1}{n} / n \in N\}$ es acotado.

Desarrollo

Ubiquemos los elementos de A en una recta para $x = \frac{1}{n}$, $n \in N$.



Ahora encontraremos el supremo y el ínfimo de A como:

$\forall\, n \in N \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow 0 < x = \frac{1}{n} \leq 1$ ... (1)

Cuando n crece los elementos de A se acercan al cero (0) pero sin coincidir con el 0 para $n \in N$ de esta observación se tiene:

$$Sup\,(A) = 1 \in A \quad inf\,(A) = 0 \notin A$$

Probaremos que inf(A) = 0, de (1) se vio que 0 es una cota inferior, si no fuese la mayor existiría otra cota inferior k mayor que 0 y por principio Arquimediano se tiene que existe un $n_0 \in N$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < k$ lo cual es absurdo pues $\frac{1}{n_0} \in A$ y siendo k cota inferior de A debería cumplirse que $k \leq \frac{1}{n_0}$, de manera que Inf A = 0.

21.41. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) La solución de la inecuación cuadrática: $-4x^2 + 4x + 3 > 0$

a) $< \frac{1}{2}, \frac{3}{2} >$ b) $< -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} >$ c) $< -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$ d) $< \frac{3}{2}, \infty >$ e) $< -\infty, \frac{3}{2} >$

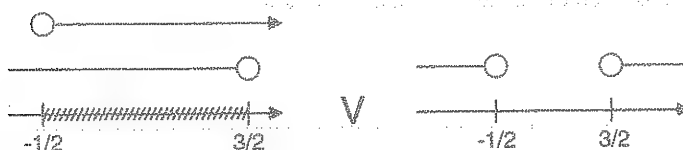
Desarrollo

La inecuación dada expresaremos en la forma: $4x^2 - 4x - 3 < 0$

factorizando $(2x + 1)(2x - 3) < 0$, aplicando la propiedad de números reales:

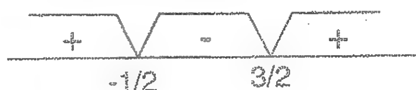
$$(2x+1)(2x-3)<0 \iff (2x+1>0 \ \wedge\ 2x-3<0) \ \vee\ (2x+1<0 \ \wedge\ 2x-3>0)$$

$$\iff \left(x>-\frac{1}{2} \ \wedge\ x<\frac{3}{2}\right) \vee \left(x<-\frac{1}{2} \ \wedge\ x>\frac{3}{2}\right)$$



La solución es: $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$

Otra forma es mediante la naturaleza de las raíces de la ecuación $4x^2-4x-3=0$, de donde $r_1=-\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{3}{2}$



Como la inecuación es de la forma $4x^2-4x-3<0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ la respuesta es **b**

(2) Si la solución de la inecuación $x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12>0$ es $\langle a,b\rangle \cup \langle c,\infty\rangle$ el valor de a + b + c es:

a) -7 b) 7 c) -5 d) -8 e) 8

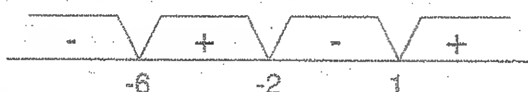
Desarrollo

Aplicaremos el criterio de las raíces de la ecuación: $x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12=0$

1	8	12	-1	-8	-12	1
	1	9	21	20	12	
1	9	21	20	12	0	-2
	-2	-14	-14	-12		
1	7	7	6	0		-6
	-6	-6	-6			
1	1	1	0			

La ecuación que queda es: $x^2+x+1=0$, cuyas raíces son:

$r=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Luego las raíces reales son: $r_1=-6$, $r_2=-2$, $r_3=1$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x \in \langle -6,-2\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$

De donde a = -6, b = -2, c = 1 $\Rightarrow$ a + b + c = -7, la respuesta es **a**

(3) Si la solución de la inecuación $12x^4-56x^3+89x^2-56x+12<0$ es <a,b> $\cup$ <c,d> indica el valor de abcd.

a) 2 b) 3 c) 1 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

Desarrollo

Encontrando las raíces de la ecuación

$12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$ dividiendo entre x^2

$12x^2-56x+89-\frac{56}{x}+\frac{12}{x^2}=0 \Rightarrow 12(x^2+\frac{1}{x^2})-56(x+\frac{1}{x})+89=0$ ... (1)

Sea $z=x+\frac{1}{x} \Rightarrow z^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$

Reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

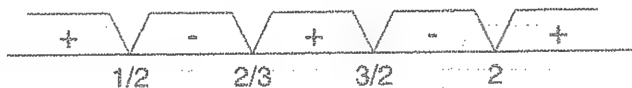
$12(z^2-2)-56z+89=0$, entonces: $12z^2-56z+65=0 \Rightarrow (6z-13)(2z-5)=0$

de donde $z=\frac{13}{6}$, $z=\frac{5}{2}$

para $z=\frac{13}{6} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2-13x+6=0$, de donde $r_1=\frac{3}{2}$, $r_2=\frac{2}{3}$

para $z=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $2x^2-5x+2=0$, de donde $r_3=\frac{1}{2}$; $r_4=2$

ordenando las raíces en la recta numérica



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x\in\ <\frac{1}{2},\frac{2}{3}>\ U\ <\frac{3}{2},2>$, la respuesta es **b**

④ Si la solución de la inecuación x(2x + 1)(x – 2)(2x – 3) > 63 es <-∞,a> ∪ <b,∞>, hallar a + b

a) 2 b) 3 c) $\frac{3}{2}$ d) 4 e) 5

Desarrollo

Hallaremos las raíces de la ecuación:

x(2x + 1)(x – 2)(2x – 3) – 63 = 0, entonces x(2x – 3)(2x + 1)(x – 2) – 63 = 0

$\underbrace{(2x^2-3x)}\underbrace{(2x^2-3x}-2)-63=0$

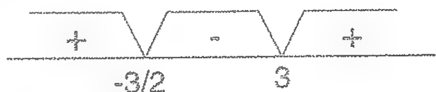
Sea $z=2x^2-3x$ $\Rightarrow$ $z(z-2)-63=0$

$z^2-2z-63=0$ $\Rightarrow$ $(z-9)(z+7)=0$, de donde z = 9, z = -7, entonces:

Para z = 9 $\Rightarrow$ $9=2x^2-3x$ $\Rightarrow$ $2x^2-3x-9=0$, de donde: $r_1=-\frac{3}{2}$, $r_2=3$

Para z = -7 $\Rightarrow$ $-7=2x^2-3x$ $\Rightarrow$ $2x^2-3x+7=0$, de donde: $r=\frac{3\pm\sqrt{47}i}{4}$

Se toma solamente las raíces reales



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in <-\infty, -\frac{3}{2}> U <3, +\infty>$ de donde $a = -\frac{3}{2}$, b =3

Luego $a + b = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$, la respuesta es **c**

(5) Si la solución de la inecuación $\frac{x}{1-x} \leq \frac{x-3}{2-x}$ es <a,b] ∪ <c,∞>. Hallar a + c

a) 2 b) 3 c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) 4

Desarrollo

La inecuación dada se escribe en la forma:

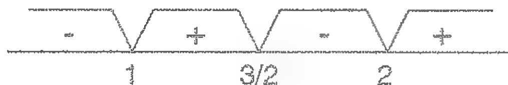
$\frac{x}{1-x} - \frac{x-3}{2-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x(2-x)-(x-3)(1-x)}{(1-x)(2-x)} \leq 0$, simplificando

$\frac{-2x+3}{(1-x)(2-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \geq 0$, entonces la inecuación

$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \geq 0$, es equivalente a la inecuación

(2x – 3)(x – 1)(x – 2) ≥ 0 para x ≠ 1,2 encontrando las raíces de la ecuación

(2x – 3)(x – 1)(x – 2) = 0, se tiene: $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{3}{2}$, $r_3 = 2$



como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in <1, \frac{3}{2}] U <2, +\infty>$ de donde a= 1, $b = \frac{3}{2}$, c =2

Luego a + c = 1 + 2 = 3, la respuesta es **b**

(6) Si la solución de al inecuación $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$ es <a,b> ∪ <c,∞> hallar a + c

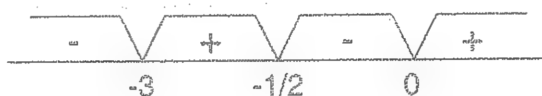
a) -3 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{7}{2}$ e) $\frac{7}{2}$

Desarrollo

La inecuación dada se escribe en la forma:

$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0$, simplificando

$\frac{-6x-3}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)} > 0$, entonces la inecuación $\frac{2x+1}{x(x+3)} > 0$ es equivalente a la inecuación (2x + 1)x(x + 3) > 0, para x ≠ -3,0, ahora encontraremos las raíces de la ecuación: (2x + 1)(x + 3)x = 0, de donde $r_1 = -3$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, $r_3 = 0$.



Como la inecuación P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in <-3, -\frac{1}{2}> U <0, +\infty>$ de donde a = -3, $b = -\frac{1}{2}$, c = 0

Luego a + c = -3 + 0 = -3, la respuesta es **a**

(7) Si x ∈ <-∞,a> ∪ [b,c] ∪ <d,+∞> es la solución de la inecuación $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0$, calcular b + c.

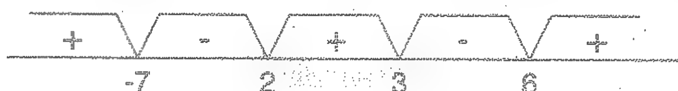
a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

$\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x+7)(x-6)} \geq 0$, esta inecuación es equivalente a:

$(x-2)(x-3)(x+7)(x-6) \geq 0$ para $x \neq -7,6$, ahora encontraremos las raíces de la ecuación.

$(x-2)(x-3)(x+7)(x-6)=0$, donde $r_1 = -7$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 6$.



Como la ecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [2,3] \cup \langle 6, +\infty\rangle$

de donde $b = 2$ y $c = 3$ entonces $b + c = 2 + 3 = 5$, la respuesta es **c**

(3) Si $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup [b,c] \cup [d,e]$ es la solución de la inecuación $\frac{-x^3+x^2+22x-40}{x(x+7)} \geq 0$, calcular a.b

a) 35 b) 25 c) 30 d) 20 e) 15

Desarrollo

La inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{x^3-x^2-22x+40}{x(x+7)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)} \leq 0, \text{ que es equivalente a:}$$

$(x-2)(x-4)(x+5)x(x+7) \leq 0$, para $x \neq -7,0$

ahora encontramos las raíces de la ecuación

$(x-2)(x-4)(x+5)x(x+7)=0$ de donde: $r_1 = -7$, $r_2 = -5$, $r_3 = 0$, $r_4 = 2$, $r_5 = 4$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [-5, 0\rangle \cup [2,4]$

Como $a = -7$, $b = -5$ entonces $a.b = 35$ la respuesta es **a**

(9) Si $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty\rangle$ es la solución de la inecuación $1+\dfrac{24-4x}{x^2-2x-15}>0$, calcular a.b

a) 3 b) 5 c) -15 d) -12 e) 18

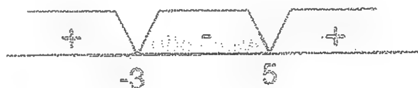
Desarrollo

La inecuación dada escribiremos en la forma: $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x-15}>0 \iff \dfrac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)}>0$

pero $(x-3)^2>0$, $x \neq 3$, entonces: $\dfrac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)}>0 \iff \dfrac{1}{(x-5)(x+3)}>0$ para $x \neq 3$

$\dfrac{1}{(x-5)(x+3)}>0$, $x \neq -3, 5 \iff (x-5)(x+3)>0$, para $x \neq -3, 5$,

ahora encontraremos las raíces de $(x-5)(x+3)=0$, de donde $r_1=-3$, $r_2=5$.



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$

De donde $a = -3$, $b = 5$ entonces $a.b = -15$, la respuesta es c

(10) Si $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup [b, +\infty\rangle$ es la solución de la inecuación $\dfrac{3x+5}{2x+1}\leq 3$, calcular a.b

a) $-\dfrac{1}{3}$ b) 2 c) 3 d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{2}{3}$

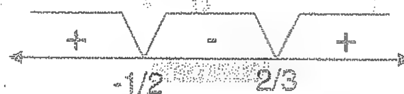
Desarrollo

A la inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{3x+5}{2x+1}-3\leq 0 \iff \frac{-3x+2}{2x+1}\leq 0 \iff \frac{3x-2}{2x+1}\geq 0$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} \geq 0 \iff (3x-2)(2x+1) = \geq 0\ ,\ \text{para}\ \ x \neq -\frac{1}{2}$$

ahora encontramos las raíces de: (3x – 2) (2x + 1) = 0, donde $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = \frac{2}{3}$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle \cup [\frac{2}{3}, +\infty \rangle$

Como $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$ entonces $a.b = -\frac{1}{3}$, la respuesta es **a**

(11) Si x ∈ <-∞,a> ∪ [b,+∞> es la solución de la inecuación $\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \geq 0$, calcular a – b.

a) 6 b) 3 c) 5 d) 8 e) 1

Desarrollo

$$\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \geq 0 \iff \frac{2(x-2)^2(x+3)}{x+6} \geq 0,\ \ (x-2)^2 \geq 0,\ \forall\, x \in R$$

$$\Rightarrow\ \frac{x+3}{x+6} \geq 0 \iff (x+3)(x+6) \geq 0,\ \text{para}\ \ x \neq -6\ \ y\ \ x = 2$$

Luego las raíces de (x + 3)(x + 6) = 0 son $r_1 = -6$, $r_2 = -3$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: x ∈ <-∞,-6> ∪ [-3,+∞>

Como a = -6, b = -3 entonces b – a = 3, la respuesta es **b**

(12) Si x ∈ <-∞, a] ∪ [b, c] ∪ [d, e> ∪ <f, +∞> es la solución de la inecuación $\frac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)} \geq 0$, calcular a + e.

a) 0 b) 1 c) 4 d) 6 e) 2

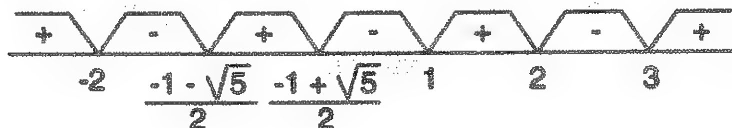
Desarrollo

$$\frac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+x-1)(x^2+x-2)}{(x-3)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2+x-1)(x^2+x-2)}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+x-1)(x^2+x-2)(x-3)(x-2) \geq 0 \text{, para } x \neq 2,3$$

ahora encontramos las raíces de: $(x^2+x-1)(x^2+x-2)(x-3)(x-2)=0$, dé donde

$$r_1=-2,\ r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ r_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ r_4=1,\ r_5=2,\ r_6=3$$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in <-\infty,-2]U[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]U[1,2>U<3,+\infty>$$

como a = -2 y e = 2 entonces a + e = 0, la respuesta es **a**

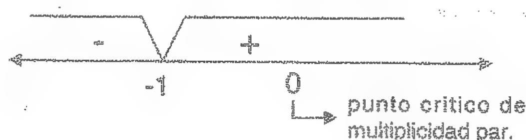
(13) La solución de la inecuación $\frac{x^5-1}{x^4+1} < \frac{x^5-2}{x^4+2}$ es:

a) <-1,∞> b) <-∞,-1> c) <-1,0> d) <-∞,0> e) <0,∞>

Desarrollo

$\forall$ x $\in$ R, $x^4+1>0$, $x^4+2>0$, entonces la inecuación dada se puede escribir en la forma: $(x^5-1)(x^4+2)<(x^5-2)(x^4+1)$, efectuando operaciones y simplificando se tiene: $x^4(x+1)<0$, luego encontrando las raíces de

$x^4(x+1)=0$ se tiene $r_1=-1$, $r_2=0$, multiplicidad 4.



Como la inecuación es de la forma p(x) < 0, la solución es: $x \in \langle -\infty,-1\rangle$

Por lo tanto la respuesta es **b**

(14) La solución de la inecuación $\dfrac{(x^2-2x+4)(x-1)}{(2x+1)(x+4)}<0$ es:

a) $\langle -4,-\frac{1}{2}\rangle$ b) $\langle -\infty,-4\rangle \cup \langle -\frac{1}{2},1\rangle$ c) $\langle -\frac{1}{2},1\rangle$

d) $\langle -4,1\rangle$ e) $\langle 1,+\infty\rangle$

Desarrollo

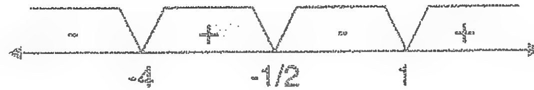
La inecuación $\dfrac{(x^2-2x+4)(x-1)}{(2x+1)(x+4)}<0$, es equivalente a:

$(x^2-2x+4)(x-1)(2x+1)(x+4)<0$, para $x \neq -4, -\dfrac{1}{2}$

ahora encontramos las raíces de la ecuación.

$(x^2-2x+4)(x-1)(2x+1)(x+4)=0$, de donde.

$r_1=-4$, $r_2=-\dfrac{1}{2}$, $r_3=1$, $r_4=1+\sqrt{3}i$, $r_5=1-\sqrt{3}i$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in <-\infty,-4> U <-\frac{1}{2},1>$, la respuesta es **b**

(15) La solución de la inecuación $\frac{x+5}{x-6} \leq \frac{x-1}{x-3}$ es:

a) $<-\infty,\frac{7}{3}] \cup <3,6>$ b) <-∞,3> c) $[\frac{7}{3},6>$ d) <6,∞> e) <-∞,6>

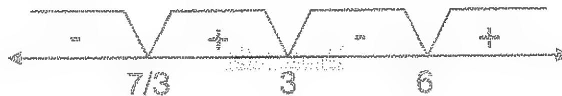
Desarrollo

$\frac{x+5}{x-6} \leq \frac{x-1}{x-3} \iff \frac{x+5}{x-6} - \frac{x-1}{x-3} \leq 0$, efectuando operaciones se tiene:

$\frac{3x-7}{(x-6)(x-3)} \leq 0 \iff (3x-7)(x-6)(x-3) \leq 0,\ x \neq 3,6$

ahora encontramos las raíces de la ecuación

$(3x-7)(x-6)(x-3)=0$, de donde $r_1 = \frac{7}{3}$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in <-\infty,\frac{7}{3}] U <3,6>$, la respuesta es **a**

(16) Si $x \in <-\infty,a> \cup <b,c> \cup <d,e> \cup <f,g> \cup <h,\infty>$ es la solución de la inecuación $\frac{(x-3)(x+2)^2(x+1)(x-4)}{x(x+2)(x^2-3)(x+3)} > 0$, hallar a + g + h.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

$(x+2)^2 > 0$, para $x \neq -2$, la inecuación dada es equivalente.

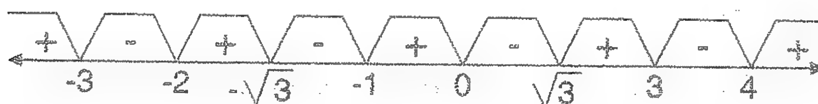
$\dfrac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(x+2)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} > 0$, la cual es equivalente a:

$(x-3)(x+1)(x-4)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2) > 0$, $x \neq 0, -3, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

ahora encontramos las raíces de la ecuación,

$(x+2)(x-3)(x+1)(x-4)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$, de donde

$r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -\sqrt{3}$, $r_4 = -1$, $r_5 = 0$, $r_6 = \sqrt{3}$, $r_7 = 3$, $r_8 = 4$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle \sqrt{3}, 3 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$$

como a = -3, g = 3, h = 4 entonces a + g + h = 4, la respuesta es **b**

(17) La solución de la inecuación $\dfrac{x-2}{x+2} < \dfrac{x^2}{x^2+2}$ es:

a) $\langle -\infty, -2 \rangle$ b) $\langle -\infty, 2 \rangle$ c) $\langle -2, \infty \rangle$ d) $\langle 2, \infty \rangle$ e) ϕ

Desarrollo

$\dfrac{x-2}{x+2} < \dfrac{x^2}{x^2+2} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{x^2}{x^2+2} < 0$, de donde

$\dfrac{-4x^2+2x-4}{(x+2)(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x+2}{(x+2)(x^2+2)} > 0$

$\forall x \in R$, $2x^2 - x + 2 > 0$ y $x^2 + 2 > 0$, entonces se simplifica la inecuación $\frac{1}{x+2} > 0$

Luego $\frac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0$, para $x \neq -2$. La solución es: $\boxed{x \in \langle -2, +\infty \rangle}$

La respuesta es $\boxed{c}$

(18) Si $x \in \langle a,b \rangle \cup \langle c,\infty \rangle$ es la solución de la inecuación $\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1}$, calcular $a + c$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

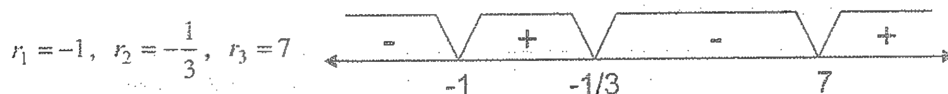
Desarrollo

$\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-7} - \frac{x}{x+1} > 0$, de donde

$\frac{12x+4}{(x-7)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(x - 7)(x + 1) > 0$, para $x \neq -1,7$

ahora encontramos las raíces de la ecuación $(3x + 1)(x - 7)(x + 1) = 0$, de donde

$r_1 = -1$, $r_2 = -\frac{1}{3}$, $r_3 = 7$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece con el signo (+), es decir:

$\boxed{x \in \langle -1, -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle 7, +\infty \rangle}$, como $a = -1$, $c = 7$ entonces $a + c = 6$, la respuesta es $\boxed{c}$

(19) Si $x \in \langle -\infty, a \rangle \cup \langle b,c \rangle \cup \langle d, +\infty \rangle$ es la solución de la inecuación $\frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 5x + 4} > 1$, calcular $a + c$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

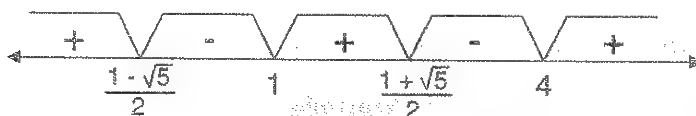
Desarrollo

$\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}>1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}-1>0$, de donde

$\frac{x^2-x-1}{x^2-5x+4}>0 \Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2-5x+4)>0$ para $x \neq 1, 4$;

ahora hallaremos las raíces de la ecuación.

$(x^2-x-1)(x^2-5x+4)=0$, de donde $r_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $r_2=1$, $r_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_4=4$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \rangle \cup \langle 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$

Como $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entonces a + c = 1, la respuesta es **a**

(20) La solución de la inecuación $\frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4}\leq\frac{x+1}{x+4}$ es:

a) <-4,1>   b) <1,4>   c) <-1,1>   d) <1,∞>   e) <-∞,-4>

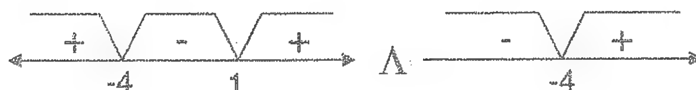
Desarrollo

$\frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4}\leq\frac{x+1}{x+4} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4} \wedge \frac{x}{x+4}\leq\frac{x+1}{x+4}$

$\frac{2x-1}{x+4}-\frac{x}{x+4}<0 \wedge \frac{x}{x+4}-\frac{x+1}{x+4}\leq 0$, de donde $\frac{x-1}{x-4}<0 \wedge \frac{1}{x+4}\geq 0$

estas ecuaciones son equivalentes a:

$(x-1)(x+4)<0 \wedge x+4\geq 0$, para $x \neq -4$ ahora encontraron las raíces de las ecuaciones, $(x-2)(x+4)=0 \wedge x+4=0$, de donde $r_1=-4$, $r_2=1 \wedge r_3=-4$



de acuerdo a la forma de la inecuación la solución es: x ∈ <-4,1> Λ x ∈ [-4,+∞>

∴ x ∈ <-4,1> la respuesta es **a**

(21) La solución de la inecuación $\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3}$ es:

a) <4,11> b) <-∞,4> c) <11,∞> d) <-∞,4> e) <4,∞>

Desarrollo

Aplicaremos la propiedad siguiente: a < b < c ⇔ a < b Λ b < c

$$\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3} \iff \frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} \ \Lambda\ \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3}$$

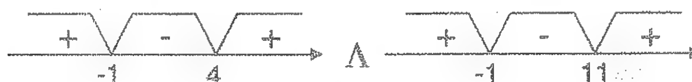
$$\iff \frac{x-3}{x+1} - \frac{1}{5} > 0 \ \Lambda\ \frac{x-3}{x+1} - \frac{2}{3} < 0$$

$$\iff \frac{5x-15-x-1}{5(x+1)} > 0 \ \Lambda\ \frac{3x-9-2x-2}{3(x+1)} < 0$$

$$\iff \frac{x-4}{x+1} > 0 \ \Lambda\ \frac{x-11}{x+1} < 0$$

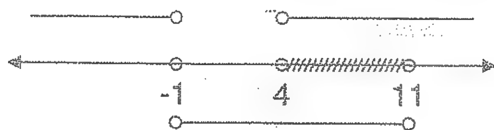
⇔ (x – 4)(x + 1) > 0, x ≠ -1 Λ (x – 11)(x + 1) < 0, x ≠ -1

ahora encontrando las raíces de (x – 4)(x + 1) = 0, de donde $r_1 = -1$, $r_2 = 4$, $r_3 = -1$, $r_4 = 11$



de acuerdo a la forma de la inecuación la solución es:

x ∈ <-∞,-1> U <4,+∞> Λ x ∈ <-1,11>



$\therefore\ x \in <4,11>$

La respuesta es **a**

(22) La solución de la inecuación $\dfrac{x^4}{x^4-16} < \dfrac{5x^2+36}{x^4-16}$ es:

a) $<-\infty,-3>$ b) $<-3,-2>$ c) $<-2,2>$ d) $<-3,-2> \cup <2,3>$ e) $<3,+\infty>$

Desarrollo

A la inecuación dada escribiremos en la forma

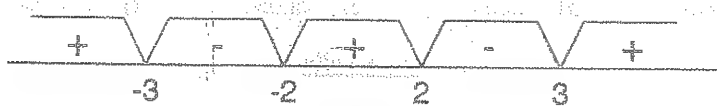
$$\frac{x^4}{x^4-16} - \frac{5x^2+36}{x^4-16} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-16}{x^4-16} < 0\text{, factorizando}$$

$$\frac{(x^2-9)(x^2+4)}{(x^2-4)(x^2+4)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2-4} < 0$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x+2)(x-2) < 0,\text{ para } x \neq -2,2$$

ahora encontrando las raíces de:

$(x+3)(x-3)(x+2)(x-2) = 0$ de donde $r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$



como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los signos (-), es decir: $x \in <-3,-2> \cup <2,3>$ la respuesta es **d**

(23) Si $x \in <a,b> \cup <c,\infty>$ es la solución de la inecuación $(x-9)^{2n}(1-x^3)^{2n+1}(x^4-9) < 0$, si $n \in N$, calcular $a + c$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Desarrollo

Para $x \neq 9$, $(x-9)^{2n} > 0$, $(1-x^3)^{2n} > 0$, para $x \neq 1$.

Entonces a la inecuación dado se puede simplificar, es decir: $(1-x^3)(x^4-9) < 0$

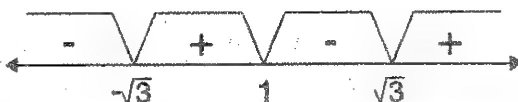
Factorizando $(x-1)(x^2+x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3) > 0$, $x \neq 1,9$

como $\forall x \in R$, $x^2+x+1 > 0$, $x^2+3 > 0$

entonces $(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0$, $x \neq 1,9$

ahora encontrando las raíces de: $(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$

de donde: $r_1 = -\sqrt{3}$, $r_2 = 1$, $r_3 = \sqrt{3}$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x \in \langle -\sqrt{3}, 1 \rangle U \langle \sqrt{3}, +\infty \rangle - \{9\}$

Como $a = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$ entonces a + c = 0, la respuesta es **a**

(24) Dada la inecuación $\frac{x+a}{x-a} > \frac{x+b}{x-b}$; con -a > -b > 0 entonces uno de los intervalos solución es:

a) <0,∞> b) <a,b> c) <a,0> d) <-∞,b> e) <b,0>

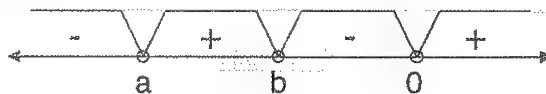
Desarrollo

Como -a > -b > 0 entonces a < b < 0 luego a < b ⇒ (a − b) < 0

$\frac{x+a}{x-a} > \frac{x+b}{x-b} \Leftrightarrow \frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} > 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)x}{(x-a)(x-b)} > 0$ de donde

$2(a-b)\frac{x}{(x-a)(x-b)} > 0$, como (a − b) < 0 entonces $\frac{x}{(x-a)(x-b)} < 0$

$\frac{x}{(x-a)(x-b)} < 0 \Leftrightarrow x(x-a)(x-b) < 0$, $x \neq a,b$



como $\frac{x}{(x-a)(x-b)}<0$, la solución de la ecuación de los intervalos donde esta el signo (-) es decir: $x \in \langle -\infty,a\rangle \cup \langle b,0\rangle$, como una de las solución es $\langle b,0\rangle$ la respuesta **e**

(25) Determinar el conjunto solución de la inecuación $\frac{3}{1-x}\le 2$

a) $\{x\in R/x\le -\frac{1}{2}\}\wedge\{x\in R/x>1\}$ **b)** $\{x\in R/x<1\}\wedge\{x/x\ge -\frac{1}{2}\}$

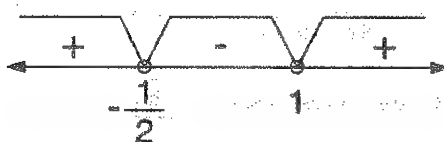
c) $\{x\in R/x\le \frac{1}{2}\}\cup\{x\in R/x>\frac{1}{2}\}$ **d)** $\{x\in R/x\le -\frac{1}{2}\}\cup\{x\in R/x>1\}$

e) $\{x\in R/x<-\frac{1}{2}\}\cup\{x\in R/x>1\}$

Desarrollo

$$\frac{3}{1-x}\le 2 \Leftrightarrow 2-\frac{3}{1-x}\ge 0 \Leftrightarrow 2+\frac{3}{x-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1}\ge 0$$ cuyos puntos críticos es $-\frac{1}{2}$ y 1



como $\frac{2x+1}{x-1}\ge 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x\in\langle -\infty,-\frac{1}{2}]\cup\langle 1,+\infty\rangle$, la respuesta es **d**

(26) Hallar el valor de (a – b) si se cumple $\frac{11}{a}\le\frac{4+x}{8x+16}\le\frac{3}{b}$; $\forall x \in [-1,7]$

a) 8 b) 16 c) 32 d) 64 e) 128

Desarrollo

A la expresión $\frac{4+x}{8x+16}$ expresamos en la forma siguiente:

$$\frac{4+x}{8x+16}=\frac{1}{8}[\frac{4+x}{x+2}]=\frac{1}{8}[1+\frac{2}{x+2}]$$

como $x \in [-1,7] \Rightarrow -1 \le x \le 7$, sumando 2

$1 \le x+2 \le 9$, invirtiendo

$\frac{1}{9} \le \frac{1}{x+2} \le 1$, multiplicando por 2

$\frac{2}{9} \le \frac{2}{x+2} \le 2$, sumando 1

$\frac{11}{9} \le 1+\frac{2}{x+2} \le 3$, multiplicando por $\frac{1}{8}$

$\frac{11}{72} \le \frac{1}{8}(1+\frac{2}{x+2}) \le \frac{3}{8}$ de donde

$\frac{11}{72} \le \frac{x+4}{8x+16} \le \frac{3}{8}$ entonces $a=72$, $b=8$

como $a-b=72-8=64$, la respuesta es **b**

(27) Si $\frac{2x+5}{-3}$ pertenece al intervalo $[5,8>$, entonces el intervalo al cual pertenece $\frac{x+1}{x+2}$ es:

a) $<\frac{27}{25},\frac{9}{7}]$ b) $[\frac{27}{25},\frac{9}{7}>$ c) $<\frac{27}{25},\frac{9}{8}]$ d) $[\frac{24}{23},\frac{9}{8}>$ e) $<-\frac{7}{8},-\frac{23}{25}]$

Desarrollo

Como $\frac{2x+5}{-3} \in [5,8> \Rightarrow 5 \le \frac{2x+5}{-3} < 8$, multiplicando por -3

$\Rightarrow$ -24 < 2x + 5 ≤ -15, restando 5

$\Rightarrow$ -29 < 2x ≤ -20

$$\Rightarrow \quad -\frac{29}{2} < x \leq -10$$

además $\frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$ (se obtiene dividiendo)

como $-\frac{29}{2} < x \leq -10$, sumando 2

$-\frac{25}{2} < x+2 \leq -8$, invirtiendo

$-\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+2} < -\frac{2}{25}$, multiplicando por -1

$\frac{2}{25} < -\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{8}$, sumando 1

$\frac{27}{25} < 1 - \frac{1}{x+2} \leq \frac{9}{8}$, de donde $\frac{27}{25} < \frac{x+1}{x+2} \leq \frac{9}{8}$ entonces tenemos que

$\frac{x+1}{x+2}$ pertenece al intervalo $< \frac{27}{25}, \frac{9}{8}]$; la respuesta es **c**

(28) Sea x un número entero positivo múltiplo de 17, que satisface la desigualdad $0 < \frac{5(x-120)}{x} < 1$, hallar el valor de x.

a) 17 b) 51 c) 136 d) 170 e) 119

Desarrollo

$0 < \frac{5(x-120)}{x} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{5x-600}{x} < 1$, separando

$$\Rightarrow \quad 0 < 5 - \frac{600}{x} < 1, \text{ restando 5}$$

$\Rightarrow\quad -5 < -\dfrac{600}{x} < -4$, multiplicando por -1

$\Rightarrow\quad 4 < \dfrac{600}{x} < 5$, invirtiendo

$\Rightarrow\quad \dfrac{1}{5} < \dfrac{x}{600} < \dfrac{1}{4}$, de donde $\quad 120 < x < 150$

como $x = \overset{o}{17}$, entonces x = 136, la respuesta es **c**

(29) ¿Qué valores de x mayores de $\dfrac{1}{3}$ satisfacen la inecuación siguiente? $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1}$

a) $\{x \in R / -\infty < x < -1\} \cup \{x \in R / \frac{1}{3} < x < 3\}$ **b)** $\{x \in R / \frac{1}{3} < x < 3\}$

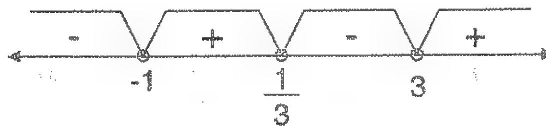
c) $\{x \in R / -1 < x \le 3\}$ **d)** $\{x \in R / -1 \le x \le \frac{1}{3}\}$ **e)** $\{x \in R / -\infty < x < \infty\}$

Desarrollo

$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1} \iff \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3x-1} < 0$, operando

$\iff \dfrac{x-3}{(x+1)(3x-1)} < 0$, para $x \ne 1$, $x \ne \dfrac{1}{3}$

$\iff (x-3)(x+1)(3x-1) < 0$, los puntos críticos son 3, -1, $\dfrac{1}{3}$



para la solución se toma los intervalos donde aparece el signo (-), $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle \frac{1}{3}, 3 \rangle$ pero la condición $x > \frac{1}{3}$, entonces la solución es $\{x \in R / \frac{1}{3} < x < 3\}$, la respuesta es **b**

(30) Si x es un número real que verifica $\frac{4x-1}{x+3}-2\geq\frac{9}{x+3}$, este número pertenece al conjunto.

a) <-8,-3] ∪ <8,∞> b) <-∞,3> ∪ [8,+∞> c) <-∞,-3] ∪ <8,+∞>

d) <-∞,-3] ∪ [8,+∞> e) <-∞,+∞>

Desarrollo

$\frac{4x-1}{x+3}-2\geq\frac{9}{x+3} \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x+3}-2-\frac{9}{x+3}\geq 0$, simplificando

$$\Leftrightarrow \frac{4x-1-2(x+3)-9}{x+3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-16}{x+3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x+3}\geq 0, \text{ para } x\neq -3$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x+3)\geq 0, \; x\neq -3$$

aplicando el método de los puntos críticos, donde -3 y 8 son dichos puntos



como $(x-8)(x+3)\geq 0$, $x\neq -3$, la solución es los intervalos que contienen el signo (+) es decir: $x \in$ <-∞,-3> ∪ [8,+∞>, la respuesta es **b**

(31) ¿Para qué valores de x se verifica la inecuación? $1<\frac{3x+10}{x+7}<2$

a) $-\frac{1}{2}<x<7$ b) $-1<x<5$ c) $-\frac{3}{2}<x<4$ d) $0<x<4$ e) $1<x<5$

Desarrollo

Como $\frac{3x+10}{x+7}=\frac{3(x+7)-11}{x+7}=3-\frac{11}{x+7}$

$1<\dfrac{3x+10}{x+7}<2 \quad \Leftrightarrow \quad 1<3-\dfrac{11}{x+7}<2$, restando 3

$\Leftrightarrow \quad -2<-\dfrac{11}{x+7}<-1$, multiplicando por -1

$\Leftrightarrow \quad 1<\dfrac{11}{x+7}<2$, invirtiendo

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}<\dfrac{x+7}{11}<1$, multiplicando por 11

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{11}{2}<x+7<11$, restando 7

$\Leftrightarrow \quad -\dfrac{3}{2}<x<4 \Rightarrow x\in\left<-\dfrac{3}{2},4\right>$ por lo tanto la respuesta es **c**

(32) Determinar en que conjunto de números negativos debe estar contenido x para que: $\dfrac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+5)}>0$

a) $<-\sqrt{12},-\sqrt{5}>$ b) $<-\infty,-\sqrt{12}>$ c) $<-\sqrt{12},0>$

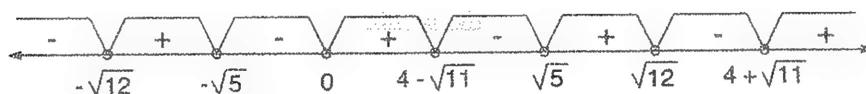
d) $<-\infty,-\sqrt{5}>$ e) $<-\sqrt{5},0>$

Desarrollo

$$\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+5)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-5)(x^2-12)}{x[(x-4)^2-11]}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{x(x-4+\sqrt{11})(x-4-\sqrt{11})}>0$$

aplicando el método de los puntos críticos se tiene:



como $x<0$ entonces $x\in<-\sqrt{12},-\sqrt{5}>$, por lo tanto la respuesta es **a**

(33) Hallar los valores de "a" de tal manera que: $-3 < \frac{x^2-(a+5)x+1}{x^2+x+1} < 3$, sea cierto.

a) <4,10>   b) <-10,-4>   c) <0,8>   d) <-∞,4>   e) <-∞,∞>

Desarrollo

Se conoce que $\forall$ x $\in$ R, $x^2+x+1>0$, por lo tanto la expresión dada se puede multiplicar por x^2+x+1

$$-3 < \frac{x^2-(a+5)x+1}{x^2+x+1} < 3 \Leftrightarrow -3(x^2+x+1) < x^2-(a+5)x+1 < 3(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow -3(x^2+x+1) < x^2-(a+5)x+1 \quad \wedge \quad x^2-(a+5)x+1 < 3(x^2+x+1)$$

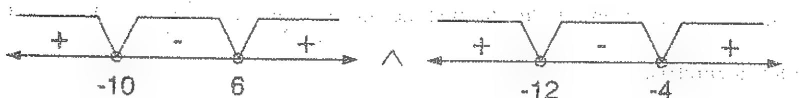
$$\Leftrightarrow \underbrace{4x^2-(a+2)x+4>0}_{\text{trinomio positivo}} \wedge \underbrace{2x^2+(a+8)x+2>0}_{\text{trinomio positivo}}$$

esto quiere decir que el discriminante es negativo

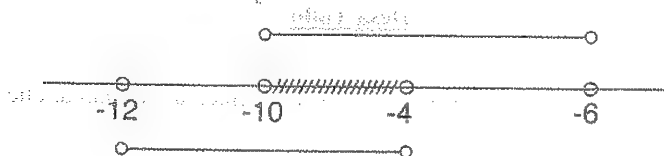
$$\Delta=(a+2)^2-64<0 \qquad \wedge \qquad \Delta=(a+8)^2-16<0$$

$$a^2+4a-60<0 \qquad \wedge \qquad a^2+16a+48<0$$

$$(a+10)(a-6)<0 \qquad \wedge \qquad (a+12)(a+4)<0$$



a $\in$ <-10,6> $\wedge$ a $\in$ <-12,-4>



Luego a $\in$ <-10,-4>, la respuesta es **b**

(34) La solución de la inecuación $\frac{x^2+x+18}{2-x}+x-1>0$ es:

a) <-∞,-4> b) <2,∞> c) <-4,2> d) <-2,4> e) <-4,-2>

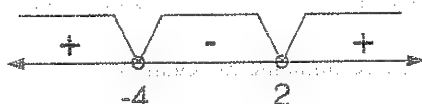
Desarrollo

$$\frac{x^2+x+18}{2-x}+(x-1)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+18+(x-1)(2-x)}{2-x}>0, \text{ efectuando}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+18+3x-2-x^2}{2-x}>0, \text{ simplificando}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+16}{2-x}>0, \text{ simplificando}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{x-2}<0, \text{ por el método de los puntos críticos}$$



como $\frac{x+4}{x-2}<0$ se toma el intervalo donde aparece el signo (+)

∴ x ∈ <-4,2>, la respuesta es **c**

(35) De la solución obtenida de la inecuación $\frac{3x+2}{x-5}+2<\frac{4x-7}{x-5}$, indicar la suma de los números enteros.

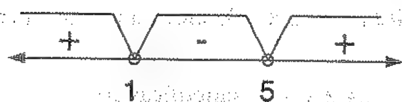
a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

$$\frac{3x+2}{x-5}+2<\frac{4x-7}{x-5} \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x-5}+2-\frac{4x-7}{x-5}<0, \text{ efectuando operaciones}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+2+2(x-5)-(4x-7)}{x-5}<0, \text{ simplificando}$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-5}<0$, aplicando el criterio de los puntos críticos



como $\frac{x-1}{x-5}<0$ (es negativo)

se toma el intervalo donde aparece el signo (-) es decir: $x \in <1,5>$ o $1 < x < 5$ y los números enteros dentro de este intervalo son 2, 3, 4 cuya suma es 2 + 3 + 4 = 9, por lo tanto la respuesta es **d**

36 Determinar en que conjunto de los números negativos debe estar contenido x para que: $(x-4)^2(2x+3)^3(1-x)(1-2x)>0$

a) $<-\frac{3}{2},0>$ **b)** $<-\infty,-\frac{3}{2}>$ **c)** $<-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}>$ **d)** $<-2,-1>$ **e)** ϕ

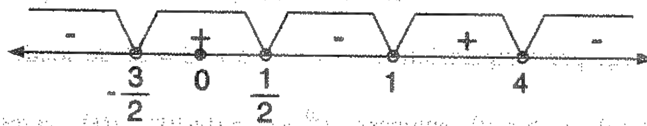
Desarrollo

$(x-4)^2(2x+3)^3(1-x)(1-2x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+3)(1-x)(1-2x)>0;\ x \neq 4$

$\Leftrightarrow \quad (2x+3)(x-1)(2x-1)>0;\ x \neq 4$

aplicando el criterio de los puntos críticos, donde los números críticos son: $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1$

Luego tenemos



La solución es $x \in <-\frac{3}{2},\frac{1}{2}> \cup <1,+\infty> -\{4\}$

Como $x<0$ entonces $x \in <-\frac{3}{2},0>$, la respuesta es **a**

37 Dado $\frac{6x-3}{2}-(2x+6) \geq \frac{x-3}{4}$, halle el mínimo valor entero de x

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11 **e)** 12

Desarrollo

$\frac{6x-3}{2}-(2x+6)\geq\frac{x-3}{4}$ $\Leftrightarrow$ $2(6x-3)-4(2x+6)\geq x-3$, efectuando las operaciones

$\Leftrightarrow$ $12x-6-8x-24\geq x-3$, simplificando

$\Leftrightarrow$ $3x-30\geq -3$ $\Leftrightarrow$ $3x\geq 27$

de donde $x\geq 9$ entonces el menor valor de x es: $x=9$, la respuesta es **b**

38 Si $(-x+3)\in[-6,5>$ y $(2x+5)\in\,<a+1,b+13]$, calcular $a^{20}+b^2$

a) 0 b) 1 c) 10 d) 100 e) 125

Desarrollo

$(-x+3)\in[-6,5>$ $\Leftrightarrow$ $-6\leq -x+3<5$

$\Leftrightarrow$ $-9\leq -x<2$

$\Leftrightarrow$ $-2<x\leq 9$

$\Leftrightarrow$ $-4<2x\leq 18$

$\Leftrightarrow$ $1<2x+5\leq 23$

$\Leftrightarrow$ $2x+5\in\,<1,23]=\,<a+1,b+13]$

luego por comparación $a+1=1$ $\wedge$ $b+13=23$ de donde

$a=0$ $\wedge$ $b=10$ entonces $a^{20}+b^2=0+10^2=100$, la respuesta es **d**

39 Indique el intervalo al cual pertenece "m", si la desigualdad: $\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1}<m$, se verifica para todo "x" real

a) <3,9> b) <5,∞> c) <3,∞> d) <-∞,2> e) <-∞,3>

Desarrollo

Se conoce que: $\forall x\in R$; $x^2-x+1>0$, entonces se tiene:

$\dfrac{4+x-4x^2}{x^2-x+1}<m \quad \Leftrightarrow \quad 4+x-4x^2<m(x^2-x+1)$, agrupando

$\Leftrightarrow \quad (m+4)x^2-(m+1)x+m-4>0$, es valido si

$\forall\, x \in R;\ m+4>0 \ \wedge\ (m+1)^2-4(m+4)(m-4)<0$

$\Leftrightarrow \quad m>-4 \ \wedge\ 3m^2-2m-65>0$

$\Leftrightarrow \quad m>-4 \ \wedge\ (3m+13)(m-5)>0$

$\Leftrightarrow \quad m>-4 \ \wedge$

+ $-\dfrac{13}{3}$ -   5   +

$\Leftrightarrow \quad m>-4 \ \wedge\ (m<-\dfrac{13}{3} \ \vee\ m>5)$

$-\dfrac{13}{3}$ -4   -5

$\Leftrightarrow \quad m>4 \ \wedge\ (m<-\dfrac{13}{3} \vee m>5) \quad \Leftrightarrow m>5$

$\Leftrightarrow \quad m \in \langle 5,\infty \rangle$, la respuesta es **b**

(40) Resolver la siguiente desigualdad: $\dfrac{10x-3}{x+5}>9$

a) $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 48,\infty\rangle$

b) $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 5,48\rangle$

c) $x \in \langle -\infty,-4\rangle \cup \langle 48,\infty\rangle$

d) $x \in [-5,5]$

e) $x \in \langle 5,\infty\rangle$

Desarrollo

$\dfrac{10x-3}{x+5}>9 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{10x-3}{x+5}-9>0$, efectuando la operación

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{10x-3-9(x+5)}{x+5}>0$, simplificando

$\Leftrightarrow \quad \frac{x-48}{x+5} > 0$, aplicando puntos críticos



Como $\frac{x-48}{x+5} > 0$, se toma los intervalos donde está el signo (+)

$x \in <-\infty,-5> \cup <48,+\infty>$, la respuesta es **a**

(41) Si $x \in <1,2] \Leftrightarrow x^2 - 2x \in < m, n]$, hallar $n - m$.

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 2 **e)** -2

Desarrollo

Si $x \in <1,2] \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad 0 < x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 < (x-1)^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad -1 < (x-1)^2 - 1 \leq 0$, efectuando la operación

$\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 - 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x \in < -1, 0] = < m, n] \quad \Rightarrow m = -1, n = 0$

como $n - m = 0 - (-1) = 1$, la respuesta es **c**

(42) Si $x > 0$, $a > b > 0$ y $k = \frac{a+x}{b+x}$, entonces:

a) $k > 1$ **b)** $k > 2$ **c)** $1 < k < \frac{a}{b}$ **d)** $2 < k < \frac{a}{b}$ **e)** $k = 8$

Desarrollo

Como $x > 0 \wedge a > b > 0$ entonces se tiene:

$a > b \Rightarrow a + x > b + x > 0 \ \wedge \ ax > bx$

$$\Rightarrow \frac{a+x}{b+x} > 1 \ \wedge \ ab + ax > ab + bx$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a+x}{b+x} \ \wedge \ a(b+x) > b(a+x)$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a+x}{b+x} \ \wedge \ \frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a+x}{b+x} \ \wedge \ \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b} \Rightarrow 1 < k < \frac{a}{b}$$ por lo tanto la respuesta es **c**

(43) La solución de la inecuación $\sqrt{x^2 - x - 2} < 5 - x$ es:

a) <-∞,-1] ∪ [2,3> b) <-1,2> c) <-∞,2> d) <-1,3> e) <2,3>

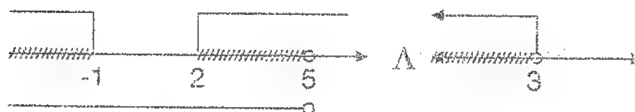
Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \ \Lambda \ [Q(x) > 0) \ \Lambda \ (P(x) < Q^2(x)])$

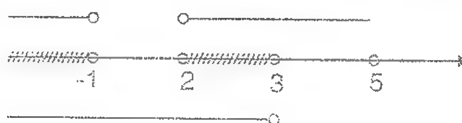
$$\sqrt{x^2 - x - 2} < 5 - x \Leftrightarrow (x^2 - x - 2 \geq 0 \ \Lambda \ [5 - x > 0 \ \Lambda \ x^2 - x - 2 < (5-x)^2])$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \geq 0 \ \Lambda \ [5 - x > 0 \ \Lambda \ x^2 - x - 2 < 25 - 10x + x^2])$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \ \Lambda \ (x < 5 \ \Lambda \ x < 3)$$, efectuando gráficamente



x ∈ (<-∞,-1] U [2,5]) Λ x ∈ <-∞,3>. efectuando la intersección



La solución es: x ∈ <-∞,-1] U [2,3> luego la respuesta es **a**

(44) La solución de la inecuación $\sqrt{24-2x-x^2} < x$ es:

a) $<-\infty,\frac{12}{7}>$ b) $<\frac{12}{7},\infty>$ c) <7,12> d) <-12,-7> e) <7,∞>

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) > 0 \wedge P(x) < Q^2(x)])$$

$$\sqrt{24-2x-x^2} < x \Leftrightarrow (24-2x-x^2 \geq 0 \wedge [x > 0 \wedge 24-2x-x^2 < x^2])$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x \leq 24 \wedge [x > 0 \wedge 2x^2+2x > 24])$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)^2 \leq 25 \wedge [x > 0 \wedge (x+\frac{1}{2})^2 > \frac{49}{4}])$$

$$\Leftrightarrow (-6 \leq x \leq 4 \wedge [x > 0 \wedge (x > 3 \vee x < -4)])$$

$\Leftrightarrow$ x ∈ [0,4] ∧ x ∈ <-∞, -4> U <3,+∞>

∴ x ∈ <3,4] la respuesta es **b**

(45) La solución de la inecuación $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}$ es:

a) [-1,0> b) [0.1> c) [-1,1] d) [1,∞> e) <-∞,-1]

Desarrollo

$$\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x} \Leftrightarrow (1-x \geq 0 \wedge x+5 \geq 0) \wedge (\sqrt{1-x})^2 \leq (\sqrt[4]{x+5})^2$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 1 \wedge x \geq -5) \wedge (1-x \leq \sqrt{x+5}) \quad \ldots (1)$$

$$\sqrt{x+5} \geq 1-x \Leftrightarrow [(x+5 \geq 0 \wedge 1-x \leq 0) \vee (x+5 \geq 0 \wedge x+5 > (1-x)^2]$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -5 \wedge x \geq 1) \vee (x \geq -5 \wedge x+5 > 1-2x+x^2)]$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -5 \wedge x \geq 1) \vee (x \geq -5 \wedge x^2-3x-4 \leq 0)]$$

$\Leftrightarrow \; [(x \geq -5 \; \Lambda \; x \geq 1) \vee (x \geq -5 \; \Lambda \; x \in [-1,4])]$

$\Leftrightarrow \; [(x \geq -5 \; \Lambda \; x \geq 1) \vee \; x \in [-1,4]]$

$\Leftrightarrow \; [x \geq -5 \; \Lambda \; x \geq -1] \; \Rightarrow \; x \geq -1 \; \Rightarrow \; x \in [-1, \infty >$ ... (2)

ahora (2) en (1) se tiene: $(x \leq 1 \; \Lambda \; x \geq -5) \; \Lambda \; x \in [-1,+\infty>$

$x \in [-5, 1] \; \Lambda \; x \in [-1,+\infty>$ $\therefore \; x \in [-1,1]$ la respuesta es **c**

(46) La solución de la inecuación $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x-2} > 9$ es:

a) $<-\infty,0>$ b) $[0,2]$ c) $<\frac{153-\sqrt{17577}}{2}, \frac{153+\sqrt{17577}}{2}>$

d) ϕ e) $[0,10]$

Desarrollo

Calculando el campo de existencia $3x+7 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \; \Leftrightarrow \; x \geq -\frac{7}{3} \; \Lambda \; x \geq 2$

por lo tanto $x \in [2,+\infty>$ es el campo de existencia

$\sqrt{3x+7} > 9+\sqrt{x-2} \; \Leftrightarrow \; x \in [2,+\infty > \Lambda \; [3x+7 < 81+18\sqrt{x-2}+x-2]$

$\Leftrightarrow \; x \in [2,+\infty > \Lambda \; (x-36 < 9\sqrt{x-2})$

$\Leftrightarrow \; x \in [2,+\infty > \Lambda \; x^2-153x+1458 < 0$

$\Leftrightarrow \; x \in [2,+\infty > \Lambda \; (x-\frac{153}{2})^2 < \frac{17577}{4}$

$\Leftrightarrow \; x \in [2,+\infty > \wedge \frac{153-\sqrt{17577}}{2} < x < \frac{153+\sqrt{17577}}{2}$

$x \in <\frac{153-\sqrt{17577}}{2}, \frac{153+\sqrt{17577}}{2}>$ la respuesta es **c**

(47) La solución de la inecuación $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \geq 0$ es:

a) $[2,\frac{\sqrt{37}-1}{2}>$ b) $[2,\sqrt{37}>$ c) [2,3] d) <-∞,2> e) <2,∞>

Desarrollo

Calculando el campo de existencia

$(x-1 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0) \wedge (9-x^2 \geq 0 \wedge x \geq 0)$

$(x \geq 1 \wedge x \geq 2) \wedge (x^2 \leq 9 \wedge x \geq 0)$

$(x \geq 1 \wedge x \geq 2) \wedge (-3 \leq x \leq 3 \wedge x \geq 0)$

$x \geq 2 \wedge 0 \leq x \leq 3$, de donde $x \in [2,3]$ es el campo de existencia.

Como $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2} > 0$, $\forall x \in [2,3]$

$$\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}} \geq 0.\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}$$

simplificando $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2}-\sqrt{x} > 0$

de donde $\sqrt{x} < \sqrt{9-x^2} \Rightarrow x < 9-x^2$

$x^2+x-9<0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2 < \frac{37}{4}$ (completando cuadrados)

$$(x+\frac{1}{2})^2 < \frac{37}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{37}}{2} < x+\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{37}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{37}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{37}-1}{2}$$

Luego la solución es: $x \in < -\frac{\sqrt{37}+1}{2}, \frac{\sqrt{37}-1}{2} > \wedge [2,3]$

$\therefore x \in [2,\frac{\sqrt{37}-1}{2}>$ la respuesta es **a**

(48) La solución de la inecuación $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$ es:

a) $<-\frac{\sqrt{5}+3}{2},1]$ b) $[-\sqrt{5},2]$ c) $<-\infty,1]$ d) $[-5,3]$ e) $<1,+\infty>$

Desarrollo

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x} \Leftrightarrow (2-\sqrt{3+x}\ge 0 \wedge 4+x\ge 0) \wedge (2-\sqrt{3+x}<4+x)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3+x}\le 2 \wedge x\ge -4) \wedge (\sqrt{3+x}>-x-2) \quad \ldots (1)$$

$$\sqrt{3+x}\le 2 \Leftrightarrow (3+x\ge 0 \wedge 3+x\le 4)$$

$$\Leftrightarrow (x\ge -3 \wedge x\le 1) \Rightarrow x\in[-3,1] \quad \ldots (2)$$

$$\sqrt{3+x}>-x-2 \Leftrightarrow x+3\ge 0 \wedge [-x-2<0 \vee (x+3\ge 0 \wedge x+3>(x+2)^2)]$$

$$\Leftrightarrow x\ge -3 \wedge [x>-2 \vee (x\ge -3 \wedge x^2+3x+1<0)]$$

$$\Leftrightarrow x\ge -3 \wedge [x>-2 \vee (x\ge -3 \wedge (x+\tfrac{3}{2})^2<\tfrac{5}{4})]$$

$$\Leftrightarrow x\ge -3 \wedge [x>-2 \vee (x\ge -3 \wedge -\frac{\sqrt{5}+3}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-3}{2})]$$

$$\Leftrightarrow x\ge -3 \wedge [x>-2 \vee x\in<-\frac{\sqrt{5}+3}{2},\frac{\sqrt{5}-3}{2}>]$$

$$\Leftrightarrow x\ge -3 \wedge x\in<-\frac{\sqrt{5}+3}{2},+\infty>$$

$$x\in<-\frac{\sqrt{5}+3}{2},+\infty> \quad \ldots (3)$$

Luego de (2), (3) en (1) se tiene:

$$\sqrt{2-\sqrt{x+3}}<\sqrt{4+x} \Leftrightarrow (x\in[-3,1] \wedge x\ge -4) \wedge x\in<-\frac{\sqrt{5}+3}{2},+\infty>$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [-3,1] \wedge x \in <-\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty>$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x \in <-\frac{\sqrt{5}+3}{2}, 1]}$$ la respuesta es **a**

(49) La solución de la inecuación $\sqrt{4-x}+\sqrt[4]{x+2} \geq 0$ es:

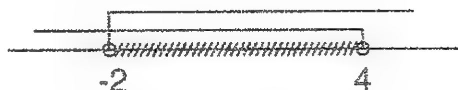
a) [2,4] b) <-∞,-2] c) [-2,4] d) [2,∞> e) [4,∞>

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\sqrt[2n]{x}+\sqrt[2n]{y} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$

$\sqrt{4-x}+\sqrt[4]{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 4-x \geq 0 \wedge x+2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x \geq -2$



$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [-2,4]$, la respuesta es **c**

(50) La solución de $\sqrt{x^2-x-12} > -5$ es:

a) <-3,4] b) <-∞,-3] c) [4,∞> d) <-∞,-3] ∪ [4,∞> e) <-∞,4]

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\forall\, b < 0;\ \sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq 0$

$\sqrt{x^2-x-12} > -5 \Leftrightarrow x^2-x-12 \geq 0$, factorizando

$\Leftrightarrow (x-4)(x+3) \geq 0$



Luego $x \in$ <-∞,-3] ∪ [4,∞>, la respuesta es **c**

(51) La solución de la inecuación $\sqrt{x+6} < x$ es:

a) <-∞,3> b) <3,∞> c) <-3,3> d) [-6,3> e) <-∞,-6>

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\sqrt{x} < y \iff (x \geq 0 \wedge y > 0) \wedge x \leq y^2$

$\sqrt{x+6} < x \iff (x+6 \geq 0 \wedge x > 0) \wedge x+6 < x^2)$

$\iff (x \geq -6 \wedge x > 0) \wedge x^2 - x - 6 > 0$

$\iff x > 0 \wedge (x-3)(x+2) > 0$

$\iff x > 0 \wedge$ [sign diagram: + on $\langle -\infty,-2\rangle$, − on $\langle -2,3\rangle$, + on $\langle 3,\infty\rangle$]

$\iff x > 0 \wedge x \in \langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 3,\infty\rangle$; interceptando

[number line with points −2, 0, 3]

Luego $x \in \langle 3,\infty\rangle$ por lo tanto la respuesta es **b**

(52) La solución de la inecuación $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$ es:

a) $\langle 2,\infty\rangle$ b) $\langle 1,2\rangle$ c) $\langle 1,4\rangle$ d) $\langle 4,\infty\rangle$ e) $\langle -\infty,2\rangle$

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\forall\ b \geq 0;\ \sqrt{a} > b \iff (a \geq 0 \wedge a > b^2)$

Calcularemos el conjunto de valores de x admisibles

$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x-2)(x-1) \geq 0$ [sign diagram: + on $\langle -\infty,1]$, − on $[1,2]$, + on $[2,+\infty\rangle$]

Luego $x \in \langle -\infty,1] \cup [2,+\infty\rangle$

Analizando primero para el caso en que $2 - x < 0$ de donde $x > 2$ se observa que para $x > 2$, el segundo miembro es negativo, es decir que la inecuación se verifica para

$x \in \langle 2,+\infty\rangle \cap (\langle -\infty,1] \cup [2,\infty\rangle) = \langle 2,+\infty\rangle$ Por lo tanto $S_1 = \langle 2,+\infty\rangle$

Ahora analizamos para $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

$$\sqrt{x^2-3x+2}>2-x \iff 2-x\geq 0 \ \wedge \ x^2-3x+2>(2-x)^2$$

$$\iff x\leq 2 \ \wedge \ x-2>0$$

$$\iff x\leq 2 \ \wedge \ x>2 \quad \text{luego} \quad S_2=\phi$$

Luego la solución de la inecuación es: $S_1 \cup S_2$ de donde

<2,+∞> ∪ ϕ = <2,+∞> la respuesta es **a**

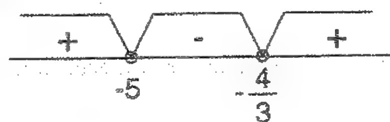
(53) La solución de la inecuación $4(x-1)<\sqrt{(x+5)(3x+4)}$ es:

a) $<-\infty,-5]\cup[-\frac{4}{3},4>$ b) <-4,4> c) [-5,4> d) <4,∞> e) [-5,∞>

Desarrollo

Calculamos el conjunto de valores de x admisibles

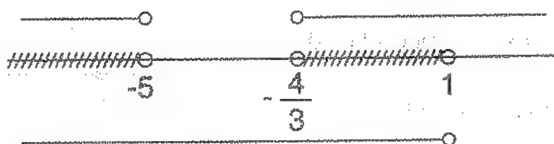
$$(x+5)(3x+4)\geq 0$$



luego $x\in<-\infty,-5]\cup[-\frac{4}{3},\infty>$ (conjunto universal)

analizando primero para $x-1<0 \Rightarrow x<1$

Luego $S_1=<-\infty,1>\cap(<-\infty,-5]\cup[-\frac{4}{3},\infty>)$



$$\therefore \quad S_1=<-\infty,-5]\cup[-\frac{4}{3},1>$$

ahora analicemos para $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

$$4(x-1)<\sqrt{(x+5)(3x+4)} \iff 16(x-1)^2<(x+5)(3x+4)$$

$\Leftrightarrow \quad 16x^2 - 32x + 16 < 3x^2 + 19x + 20$

$\Leftrightarrow \quad 13x^2 - 51x - 4 < 0$, factorizando

$\Leftrightarrow \quad (13x+1)(x-4) < 0$

+ - +

$-\frac{1}{13}$ 4

Luego $x \in \langle -\frac{1}{13}, 4 \rangle$. Por lo tanto $S_2 = [1, \infty \rangle \cap \langle -\frac{1}{13}, 4 \rangle = [1, 4\rangle$

De donde la solución de la inecuación es: $C.S = S_1 \cup S_2 = \langle -\infty, -5] \cup [-\frac{4}{3}, 1\rangle \cup [1, 4\rangle$

$\therefore \quad C.S = \langle -\infty, -5] \cup [-\frac{4}{3}, 4\rangle$, la respuesta es **a**

(54) La solución de la inecuación $x + 2 < \sqrt[3]{x^3 + 8}$ es:

a) <0,2> b) <-2,0> c) <-∞,0> d) [2,+∞> e) <-2,2>

Desarrollo

Como $\sqrt[3]{x^3+8}$ y $x^3 + 8$ tienen el mismo signo, entonces:

$x + 2 < \sqrt[3]{x^3 + 8} \Leftrightarrow (x+2)^3 < x^3 + 8$, operando se tiene:

$\Leftrightarrow \quad x^3 + 12x + 6x^2 + 8 < x^3 + 8$, simplificando

$\Leftrightarrow \quad 6x^2 + 12x < 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x+2) < 0$

+ - +

-2 0

se toma el intervalo donde aparece el signo (-) es decir: x ∈ <-2,0>; la respuesta es **b**

(55) El conjunto solución de la inecuación $\sqrt{2x+1} < \sqrt[3]{\frac{3x+2}{2}}$ es:

a) <-∞,∞> b) <-∞,0> c) <0,∞> d) $[-\frac{1}{2}, 0\rangle$ e) <0,4>

Desarrollo

Determinaremos los valores de x admisibles

$2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in[-\frac{1}{2},\infty>$ (conjunto universal)

ahora elevamos a la sexta para eliminar los radicales

$\sqrt{2x+1}<\sqrt[3]{\frac{3x+2}{2}} \Leftrightarrow (2x+1)^3<(\frac{3x+2}{2})^2$, desarrollamos

$\Leftrightarrow 32x^3+39x^2+12x<0$

$\Leftrightarrow x\underbrace{(32x^2+39x+12)}_{+}<0$ como $32x^2+39x+12>0$

$\Leftrightarrow x<0$

entonces el $C.S=[-\frac{1}{2},\infty>\cap<-\infty,0>=[-\frac{1}{2},0>$

por lo tanto la respuesta es **d**

(56) El conjunto solución de la inecuación $2x-5>\sqrt{x^2-2x+10}$ es:

a) <-∞,-5> **b)** <-∞,5> **c)** <5,∞> **d)** <-5,5> **e)** <-5,∞>

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente:

$\sqrt{P(x)}<Q(x) \Leftrightarrow P(x)\geq 0 \wedge [Q(x)>0 \wedge P(x)<Q^2(x)]$

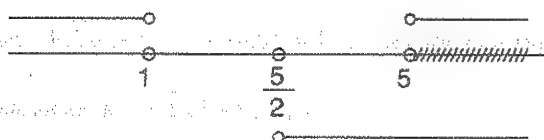
$\sqrt{x^2-2x+10}<2x-5 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2x+10}_{\text{números complejos}}\geq 0 \wedge [2x-5>0 \wedge x^2-2x+10<(2x-5)^2]$

$\Leftrightarrow \forall x\in R \wedge [x>\frac{5}{2} \wedge x^2-6x+5>0]$

$\Leftrightarrow x>\frac{5}{2} \wedge (x-5)(x-1)>0$

$\Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{2} \quad \wedge$ 　+ 　1 　- 　5 　+

$\Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{2} \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 5, \infty \rangle$



$\therefore$ C.S = <5,+∞>, la respuesta es **c**

(57) La solución de la inecuación $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-10}-\sqrt{2x-4}<0$ es:

a) $[10, 5\sqrt{2}+9\rangle$　　b) $[10,19\rangle$　　c) $[5,10\rangle$　　d) $[2,\infty\rangle$　　e) $[8,\infty\rangle$

Desarrollo

Calculando los valores admisibles de x de la expresión dada, es decir:

$x-8 \geq 0 \;\wedge\; x-10 \geq 0 \;\wedge\; 2x-4 \geq 0$

$x \geq 8 \;\wedge\; x \geq 10 \;\wedge\; x \geq 2 \;\Rightarrow\; x \geq 10$

por lo tanto $U = [10,\infty\rangle$ el conjunto universal

$\sqrt{x-8}+\sqrt{x-10}-\sqrt{2x-4}<0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x-8}+\sqrt{x-10}<\sqrt{2x-4}$, elevando al cuadrado

$\Leftrightarrow \; x-8+x-10+2\sqrt{x-8}\sqrt{x-10}<2x-4$

$\Leftrightarrow \; \sqrt{(x-8)(x-10)}<7$, elevando al cuadrado

$\Leftrightarrow \; (x-8)(x-10)<49$, efectuando operaciones

$\Leftrightarrow \; x^2-18x+80<49$

$\Leftrightarrow \; x^2-18x+31<0$, completando cuadrados

$\Leftrightarrow \; (x-9)^2<50$, por propiedad

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{50} < x-9 < \sqrt{50}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9-5\sqrt{2} < x < 9+5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in < 9-5\sqrt{2}, 9+5\sqrt{2} >$$

Luego el conjunto solución es: $C.S = [10,\infty > \cap < 9-5\sqrt{2}, 9+5\sqrt{2} >$

$= [10, 9+5\sqrt{2} >$, la respuesta es **a**

(58) La solución de la inecuación $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{2-\sqrt{x+4}}} \geq x-4$ es:

a) [0,4> b) [-4,0> c) <-∞,-4] d) [0,∞> e) [4,∞>

Desarrollo

Calculando los valores admisibles de x de la expresión dada es decir:

$x+4 \geq 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\sqrt{x+4}+2}{2-\sqrt{x+4}} \geq 0$, como $\sqrt{x+4}+2 > 0$

entonces: $x \geq -4 \quad \wedge \quad \dfrac{1}{2-\sqrt{x+4}} \geq 0$, es equivalente a:

$$x \geq -4 \quad \wedge \quad 2-\sqrt{x+4} > 0$$

$$x \geq -4 \quad \wedge \quad \sqrt{x+4} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4 \quad \wedge \quad x+4 < 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -4 \quad \wedge \quad x < 0$$

de donde (recta numérica: -4, 0) $\Leftrightarrow x \in [-4,0>$

Luego el C.S. = [-4,0> la respuesta es **b**

(59) La solución de la inecuación $\sqrt[4]{(0.8)^{\frac{3x-4}{4}}} > \sqrt[8]{(0.64)^{\frac{2x-2}{5}}}$ es:

a) $<-\infty, \dfrac{12}{7}>$ b) $<\dfrac{12}{7}, \infty>$ c) <7,12> d) <-12,-7> e) <7,∞>

Desarrollo

La inecuación dada es equivalente a: $(0.8)^{\frac{3x-4}{16}} > (0.8)^{\frac{4x-4}{40}}$

como a = 0.8 < 1, entonces los exponentes son desiguales en sentido contrario, es decir:

$\frac{3x-4}{16} < \frac{4x-4}{40}$, efectuando y simplificando.

$\frac{3x-4}{8} < \frac{x-1}{5} \Rightarrow x < \frac{12}{7}$, la solución es: $x \in \langle -\infty, \frac{12}{7} \rangle$ la respuesta es **a**

60 La solución de la inecuación $(0.25)^{\frac{6x-4}{3}}.(0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < (0.0625)^{\frac{3x-4}{6}}.(0.125)^{\frac{4x-2}{9}}$ es:

a) $\langle -\infty, \frac{1}{4} \rangle$ b) $\langle \frac{1}{4}, \infty \rangle$ c) <3,4> d) <4,∞> e) <-∞,4>

Desarrollo

La inecuación dada es equivalente a: $(0.5)^{\frac{12x-8}{3}}.(0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < (0.5)^{\frac{6x-8}{3}}.(0.5)^{\frac{4x-2}{3}}$

Operando tenemos: $(0.5)^{\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}} < (0.5)^{\frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}}$

Como a = 0.5 < 1, entonces los exponentes son desiguales en sentido contrario a la inecuación, es decir: $\frac{12x-8}{3} + \frac{2x-3}{4} > \frac{6x-8}{3} + \frac{4x-2}{3}$

$\frac{12x-8}{3} + \frac{2x-3}{4} > \frac{10x-10}{3}$, simplificando: $\frac{2x+2}{3} + \frac{2x-3}{4} > 0 \Rightarrow \frac{8x+8+6x-9}{12} > 0$

$14x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{14}$; la solución es: $x \in \langle \frac{1}{4}, +\infty \rangle$ la respuesta es **b**

61 La solución de la inecuación $32\sqrt{2^{x+1}} > (4^{2x}.8^{x-3})^{2/5}$ es:

a) $\langle -\infty, \frac{91}{23} \rangle$ b) <23,91> c) <2,3> d) <23,∞> e) <-∞,91>

Desarrollo

La inecuación dada es equivalente a: $2^5.2^{\frac{x+1}{2}} > (2^{4x}.2^{3x-9})^{2/5}$, de donde

$2^{\frac{x+11}{2}} > 2^{\frac{14x-18}{5}}$, como a = 2 > 0, entonces:

$\frac{x+11}{2} > \frac{14x-18}{5} \Rightarrow 5x+55 > 28x-36 \Rightarrow x < \frac{91}{23}$.

La solución $x \in <-\infty, \frac{91}{23}>$ la respuesta es **a**

62) La solución de la inecuación $\frac{3^{2x-1}.3^{4-x}}{3^{6x-1}} > (3^{2x+1})^{(x-2)}$ es:

a) $<-\sqrt{13},\sqrt{13}>$ b) <-1,1> c) $<-\frac{\sqrt{13}+1}{2},\frac{\sqrt{13}-1}{2}>$ d) <1,∞> e) <-∞,1>

Desarrollo

La inecuación dada expresaremos en la forma

$3^{2x-1+4-x-6x+1} > 3^{(2x+1)(x-2)}$, de donde: $3^{-5x+4} > 3^{2x^2-3x-2}$

como a = 3 > 0 $\Rightarrow -5x+4 > 2x^2-3x-2$, de donde

$2x^2+2x-6<0 \Leftrightarrow x^2+x-3<0$, completando cuadrados $x^2+x+\frac{1}{4}<3+\frac{1}{4}$

$(x+\frac{1}{2})^2 < \frac{13}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{13}}{2} < x+\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{13}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, de donde $x \in <-\frac{\sqrt{13}+1}{2},\frac{\sqrt{13}-1}{2}>$ la respuesta es **c**

63) Hallar el valor de la expresión: $\frac{|4x+7|-|x-7|}{x}$ si x ∈ <2,5>

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

Por la definición de valor absoluto se tiene:

$$|4x+7|=\begin{cases} 4x+7 & \text{si } x\geq -\frac{7}{4} \\ -4x-7 & \text{si } x<-\frac{7}{4} \end{cases} \quad ; \quad |x-7|=\begin{cases} x-7 & \text{si } x\geq 7 \\ 7-x & \text{si } x<7 \end{cases}$$

ahora para $x \in <2,5> \Leftrightarrow |4x+7| = 4x+7,\ |x-7| = 7-x$

como $x \in <2,5> \Leftrightarrow \frac{|4x+7|-|x-7|}{x}=\frac{4x+7-(7-x)}{x}=\frac{5x}{x}=5$

$\therefore \frac{|4x+7|-|x-7|}{x}=5$ si $x \in <2,5>$, la respuesta es **c**

(64) Hallar el valor de la expresión: $\frac{|5x+4|-|4+3x|}{x}$ si $x \in <0,3>$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|5x+4|=\begin{cases} 5x+4 & \text{si } x\geq -\frac{4}{5} \\ -5x-4 & \text{si } x<-\frac{4}{5} \end{cases} \quad ; \quad |4+3x|=\begin{cases} 4+3x & \text{si } x\geq -\frac{4}{3} \\ -4-3x & \text{si } x<-\frac{4}{3} \end{cases}$$

ahora para $x \in <0,3> \Leftrightarrow |5x+4| = 5x+4,\ |4+3x| = 4+3x$

como $x \in <0,3> \Leftrightarrow \frac{|5x+4|-|4+3x|}{x}=\frac{5x+4-(4+3x)}{x}=\frac{2x}{x}=2$

$\therefore \frac{|5x+4|-|4+3x|}{x}=2$ si $x \in <0,3>$, la respuesta es **a**

(65) Hallar el valor de la expresión: $\frac{|5x-20|-|3x-20|}{x}$ si $x \in <-3,-2>$

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

Desarrollo

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|5x-20|=\begin{cases}5x-20 & \text{si } x\geq 4\\ 20-5x & \text{si } x<4\end{cases} \quad ; \quad |3x-20|=\begin{cases}3x-20 & \text{si } x\geq \frac{20}{3}\\ 20-3x & \text{si } x<\frac{20}{3}\end{cases}$$

ahora para x ∈ <-3,-2> ⇔ |5x – 20| = 20 – 5x, |3x – 20| = 20 – 3x

como x ∈ <-3,-2> ⇔ $\frac{|5x-20|-|3x-20|}{x}=\frac{20-5x-(20-3x)}{x}=-\frac{2x}{x}=-2$

∴ $\frac{|5x-20|-|3x-20|}{x}=-2$ si x ∈ <-3,-2>, la respuesta es **b**

(66) La solución de la ecuación $|x^2+2|=2x+1$ es:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Desarrollo

Por definición de valor absoluto $|x^2+2|=x^2+2$ ... (1)

Al reemplazar en $|x^2+2|=2x+1$ se tiene:

$x^2+2=2x+1$ de donde $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ entonces x = 1. Luego la solución es: x = 1, la respuesta es **a**

(67) La solución de la ecuación $|x^2-x-6|=x+2$ es:

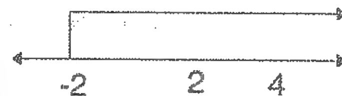
a) {2,4} **b)** {-2,2} **c)** {-2,2,4} **d)** {2,4} **e)** {-2,4}

Desarrollo

$$|x^2-x-6|=x+2 \iff [x+2\geq 0 \ \wedge\ (x^2-x-6=x+2 \ \vee\ x^2-x-6=-x-2)]$$

$$\iff [x\geq -2 \ \wedge\ (x^2-2x-8=0 \ \vee\ x^2=4)]$$

$\Leftrightarrow \quad [x \geq -2 \;\; \Lambda \;\; (x = 4, \; x = -2 \;\; v \;\; x = \pm 2)]$



La solución es el conjunto {-2,2,4} la respuesta es **c**

(68) La solución de la ecuación $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ es:

a) {-3,3} **b)** {-2,2} **c)** {-3} **d)** {3} **e)** ϕ

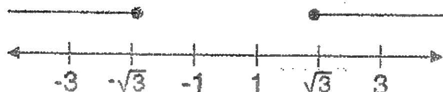
Desarrollo

La ecuación dada se expresa así:

$2|x| = x^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad [x^2 - 3 \geq 0 \;\; \Lambda \;\; (2x = x^2 - 3 \;\; v \;\; 2x = -x^2 + 3)]$

$\Leftrightarrow \quad [x^2 \geq 3 \;\; \Lambda \;\; (x^2 - 2x - 3 = 0 \;\; v \;\; x^2 + 2x - 3 = 0)]$

$\Leftrightarrow \quad (x \geq \sqrt{3} \;\; V \;\; x \leq -\sqrt{3}) \;\; \Lambda \;\; (x = 3, -1 \;\; v \;\; x = -3, 1)$



La solución es {-3,3} la respuesta es **a**

(69) La solución de la ecuación $|x - 4| = |x - 2|$ es:

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

Desarrollo

Aplicamos la propiedad: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \; V \; a = -b$

$|x - 4| = |x - 2| \Leftrightarrow \quad x - 4 = x - 2 \;\; V \;\; x - 4 = -x + 2$

$\Leftrightarrow \quad -4 = -2 \;\; V \;\; 2x = 6$

$\Leftrightarrow \quad \phi \;\; V \;\; x = 3,$ La solución es $x = 3$ la respuesta es **b**

(70) Hallar el producto de las soluciones de la ecuación $|x - 2| = |3 - 2x|$ es:

a) 3 b) 5 c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{3}{5}$ e) 1

Desarrollo

$|x-2|=|3-2x| \iff x-2=3-2x \lor x-2=-3+2x$

$\iff x=\frac{5}{3} \lor x=1$, La solución es: $\{1,\frac{5}{3}\}$

su producto es $(1)(\frac{5}{3})=\frac{5}{3}$, la respuesta es **c**

(71) La solución de la ecuación $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$ es:

a) -3 b) $[1,\infty>$ c) $[-1,\infty>\cup\{-3\}$ d) $<-\infty,-3]$ e) $[-3,-1]$

Desarrollo

Aplicando la definición de valor absoluto

$|x+2|=\begin{cases} x+2, & x\geq -2 \\ -x-2, & x<-2 \end{cases}$ $\quad |2^{x+1}-1|=\begin{cases} 2^{x+1}-1, & x\geq -1 \\ 1-2^{x+1}, & x<-1 \end{cases}$



para $x<-2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|=-x-2 \\ |2^{x+1}-1|=1-2^{x+1} \end{cases}$

reemplazando en la ecuación $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$, se tiene:

$2^{-x-2}-(1-2^{x+1})=2^{x+1}+1$, simplificando $2^{-x-2}=2 \Rightarrow -x-2=1 \Rightarrow x=-3$

Luego $x<-2$, la solución es $x=-3$

Para $-2\leq x<-1 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|=x+2 \\ |2^{x+1}-1|=1-2^{x+1} \end{cases}$

reemplazando en la ecuación $2^{x+2}-(1-2^{x+1})=2^{x+1}+1$, simplificando

$2^{x+2}=2 \Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1$, como $-2\leq x<-1$ entonces $x=-1$ no es solución

Para $x \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |2^{x+1}-1| = 2^{x+1}-1 \end{cases}$

reemplazando en la ecuación se tiene: $2^{x+2}-(2^{x+1}-1) = 2^{x+1}+1$, simplificando

$2^{x+2} = 2^{x+2} \Rightarrow x+2 = x+2, \ \forall x \in R$

Luego la solución para $x \geq -1$ es $R \wedge [-1,\infty> = [-1.\infty>$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: $x = -3$ y $[-1,+\infty>$ la respuesta es **c**

(72) Hallar la suma de las soluciones de la ecuación $|x^2-4| = -2x+4$

a) -4 b) 0 c) 2 d) -2 e) 6

Desarrollo

Por la propiedad: $|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)$

$|x^2-4| = -2x+4 \Leftrightarrow -2x+4 \geq 0 \wedge (x^2-4 = -2x+4 \vee x^2-4 = 2x-4)$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge (x^2+2x-8 = 0 \vee x^2-2x = 0)$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge ((x+4)(x-2) = 0 \vee x(x-2) = 0)$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge (x = 2, -4 \vee x = 0, 2)$

Luego {-4, 0, 2} son las soluciones de la ecuación dada, la suma es: $-4+0+2 = -2$

La respuesta es **d**

(73) La solución de la ecuación $|x^2+3| = |2x+1|$ es:

a) ϕ b) R c) 2 d) -2 e) 1

Desarrollo

Por la propiedad: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$|x^2+3| = |2x+1| \Leftrightarrow x^2+3 = 2x+1 \vee x^2+3 = -2x-1$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-2x+2=0 \quad v \quad x^2+2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi \vee \phi = \phi$$

La solución es él ϕ puesto que $\forall x \in R$, $x^2-2x+2>0$, $x^2+2x+4>0$

La respuesta es **a**

(74) Hallar la suma de las soluciones de la ecuación $|x^2+6x+1|=2x+6$

a) -1 b) 1 c) 0 d) 2 e) 3

Desarrollo

Por la propiedad: $|a|=b \Leftrightarrow b\geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b)$

$$|x^2+6x+1|=2x+6 \Leftrightarrow 2x+6\geq 0 \wedge [x^2+6x+1=2x+6 \vee x^2+6x+1=-2x-6]$$

$$\Leftrightarrow \quad x\geq -3 \wedge (x^2+4x-5=0 \vee x^2+8x+7=0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\geq -3 \wedge (x=1,-5 \vee x=-1,-7)$$



Luego la solución es $\{-1,1\}$ y suma es $-1+1=0$, la respuesta es **c**

(75) Hallar el mayor de las soluciones de la ecuación $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right|=8$

a) $\frac{32}{13}$ b) $\frac{16}{19}$ c) $\frac{12}{32}$ d) $\frac{19}{16}$ e) 1

Desarrollo

$$\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right|=8 \Leftrightarrow \frac{3x+8}{2x-3}=8 \vee \frac{3x+8}{2x-3}=-8, \text{ para } x\neq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+8=8(2x-3) \vee 3x+8=-8(2x-3), \quad x\neq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 13x=32 \vee 19x=16, \quad \text{Luego la solución es: } x=\frac{32}{13}, \quad x=\frac{16}{19}$$

y el mayor es $\frac{32}{13}$, la respuesta es **a**

(76) La solución de la ecuación $||x|-5|=2x-3$ es:

a) -2 b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{8}{3}$ d) 2 e) 3

Desarrollo

$||x|-5|=2x-3 \Leftrightarrow 2x-3\geq 0 \wedge (|x|-5=2x-3 \vee |x|-5=-2x+3)$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2} \wedge (|x|=2x+2 \vee |x|=-2x+8)$

Como $x\geq\frac{3}{2} \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x=2x+2 \vee x=-2x+8$

$\Rightarrow x=-2 \vee x=\frac{8}{3}$, por lo tanto la solución es $x=\frac{8}{3}$, la respuesta es **c**

debido a que $x\geq\frac{3}{2}$

(77) Hallar la suma de las soluciones de la ecuación $|x-4|^2-5|x-4|+6=0$

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

Desarrollo

Factorizando se tiene: $(|x-4|-3)(|x-4|-2)=0$

$\Leftrightarrow |x-4|-3=0 \vee |x-4|-2=0$

$\Leftrightarrow |x-4|=3 \vee |x-4|=2$

$\Leftrightarrow (x-4=3 \vee x-4=-3) \vee (x-4=2 \vee x-4=-2)$

$\Leftrightarrow x=7 \vee x=1 \vee x=6 \vee x=2$, las soluciones son: $\{1,2,6,7\}$

y la suma es: $1+2+6+7=16$, la respuesta es **d**

(78) Resolver la inecuación $|x^2-4|<5$

a) $\langle-\infty,-3\rangle$ b) $\langle-3,3\rangle$ c) $\langle 3,\infty\rangle$ d) $\langle-1,1\rangle$ e) $\langle-3,-1\rangle$

Desarrollo

Por la propiedad: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ donde $b > 0$

$|x^2-4| < 5 \Leftrightarrow -5 < x^2-4 < 5$

$\Leftrightarrow -1 < x^2 < 9 \Leftrightarrow -1 < x^2 \wedge x^2 < 9$

$\Leftrightarrow x \in R \wedge -3 < x < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x < 3$, Luego la solución es $x \in \langle -3,3 \rangle$ la respuesta es **b**

(79) Si $x \in \langle -\infty,a] \cup [b,c] \cup [d,\infty\rangle$ es la solución de $|9-x^2| \geq 3$, calcular $b+c$

a) $2\sqrt{6}$ b) 0 c) 6 d) $2\sqrt{12}$ e) $\sqrt{6}+\sqrt{12}$

Desarrollo

Por la propiedad $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

$|9-x^2| \geq 3 \Leftrightarrow 9-x^2 \geq 3 \vee 9-x^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 6 \vee x^2 \geq 12$

$\Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \vee x \geq \sqrt{12} \vee x \leq -\sqrt{12}$



Luego la solución es: $x \in \langle -\infty, -\sqrt{12}] \cup [-\sqrt{6},\sqrt{6}] \cup [\sqrt{12},+\infty\rangle$

De donde $b = -\sqrt{6}$, $c = \sqrt{6}$ entonces $b + c = 0$, la respuesta es **b**

(80) La solución de la inecuación $\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2$ es:

a) $\langle -\infty,5\rangle$ b) $\langle 5,\infty\rangle$ c) $\langle \frac{1}{5},5\rangle$ d) $\langle -5,5\rangle$ e) $\langle -4,4\rangle$

Desarrollo

Mediante la propiedad: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$$\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{3x-3}{x+1} < 2$$

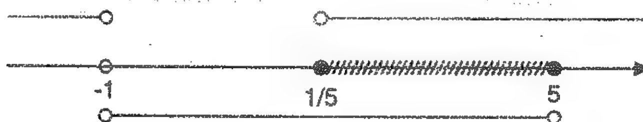
$$\Leftrightarrow -2 < \frac{3x-3}{x+1} \wedge \frac{3x-3}{x+1} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x+1} > 0 \wedge \frac{x-5}{x+1} < 0, \text{ para } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)(x+1) > 0 \wedge (x-5)(x+1) < 0,\ x \neq -1$$



$$x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle \frac{1}{5},+\infty\rangle \wedge x \in \langle -1,5\rangle$$



Luego la solución es $x \in \langle \frac{1}{5},5\rangle$ la respuesta es **c**

(81) Si $\frac{1}{x+4} \in [\frac{1}{3},1]$, la solución es:

a) [-3,-1] b) [1,3] c) <-∞,-3> d) <-1,∞> e) <3,∞>

Desarrollo

$$\frac{1}{x+4} \in [\frac{1}{3},1] \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{x+4} \le 1 \Rightarrow 1 \le x+4 \le 3$$

$\Rightarrow -3 \le x \le -1$, luego la solución es $x \in [-3,-1]$, la respuesta es **a**

(82) Hallar los números negativos que verifiquen a la inecuación $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

a) $<-\infty,-\frac{1}{2}]$ b) <-∞,0> c) [-5,0> d) [-10,-2] e) <-∞,-2]

Desarrollo

$\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right| \Leftrightarrow \frac{5}{|2x-1|} \geq \frac{1}{|x-2|}$ para $x \neq \frac{1}{2},2$ se tiene

$5|x-2| \geq |2x-1|$, elevando al cuadrado $25(x-2)^2 \geq (2x-1)^2$ efectuando y simplificando:

$7x^2-32x+33 \geq 0 \Leftrightarrow (7x-11)(x-3) \geq 0$



Como $(7x-11)(x-3) \geq 0$, se toma los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir

$<-\infty,\frac{11}{7}]\ U\ [3,+\infty>$. Luego la solución es: $<-\infty,\frac{11}{7}]\ U\ [3,+\infty>-\{\frac{1}{2}\}$

De donde la parte negativa es $x \in$ <-∞,0> la respuesta es **b**

(83) Resolver la inecuación: $|x-1|^2+2|x-1|-3<0$

a) <-2,0> b) <0,2> c) <-2,2> d) <-∞,-2> e) <2,∞>

Desarrollo

Completando cuadrados se tiene:

$(|x-1|+1)^2<4 \Leftrightarrow -2<|x-1|+1<2$

$\Leftrightarrow -3<|x-1|<1$

$\Leftrightarrow -3<|x-1| \wedge |x-1|<1 \Leftrightarrow R \wedge -1<x-1<1$

$\Leftrightarrow R \wedge 0<x<2$, la solución es $x \in$ <0,2> la respuesta es **b**

(84) Hallar los números que no verifican a la inecuación $|x-3|^2-3|x-3|-18>0$

a) <-∞,-3> b) <9,∞> c) [-3,9] d) [-3,∞> e) <-∞,9]

Desarrollo

Factorizando se tiene:

$(|x-3|-6)(|x-3|+3)>0 \Leftrightarrow (|x-3|>6 \wedge |x-3|>-3) \vee (|x-3|<6 \wedge |x-3|<-3)$

$\Leftrightarrow (|x-3|>6 \wedge R) \vee \phi$

$\Leftrightarrow (x-3>6 \vee x-3<-6) \wedge R$

$\Leftrightarrow (x>9 \vee x<-3) \wedge R$

$\Leftrightarrow (x<-3 \vee x>9)$

La solución es $x \in \langle -\infty,-3\rangle \cup \langle 9,+\infty\rangle$ de donde $x \notin [-3,9]$, la respuesta es c

(35) Si $x \in \langle -\infty, a] \cup [b,c\rangle$ es la solución de la inecuación $\frac{|x|-1}{2-x} \geq 0$ calcular a.b

a) 2 b) -1 c) 3 d) 0 e) 4

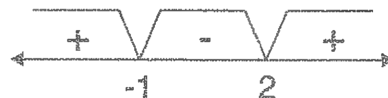
Desarrollo

Por la definición de valor absoluto $|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

Si $x<0 \Rightarrow |x|=-x$, reemplazando en la ecuación dada se tiene

$\frac{-x-1}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$, para $x \neq 2$

de donde $(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2$



como $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in (\langle -\infty,-1] \cup \langle 2,+\infty\rangle) \wedge \langle -\infty,0]$

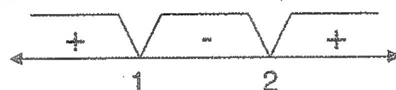
$\therefore x \in \langle -\infty,-1]$ ... (1)

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x|=x$, reemplazando en la ecuación dada se tiene

$\frac{x-1}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} \leq 0$ de donde

Si $\frac{x-1}{x-2} \le 0 \iff (x-1)(x-2) \le 0$ para $x \ne 2$

Entonces $(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$



Como $\frac{x-1}{x-2} \le 0 \Rightarrow$ la solución es: $x \in [0,+\infty> \wedge [1,2> = [1,2>$

$$\therefore\ x \in [1,2> \qquad \ldots (2)$$

La solución de la inecuación es la unión de (1) y (2) es decir: $x \in <-\infty,-1] \cup [1,2>$ de donde $a = -1,\ b = 1 \Rightarrow a.b = -1$, la respuesta es **b**

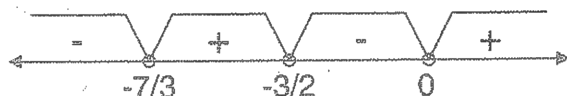
(86) En la solución de la inecuación $\left|\frac{1}{2x+3}\right| \le \left|\frac{x}{3x+7}\right|$ indicar su intervalo

a) $[\sqrt{\frac{7}{2}},\infty>$ b) $[2,\infty>$ c) $[7,\infty>$ d) $[0,7>$ e) $[2,7]$

Desarrollo

$$\left|\frac{1}{2x-+3}\right| \le \left|\frac{x}{3x+7}\right| \Rightarrow \frac{1}{|2x+3|} \le \frac{|x|}{|3x+7|}$$

Para $x \ne -\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}$, se tiene: $|3x+7| \le |x||2x+3|$ ... (1)



a) si $x < -\frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = -3x-7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = -2x-3 \end{cases}$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $-3x-7 \le (-x)(-2x-3)$ de donde $2x^2+6x+7 \ge 0$

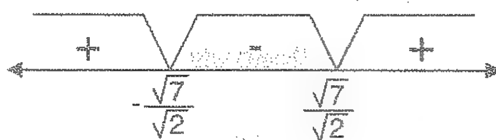
pero como $\forall\ x \in R,\ 2x^2+6x+7 \ge 0$

la solución es: $<-\infty,-\frac{7}{3}> \wedge R = <-\infty,-\frac{7}{3}>$

b) Si $-\frac{7}{3} < x < -\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = -2x-3 \end{cases}$ ... (3)

reemplazando (3) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq -x(-2x-3)$, de donde $2x^2 - 7 \geq 0$

$2x^2 - 7 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x+\sqrt{7})(\sqrt{2}x-\sqrt{7}) \geq 0$



La solución es: $\langle -\frac{7}{3}, -\frac{3}{2} \rangle \wedge (\langle -\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty \rangle)$

$\therefore \langle -\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{7}{2}}]$

c) Si $-\frac{3}{2} < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = 2x+3 \end{cases}$ ... (4)

reemplazando (4) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq (-x)(2x+3)$ de donde $2x^2 + 6x + 7 \leq 0$

como $\forall x \in \mathbf{R}$, $2x^2 + 6x + 7 > 0$ entonces la solución es: $\langle -\frac{3}{2}, 0 \rangle \wedge \phi = \phi$

d) Si $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = x \\ |2x+3| = 2x+3 \end{cases}$ ... (5)

reemplazando (5) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq x(2x+3) \Rightarrow 2x^2 - 7 \geq 0$

$2x^2 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x+\sqrt{7})(\sqrt{2}x-\sqrt{7}) \geq 0$



La solución es: $[0, +\infty \rangle \wedge (\langle -\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{7}{2}}, \infty \rangle) = [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty \rangle$

luego la respuesta es: $<-\infty,-\frac{7}{3}> U <-\frac{7}{3},-\sqrt{\frac{7}{2}}]\ U\ [\sqrt{\frac{7}{2}},+\infty>$, la respuesta es **a**

(87) De la solución de la inecuación $\frac{|x-1|-|x|}{1-|x|} \geq 0$ indicar la parte negativa.

a) <-∞,-1> b) <-1,0] c) <-1,2] d) [-2,-1> e) <-∞,0]

Desarrollo

Aplicando la definición de valor absoluto: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$; $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$



a) Si $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = 1-x \end{cases}$ ... (2)

reemplazando (2) en la inecuación dada. $\frac{1-x-(-x)}{1-(-x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \geq 0$

como $\frac{1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0,\ x \neq -1 \Leftrightarrow x > -1$

La solución para este caso es: <-∞,0> ∧ <-∞,-1> = <-1,0>

b) Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = 1-x \end{cases}$ ... (3)

reemplazando (2) en la ecuación dada:

$\frac{1-x-x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \geq 0$ para $x \neq 1$

ahora mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



La solución para este caso es: $[0,1) > \wedge (<-\infty,\frac{1}{2}] \vee <1,+\infty>) = [0,\frac{1}{2}]$

c) Si $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$ ... (4)

reemplazando (4) en la inecuación dada:

$\frac{x-1-x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x-1>0$ para $x \neq 1$ de donde $x > 1$.

La solución para este caso es: $[1,+\infty> \wedge <1,+\infty> = <1,+\infty>$

Por lo tanto la respuesta es: $<-1,0> U\ [0,\frac{1}{2}]\ U <1,+\infty> = <-1,\frac{1}{2}]\ U <1,+\infty>$

La parte negativa es [-1,0>, la respuesta es **b**

(88) La solución de al inecuación $|2x^2-3x-9| < 2|x^2-2x-3|$ es:

a) <-∞,-5> b) <-∞,-4> c) $<-\infty,-\frac{5}{4}>$ d) [4,∞> e) [-5,∞>

Desarrollo

Se conoce que: $\begin{cases} 2x^2-3x-9=(2x+3)(x-3) \\ x^2-2x-3=(x+1)(x-3) \end{cases}$ ... (1)

Reemplazando (1) en la inecuación dada

$|2x^2-3x-9| < 2|x^2-2x-3| \Leftrightarrow |(2x+3)(x-3)| < 2|(x+1)(x-3)|$

de donde: $|2x+3||x-3| < 2|x+1||x-3|$ para $x \neq 3$

se tiene: $|2x+3| < 2|x+1|$, elevando al cuadrado:

$4x^2+12x+9 < 4x^2+8x+4 \Rightarrow 4x < -5$ de donde:

$x < -\frac{5}{4}$; luego la solución es: $x \in <-\infty,-\frac{5}{4}>$ la respuesta es **c**

(89) Hallar los valores de x que no verifican a la inecuación $|\frac{1}{x}-2|<11$

a) $[-\frac{1}{9},\frac{1}{13}]$ b) [-9,13] c) <-∞,-9] d) [13,∞> e) [0,1]

Desarrollo

Mediante la propiedad: $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$

$$|\frac{1}{x}-2|<11 \Leftrightarrow -11<\frac{1}{x}-2<11 \Leftrightarrow -9<\frac{1}{x}<13$$

mediante la propiedad: $a<b<c \Leftrightarrow a<b \wedge b<c$

$$-9<\frac{1}{x}<13 \Leftrightarrow -9<\frac{1}{x} \wedge \frac{1}{x}<13$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+1}{x}>0 \wedge \frac{13x-1}{x}>0$$



La solución es: $x\in(<-\infty,-\frac{1}{9}>U<0,+\infty>) \wedge (<-\infty,0>U<\frac{1}{13},+\infty>)$

$\therefore x\in<-\infty,-\frac{1}{9}>U<\frac{1}{13},+\infty>$ de donde $x\notin[-\frac{1}{9},\frac{1}{13}]$, la respuesta es **a**

(90) La solución de la inecuación $|3x+2|\leq|2x-1|+|x+3|$ es:

a) φ b) <-∞,0> c) <0,∞> d) <-∞,∞> e) <-4,4>

Desarrollo

Aplicando la desigualdad triangular

$\forall x\in R$: $|3x+2|=|(2x-1)+(x+3)|\leq|2x-1|+|x+3|$

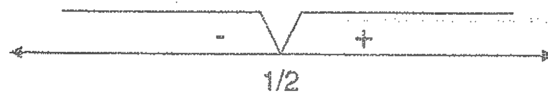
Por lo tanto la solución es: $\forall x\in R$ la respuesta es **d**

(91) La solución de la inecuación $\frac{|2x-1|+1}{x^2-2x-3} \le 0$ es:

a) <-1,3> b) <-∞,-1> c) <3,∞> d) <-1,∞> e) <-∞,3>

Desarrollo

Por definición de valor absoluto: $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1\ , & x \ge \frac{1}{2} \\ 1-2x\ , & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

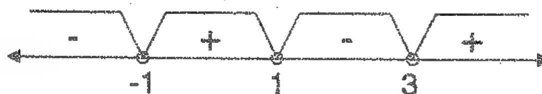


Sí $x < \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 1-2x$

Reemplazando en la inecuación dada:

$$\frac{1-2x+1}{x^2-2x-3} \le 0 \iff \frac{2x-2}{(x-3(x+1)} \ge 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+1) \ge 0$$

para $x \ne -1,3$. Mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



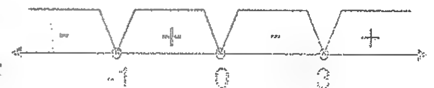
La solución para este caso es: $x \in <-\infty, \frac{1}{2}> \ \Lambda\ (<-1,1]\ U <3,+\infty>)$

$$\therefore\ x \in <-1, \frac{1}{2}>$$

Si $x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$, reemplazando en la inecuación dada

$$\frac{2x-1+1}{x^2-2x-3} \le 0 \iff \frac{x}{(x-3)(x+1)} \le 0 \Rightarrow x(x-3)(x+1) \le 0,\ x \ne -1,3$$

Mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



La solución para este caso es: $x \in [\frac{1}{2},+\infty> \ \Lambda \ (<-\infty,-1> U \ [0,3>)$

$\therefore \ x \in [\frac{1}{2},3>$

Por lo tanto la solución de la inecuación es: $x \in <-1,\frac{1}{2}> U \ [\frac{1}{2},3> = <-1,3>$

La respuesta es **a**

92 Hallar la solución de la inecuación $|\frac{x+3}{x+1}| < 4x+3$

a) <0,∞> **b)** <-∞,0> **c)** <-3,3> **d)** [0,8] **e)** [-10,5]

Desarrollo

$$|\frac{x+3}{x+1}| < 4x+3 \Leftrightarrow (4x+3>0 \ \Lambda \ -4x-3 < \frac{x+3}{x+1} < 4x+3)$$

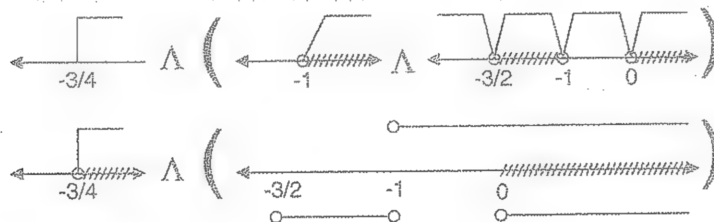
$$\Leftrightarrow (x > -\frac{3}{4} \ \Lambda \ (-4x-3 < \frac{x+3}{x+1} \ \Lambda \ \frac{x+3}{x+1} < 4x+3))$$

$$\Leftrightarrow (x > -\frac{3}{4} \ \Lambda \ (\frac{x+3}{x+1} + 4x+3 > 0 \ \Lambda \ 4x+3 - \frac{x+3}{x+1} > 0))$$

$$\Leftrightarrow (x > -\frac{3}{4} \ \Lambda \ (\frac{2x^2+4x+3}{x+1} > 0 \ \Lambda \ \frac{x(2x+3)}{x+1} > 0))$$

$$\Leftrightarrow (x > -\frac{3}{4} \ \Lambda \ (\frac{1}{x+1} > 0 \ \Lambda \ \frac{x(2x+3)}{x+1} > 0))$$

puesto que $2x^2+4x+3>0$



$x \in <-\frac{3}{4},+\infty> \ \Lambda <0,+\infty> = <0,+\infty>$ la respuesta es **a**

(93) La solución de la inecuación $\frac{x}{|x^2+4|} > \frac{x-3}{x^2+x+4}$ es:

a) <-∞,0> b) <0,∞> c) R d) ϕ e) <-1,1>

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\forall$ x ∈ R, $x^2 \geq 0$ de donde

$x^2+4>0 \ \Lambda \ x^2+x+4>0$, entonces

$|x^2+4| = x^2+4$ luego reemplazando se tiene:

$$\frac{x}{x^2+4} > \frac{x-3}{x^2+x+4} \Leftrightarrow x(x^2+x+4) > (x-3)(x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2+4x > x^3-3x^2+4x-12$$

$$\Leftrightarrow x^2 > -3 \Rightarrow \forall \text{ x} \in \text{R}$$ la respuesta es **c**

(94) Hallar la solución de la inecuación $\sqrt[4]{\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4}} + \sqrt{9-x} \geq 0$

a) [0,4] b) [0,9] c) [4,9] d) <-∞,4] e) [9,∞>

Desarrollo

$\sqrt[4]{\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4}} + \sqrt{9-x} \geq 0$, entonces

$$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0 \ \Lambda \ 9-x \geq 0$$

$$\frac{x||x-1|-12}{|x+2|+1} \geq \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \ \Lambda \ 9-x \geq 0$$

además como $\frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0$, entonces:

$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} > \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$ de donde

$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$ como $|x+2|+1>0$ entonces

$x|x-1|-12 \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$ ... (1)

Por definición: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, entonces

si $x < 0 \Rightarrow x|-x-1|-12 \geq 0 \Rightarrow x|x+1|-12 \geq 0$

como $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \langle -\infty,0\rangle = \langle -\infty,-1\rangle \cup [-1,0\rangle$

si $x \in \langle -\infty,-1\rangle \Rightarrow |x+1| = -x-1$ como

$x|x+1|-12 \geq 0 \Rightarrow -x^2-x-12 \geq 0 \Rightarrow x^2+x+12 \leq 0$

$\Rightarrow \nexists\; x \in R$, tal que $x^2+x+12 \leq 0$; por lo tanto ϕ

si $x \in [-1,0\rangle \Rightarrow |x+1| = x+1 \Rightarrow x(x+1)-12 \geq 0$

$x^2+x-12 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \geq 0$

+ -4 - 3 +

Luego $x \in [-1,0\rangle \;\Lambda\; \langle -\infty,-4] \cup [3,+\infty\rangle = \phi$

Ahora si $x \geq 0 \Rightarrow x|x-1|-12 \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$

$\Rightarrow x(x-1)-12 \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$

$\Rightarrow x^2-x-12 \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9 \Rightarrow (x-4)(x+3) \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$

+ -3 - 4 + Λ 9

x ∈ <-∞,-3] U [4,+∞> Λ x ≤ 9

x ∈ <-∞,-3] U [4,9]

∴ como x ≥ 0 Λ x ∈ (<-∞,-3] U [4,9]) entonces x ∈ [4,9] la respuesta es **c**

(95) Si x ∈ <-∞,a> ∪ <b,c> es la solución de $|\frac{1}{x+1}|<|\frac{x}{x^2+2x+1}|$, calcular a + b

a) -1 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

Desarrollo

$$|\frac{1}{x+1}|<|\frac{x}{x^2+2x+1}| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|}<\frac{|x|}{|x+1|^2}$$

$\frac{1}{|x+1|}<\frac{|x|}{|x+1|^2}$ para x ≠ -1 $\Rightarrow$ $1<\frac{|x|}{|x+1|}$ de donde

| x + 1 | < | x | para x ≠ -1 $\Rightarrow$ $x^2+2x+1<x^2$, x ≠ -1

2x + 1 < 0, x ≠ -1 $\Rightarrow$ $x<-\frac{1}{2}$, x ≠ -1

$$\therefore\ x\in<-\infty,-1>U<-1,-\frac{1}{2}>$$

de donde a = b = -1 luego a + b = -2, la respuesta es **b**

(96) Si x ∈ <-∞,a> ∪ <a,b> ∪ [c,∞> es la solución de la inecuación $\frac{|x^2-x|-2}{|x|-1}\geq 0$, hallar b^2+c^2

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Desarrollo

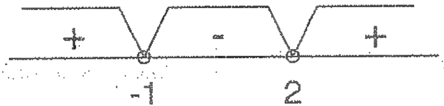
i) Si | x | - 1 > 0 $\Rightarrow$ | x | > 1 $\Rightarrow$ x > 1 ∨ x < -1 es decir: x ∈ <-∞,-1> ∪ <1,∞>

como | x | - 1 > 0 entonces $\frac{|x^2-x|-2}{|x|-1}\geq 0 \Leftrightarrow |x^2-x|-2\geq 0$

$$\Leftrightarrow |x^2-x|\geq 2$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x \geq 2 \;\wedge\; x^2 - x \leq -2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 \geq 0 \;\vee\; \underbrace{x^2 - x + 2}_{\text{irreducible}} \leq 0$



$\Leftrightarrow \quad (x-2)(x+1) \geq 0 \;\vee\; \phi$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty,-1] \cup [2,\infty\rangle$

Luego $S_1 = (\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle) \cap (\langle -\infty,-1] \cup [2,\infty\rangle)$

$= \langle -\infty,-1\rangle \cup [2,\infty\rangle$

ii) Si $|x| - 1 < 0 \Rightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow x \in \langle -1,1\rangle$

como $|x| - 1 < 0$ entonces $\dfrac{|x^2 - x| - 2}{|x| - 1} \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 - x| - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad |x^2 - x| \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad -2 \leq x^2 - x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad -2 \leq x^2 - x \;\wedge\; x^2 - x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 - x + 2}_{\text{irreducible}} \geq 0 \;\wedge\; x^2 - x - 2 \leq 0$



$\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \;\wedge\; (x-2)(x+1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \;\wedge\; x \in [-1,2]$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-1,2]$

Luego $S_2 = \langle -1,1\rangle \cap [-1,2] = \langle -1,1\rangle$

Por lo tanto de i) y ii) se tiene el conjunto solución

$C.S = S_1 \cup S_2 = \langle -\infty,-1\rangle \cup [2,\infty\rangle \cup \langle -1,1\rangle = \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup [2,\infty\rangle$

de donde a = -1, b = 1, c = 2, calculando $b^2 + c^2 = 1 + 4 = 5$, luego la respuesta es **c**

(97) Si $x \in \langle -\infty, a] \cup [b, \infty\rangle$ es la solución de la inecuación

$(|x-1|+|x-2|)(|1-x|-|2-x|) \le x^2-6$, hallar el valor de a + b

a) 4 b) 3 c) 2 d) 0 e) 1

Desarrollo

Por propiedad del valor absoluto: $|1-x| = |x-1|$; $|2-x| = |x-2|$

Ahora reemplazamos en la inecuación dada:

$(|x-1|+|x-2|)(|x-1|-|x-2|) \le x^2-6$; por diferencia de cuadrados

$|x-1|^2 - |x-2|^2 \le x^2-6$ pero se sabe que $|a|^2 = a^2$

$(x-1)^2-(x-2)^2 \le x^2-6$, efectuando las operaciones

$x^2-2x+1-x^2+4x-4 \le x^2-6$, simplificando

$x^2-2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) \ge 0$



$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1] \cup [3, \infty\rangle = \langle -\infty, a] \cup [b, \infty\rangle$.

de donde $a = -1$, $b = 3 \Rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$, la respuesta es **c**

(98) La solución de la inecuación $|x^3-1| \le |x^2+x+1|$ es:

a) [0,2] b) [-2,0] c) $\langle -\infty,-2]$ d) $[2,\infty\rangle$ e) [-2,2]

Desarrollo

Como $x^2+x+1>0$, $\forall x \in R$ entonces $|x^2+x+1| = x^2+x+1$

$|x^3-1| \le |x^2+x+1| \Leftrightarrow |x^3-1| \le x^2+x+1$

$\Leftrightarrow |x-1||x^2+x+1| \le x^2+x+1$, simplificando

$\Leftrightarrow |x-1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x-1 \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

$\Leftrightarrow x \in [0,2]$, la respuesta es **a**

(99) Si $x \in \langle -\infty, a] \cup \langle b, c] \cup \langle d, \infty \rangle$ es la solución de la inecuación $\frac{|x-2|-|3x+1|}{|2x-1|-|x-1|} \le 0$, calcule a.d

a) 1 b) -1 c) 3 d) 4 e) 2

Desarrollo

Aplicamos la diferencia de cuadradas, para esto se conoce que

$|x-2|+|3x+1|>0$ y $|2x-1|+|x-1|>0$ y luego multiplicamos al numerador y denominador respectivamente

$$\frac{(|x-2|-|3x+1|)(|x-2|+|3x+1|)}{(|2x-1|-|x-1|)(|2x-1|+|x-1|)} \le 0 \text{, efectuando estos productos}$$

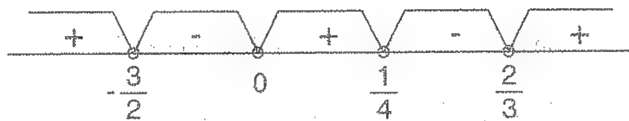
$$\frac{|x-2|^2-|3x+1|^2}{|2x-1|^2-|x-1|^2} \le 0 \text{, pero se sabe que } |a^2| = a^2$$

$$\frac{(x-2)^2-(3x+1)^2}{(2x-1)^2-(x-1)^2} \le 0 \text{, desarrollando las potencias}$$

$$\frac{x^2-4x+4-9x^2-6x-1}{4x^2-4x+1-x^2+2x-1} \le 0 \text{, simplificando}$$

$$\frac{-8x^2-10x+3}{3x^2-2x} \le 0 \iff \frac{8x^2+10x-3}{3x^2-2x} \ge 0 \text{, factorizando}$$

$$\frac{(4x-1)(2x+3)}{x(3x-2)} \ge 0$$



$$x \in \langle -\infty, -\frac{3}{2}] \cup \langle 0, \frac{1}{4}] \cup \langle \frac{2}{3}, \infty \rangle = \langle -\infty, a] \cup \langle b, c] \cup \langle d, \infty \rangle$$

de donde $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{2}{3}$ luego

$a.d = (-\frac{3}{2})(\frac{2}{3}) = -1$, la respuesta es **b**

(100) La solución de la inecuación $\frac{x-2}{|x^2+4|} \leq \frac{x}{x^2+2}$ es:

a) <-∞,0> b) <0,∞> c) R d) ϕ e) <-2,2>

Desarrollo

Como $\forall$ x ∈ R, $x^2+4>0$, $x^2+2>0$ y $|x^2+4|=x^2+4$

$$\frac{x-2}{|x^2+4|} \leq \frac{x}{x^2+2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2+4} \leq \frac{x}{x^2+2}$$, multiplicando en cruz

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2) \leq x(x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2+2x-4 \leq x^3+4x$$, simplificando

$$\Leftrightarrow x^2+x+2 \geq 0, \ \forall x \in R$$

por lo tanto el C.S = R, la respuesta es **c**

(101) El conjunto solución de la inecuación $|5x-4| \leq |3x+2|+2|x-3|$ es:

a) R b) ϕ c) <-∞,0] d) [0,∞> e) [-1,1]

Desarrollo

Aplicando la desigualdad triangular $|x+y| \leq |x|+|y|$, $\forall$ x,y ∈ R

Como $5x-4=(3x+2)+(2x-6)$ entonces se tiene:

$|5x-4|=|(3x+2)+(2x-6)| \leq |3x+2|+|2x-6|$, de donde

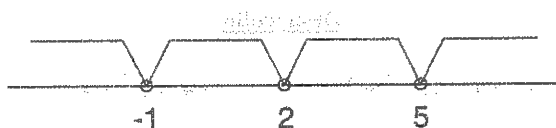
$|5x-4| \leq |3x+2|+2|x-3|$, $\forall$ x ∈ R, por lo tanto el C.S. = R, la respuesta es **a**

(102) Si x∈<-∞,a]∪[b,c] es la solución de la inecuación $2|x+1|-3|x-2|+|x-5| \geq x+2$, hallar el valor de a + b

a) 1 b) 3 c) $-\frac{14}{3}$ d) 6 e) 2

Desarrollo

Calculamos los valores críticos, para esto a cada valor absoluta lo igualamos a cero, es decir: $\begin{cases} |x+1|=0 \\ |x-2|=0 \\ |x-5|=0 \end{cases}$, de donde $\begin{cases} x=-1 \\ x=2 \\ x=5 \end{cases}$, escribimos en la recta numérica



se han obtenido cuatro intervalos:

i) si $x \in \langle -\infty,-1\rangle \Rightarrow |x+1| = -x-1,\ |x-2| = 2-x,\ |x-5| = 5-x$

reemplazando en la inecuación dada

$2(-x-1) - 3(2-x) + (5-x) \geq x+2$, simplificando

$x \leq -5$ de donde $S_1 = \langle -\infty,-1\rangle \cap \langle -\infty,-5] = \langle -\infty,-5]$ $\boxed{\therefore\ S_1 = \langle -\infty,-5]}$

ii) Si $x \in [-1,2\rangle \Rightarrow |x+1| = x+1,\ |x-2| = 2-x,\ |x-5| = 5-x$

reemplazando en la inecuación dada se tiene:

$2(x+1) - 3(2-x) + (5-x) \geq x+2$, simplificando

$x \geq \frac{1}{3}$, de donde $S_2 = [-1,2\rangle \cap [\frac{1}{3},\infty\rangle = [\frac{1}{3},2\rangle$ $\boxed{\therefore\ S_2 = [\frac{1}{3},2\rangle}$

iii) Si $x \in [2,5\rangle \Rightarrow |x+1| = x+1,\ |x-2| = x-2,\ |x-5| = 5-x$

reemplazando en la inecuación dada se tiene:

$2(x+1) - 3(x-2) + (5-x) \geq x+2$, simplificando

$x \leq \frac{11}{3}$ de donde $S_3 = [2,5\rangle \cap \langle -\infty,\frac{11}{3}] = [2,\frac{11}{3}]$ $\boxed{\therefore\ S_3 = [2,\frac{11}{3}]}$

iv) $x \in [5,\infty\rangle \Rightarrow |x+1| = x+1,\ |x-2| = x-2,\ |x-5| = x-5$

reemplazando en la inecuación dada se tiene:

$2(x+1) - 3(x-2) + (x-5) \geq x+2$, simplificando

$x \leq 1$, de donde $S_4 = [5,\infty> \cap <-\infty,1] = \phi$

Luego el $C.S = <-\infty,-5] \cup [\frac{1}{3},2> \cup [2,\frac{11}{3}> = <-\infty,-5] \cup [\frac{1}{3},\frac{11}{3}]$

De donde a = -5, $b=\frac{1}{3}$, $a+b=-5+\frac{1}{3}=-\frac{14}{3}$, la respuesta es **c**

(103) La solución de la ecuación $[\![\frac{5-3x}{x}]\!]=2$ es:

a) $<\frac{5}{6},1]$ b) [1,5> c) [1,6> d) [5,6> e) [1,2>

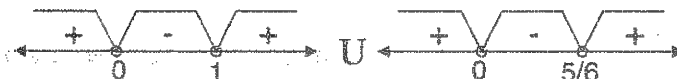
Desarrollo

$[\![\frac{5-3x}{x}]\!]=2 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{5-3x}{x} < 3$, por definición de máximos enteros

$2 \leq \frac{5-3x}{x} < 3 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{5-3x}{x} \wedge \frac{5-3x}{x} < 3$, propiedad transitiva

$\Leftrightarrow 2-\frac{5-3x}{x} \leq 0 \wedge \frac{5-3x}{x} - 3 < 0$, simplificando

$\Leftrightarrow \frac{5x-5}{x} \leq 0 \wedge \frac{6x-5}{x} > 0$, por puntos críticos



$x \in <0,1] \wedge x \in <-\infty,0> U <\frac{5}{6},+\infty>$, graficando



La solución es: $x \in <\frac{5}{6},1]$ la respuesta es **a**

(104) La solución de la ecuación $\left[\!\left[\frac{x}{2\sqrt{x}-1}\right]\!\right]=0$ es:

a) [0,1> b) [1,2> c) {0} d) {0,2} e) ϕ

Desarrollo

$\left[\!\left[\frac{x}{2\sqrt{x}-1}\right]\!\right]=0 \Leftrightarrow 0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1$, por diferencia de máximos enteros

$0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1 \Leftrightarrow 0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1} \wedge \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1$ ... (1)

la expresión está definida para $2\sqrt{x}-1\neq 0$, $x\ge 0$

$2\sqrt{x}\neq 1 \Rightarrow 4x\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{1}{4}$

Por lo tanto analizaremos en: $[0,\frac{1}{4}>U<\frac{1}{4},+\infty>=U$

si $x>\frac{1}{4}$ entonces en (1) se tiene: $x\ge 0 \wedge x<2\sqrt{x}-1$

$x\ge 0 \wedge x-2\sqrt{x}+1<0$

$x\ge 0 \wedge (\sqrt{x}-1)^2<0 \Rightarrow x\notin \phi$

si $0\le x<\frac{1}{4} \Rightarrow x\le 0 \wedge x>2\sqrt{x}-1 \Rightarrow x\le 0 \wedge (\sqrt{x}-1)^2\ge 0$

$\Rightarrow x\le 0 \wedge x\ge 0$ $\therefore x=0$ la respuesta es **c**

(105) La solución de la ecuación $[\![2x-1]\!]=-3$ es:

a) {-1} b) $[-1,\frac{1}{2}>$ c) [0,1> d) <1,2> e) [2,3>

Desarrollo

$[\![2x-1]\!]=-3 \iff -3 \le 2x-1 < -2$, por definición de máximo entero

$\iff -2 \le 2x < -1$, dividiendo entre 2

$\iff -1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in [-1,-\frac{1}{2}>$, la respuesta es **b**

(106) La solución de la ecuación $[\![\sqrt{x}+1]\!]=-1$ es:

a) R b) [0,1> c) ϕ d) [-1,0> e) [-1,2]

Desarrollo

$[\![\sqrt{x}+1]\!]=-1 \iff -1 \le \sqrt{x}+1 < 0$. La solución es ϕ puesto que $\sqrt{x}+1>0$

La respuesta es **c**

(107) Hallar el conjunto solución de la ecuación $[\![x^2-2x-8]\!]=\frac{1}{2}$

a) [0,1> b) ϕ c) [-1,0> d) [1,2> e) <-1,1>

Desarrollo

Como $\frac{1}{2} \notin Z \Rightarrow$ no tiene solución, la respuesta es **b**

(108) La solución de la ecuación $[\![\sqrt{x-[\![x]\!]}]\!]=0$ es:

a) R b) ϕ c) [0,1> d) [1,2> e) [0,2>

Desarrollo

$[\![\sqrt{x-[\![x]\!]}]\!]=0 \iff 0 \le \sqrt{x-[\![x]\!]} < 1$, por definición de máximo entero

$\iff 0 \le x-[\![x]\!] < 1$

$\iff [\![x]\!] \le x < [\![x]\!]+1$, $\forall$ x $\in$ R, la respuesta es **a**

(109) Si x $\in$ [a,b] $\cup$ [c,d] es la solución de la ecuación $[\![x^2-2x-3]\!]=0$. Hallar b + c

a) -1 b) 3 c) 2 d) 9 e) 4

Desarrollo

$[\![x^2-2x-3]\!]=0 \iff 0\le x^2-2x-3<1$

$0\le x^2-2x-3<1 \iff 0\le x^2-2x-3 \ \wedge \ x^2-2x-3<1$

$\iff (x-3)(x+1)\ge 0 \ \wedge \ (x-1)^2<5$

+ - + (-1, 3) $\wedge \quad -\sqrt{5}+1<x<\sqrt{5}+1$

$\iff x\in\langle-\infty,-1]\cup[3,+\infty\rangle \ \wedge \ x\in\langle 1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\rangle$



$\therefore\ x\in\langle 1-\sqrt{5},-1]\cup[3,1+\sqrt{5}\rangle$ de donde b = -1, c = 3.

Por lo tanto a + b = 2, la respuesta es **c**

(110) La solución de la ecuación $[\![x[\![x]\!]]\!]=x$ es:

a) {0,1} b) {1,2} c) [0,1> d) [1,2> e) [0,2>

Desarrollo

Se conoce que $[\![x]\!]\in Z$ entonces como $[\![x[\![x]\!]]\!]=x\in Z$

Es decir $x\in Z \Rightarrow [\![x]\!]=x\in Z \Rightarrow x[\![x]\!]\in Z$

Luego: $[\![x[\![x]\!]]\!]=x \Rightarrow [\![x.x]\!]=x$

$[\![x^2]\!]=x \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$

por lo tanto $[\![x[\![x]\!]]\!]=x \Rightarrow$ $x\in\{0,1\}$ la respuesta es **a**

(111) La solución de la ecuación $[\![2x-|x|]\!]=x$ es:

a) {0,1,2,...,n} b) {0,1,2} c) [0,1> d) [1,2> e) [0,2>

Desarrollo

Se sabe por propiedad que si $[\![a]\!] \in Z \ \wedge \ [\![a]\!] = a \ \Rightarrow \ a \in Z$

Luego como $[\![2x - |x|]\!] = x \ \Rightarrow \ x \in Z \ \Rightarrow \ 2x - |x| = x$

De donde $|x| = x \ \Rightarrow \ x \in Z_0^+$. La solución es $\{0,1,2,\ldots,n\}$ la respuesta es **a**

(112) La solución de la inecuación $[\![-x]\!] > 0$ es:

a) $<-\infty,0>$ b) $<-\infty,-1]$ c) $[-1,0>$ d) $[0,\infty>$ e) $[-1,\infty>$

Desarrollo

$[\![-x]\!] > 0 \ \Rightarrow \ -x \geq 1$

$x \leq -1 \ \Rightarrow \ x \in <-\infty,-1]$ la respuesta es **b**

(113) La solución de la inecuación $[\![-x]\!] < 0$ es:

a) $[1,2>$ b) $<-\infty,0>$ c) $<0,\infty>$ d) $[0,2>$ e) $[-1,0>$

Desarrollo

$[\![-x]\!] < 0 \ \Leftrightarrow \ -x < 0 \ \Rightarrow \ x > 0 \ \Rightarrow \ x \in <0,+\infty>$ la respuesta es **c**

(114) La solución de la inecuación $[\![x^2]\!] \leq 15$ es:

a) $[0,1>$ b) $<-2,2>$ c) $<-4,4>$ d) $<0,4>$ e) $<-4,0>$

Desarrollo

$[\![x^2]\!] \leq 15 \ \Rightarrow \ [\![x^2]\!] < 16 \ \Rightarrow \ x^2 < 16 \ \Rightarrow \ -4 < x < 4$

$\therefore x \in <-4,4>$ la respuesta es **c**

(115) Si $x \in <-\infty,a] \cup <b,\infty>$ es la solución de la inecuación $\frac{x}{[\![-x]\!]} < 0$, hallar $a + b$

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

Desarrollo

$$\frac{x}{[\![-x]\!]}<0 \iff (x>0 \ \Lambda \ [\![-x]\!]<0) \ V \ (x<0 \ \Lambda \ [\![-x]\!]>0)$$

$$\iff (x>0 \ \Lambda \ x>0) \ V \ (x<0 \ \Lambda \ x\leq -1)$$

$$\iff (x>0 \ V \ x\leq -1)$$

$\iff$ $x \in \langle -\infty,-1] \cup \langle 0,+\infty\rangle$ de donde $a=-1$, $b=0$ entonces

$a+b=-1$ la respuesta es **b**

116 La solución de la inecuación $\dfrac{x+|x|}{|x|-[\![x]\!]}\leq 2$ es:

a) Z^+ **b)** $Z^- \cup \langle 0,1\rangle$ **c)** Z **d)** $[0,4\rangle$ **e)** $[1,2\rangle$

Desarrollo

Se conoce que $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$

i) si $x>0 \Rightarrow \dfrac{2x}{x-[\![x]\!]}\leq 2 \iff \dfrac{x}{x-[\![x]\!]}\leq 1$

$$\frac{x}{x-[\![x]\!]}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{x-x+[\![x]\!]}{x-[\![x]\!]}\leq 0 \Rightarrow \frac{[\![x]\!]}{x-[\![x]\!]}\leq 0$$

$$\frac{[\![x]\!]}{x-[\![x]\!]}\leq 0 \iff ([\![x]\!]\geq 0 \ \Lambda \ x-[\![x]\!]\leq 0) \ V \ ([\![x]\!]\leq 0 \ \Lambda \ x-[\![x]\!]\geq 0)$$

$$\iff ([\![x]\!]\geq 0 \ \Lambda \ x\leq [\![x]\!]) \ V \ ([\![x]\!]\leq 0 \ \Lambda \ [\![x]\!]\leq x)$$

$$\iff (x\geq 0 \ \Lambda \ x\in Z_0^+) \ V \ (x<1 \ \Lambda \ x\in R)$$

$$\iff (x\in Z_0^+) \ V \ (x<1)$$

$\iff x\in \langle -\infty,1\rangle$ $\therefore x\in \langle 0,+\infty\rangle \ \Lambda \ (\langle -\infty,1\rangle)=\langle 0,1\rangle$

ii) Si $x < 0$, $x \in Z^-$ $\Rightarrow |x| = -x$

$$\frac{0}{-x-[\![x]\!]} \le 2 \Rightarrow 0 \le 2 \Rightarrow x < 0,\ x \in Z^- \qquad \therefore x \in Z^-$$

$\therefore x \in Z^-$ U <0,1>, la respuesta es **b**

(117) La solución de la inecuación $[\![|x|+1]\!] < 2$ es:

a) <-1,0> b) <0,1> c) <-1,1> d) [-2,0> e) [0,2>

Desarrollo

Aplicando la propiedad $[\![x+n]\!] = n + [\![x]\!]$, $n \in Z$

$$[\![|x|+1]\!] < 2 \Rightarrow [\![|x|]\!] + 1 < 2 \Rightarrow [\![|x|]\!] < 1$$

como $[\![|x|]\!] < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ $\therefore x \in$ <-1,1>, la respuesta es **c**

(118) Si $x \in$ <-∞,a> ∪ <b,∞> es la solución de la inecuación $\left[\!\left[\frac{3x+1}{3x-2}\right]\!\right] \le 3$, hallar ab

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) 3 e) 6

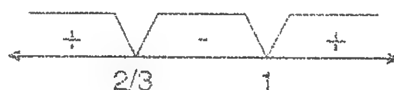
Desarrollo

Aplicando la propiedad $[\![x]\!] \le a \Rightarrow x < a + 1$

$$\left[\!\left[\frac{3x+1}{3x-2}\right]\!\right] \le 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-2} < 4 \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-2} - 4 < 0$$

$$\frac{3x+1-4(3x-2)}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{3x+1-12x+8}{3x-2} < 0$$

$$\frac{-9x+9}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{3x-2} > 0,$$ aplicando el criterio de los puntos críticos.



Como la inecuación es $\frac{x-1}{3x-2}>0$, entonces la solución es: $x \in <-\infty,\frac{2}{3}> U <1,+\infty>$

De donde $a=\frac{2}{3}$, b = 1 entonces $ab=\frac{2}{3}$ la respuesta es **b**

(119) La solución de la inecuación $[\![x^2-2x-2]\!]<13$ es:

a) <-3,5> b) [-3,0> c) [0,5> d) [1,3> e) [2,5>

Desarrollo

Por la propiedad: si $[\![x]\!]<a \Rightarrow x<a$

$[\![x^2-2x-2]\!]<13 \Rightarrow x^2-2x-2<13 \Rightarrow x^2-2x+1<16$

$(x-1)^2<16 \Rightarrow -4<x-1<4 \Rightarrow -3<x<5$ ∴ x ∈ <-3,5> la respuesta es **a**

(120) La solución de la inecuación $2[\![x+1]\!]^2-11[\![x]\!]\leq -4$ es:

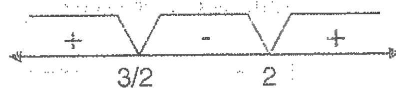
a) [0,2> b) [2,3> c) [0,3> d) [1,2 e) [0,1>

Desarrollo

Como $[\![x+1]\!]=[\![x]\!]+1$ entonces: $2([\![x]\!]+1)^2-11[\![x]\!]\leq -4$ desarrollando

$2[\![x]\!]^2+4[\![x]\!]+2-11[\![x]\!]\leq -4$

$2[\![x]\!]^2-7[\![x]\!]+6\leq 0 \Rightarrow (2[\![x]\!]-3)([\![x]\!]-2)\leq 0$



como $(2[\![x]\!]-3)([\![x]\!]-2)\leq 0$ entonces: $[\![x]\!]\in[\frac{3}{2},2] \Rightarrow [\![x]\!]=2 \Rightarrow 2\leq x<3$

∴ x ∈ [2,3> la respuesta es **b**

(121) La solución de la inecuación $\left|[\![\frac{1}{2x}]\!]-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right|<\sqrt{x}$ es:

a) [1,∞> b) [0,1> c) [1,3> d) [2,3> e) [3,4>

Desarrollo

Calculando los valores de x en donde la expresión esta definida, es decir:

$\frac{x-1}{x} \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0$ de donde $x \in [1,+\infty>$

ahora calcularemos $\left[\!\left[\frac{1}{2x}\right]\!\right]$ cuando $x \in [1,+\infty>$

como $x \in [1,+\infty> \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2$ invirtiendo

$0 < \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\!\left[\frac{1}{2x}\right]\!\right] = 0$, por lo tanto:

$$\left|\left[\!\left[\frac{1}{2x}\right]\!\right] - \sqrt{\frac{x-1}{x}}\right| < \sqrt{x} \Rightarrow \left|0 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}\right| < \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{x}$$

como $\sqrt{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} < x \Rightarrow x^2 - x + 1 > 0$

como $x^2 - x + 1 > 0, \ \forall x \in R$ entonces para $x \in [1,+\infty>$, $x^2 - x + 1 > 0$

Por lo tanto la solución es: $\boxed{x \in [1,+\infty>}$ la respuesta es $\boxed{a}$

(122) Al resolver la desigualdad $\log_5(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{35}{8}) < 0$ se pide dar la suma de todos los números enteros que la satisfacen.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

Aplicando la siguiente propiedad de logaritmo

$\log_a b < 0 \ \wedge \ a > 1 \Leftrightarrow 0 < b < 1$

$\log_5(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{35}{8}) < 0$, $a = 5 > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{35}{8} < 1$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 6x + \frac{35}{4} < 2$$

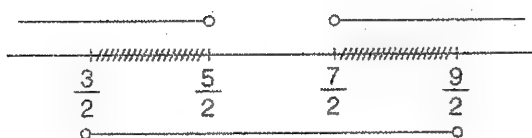
$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 - 6x + \frac{35}{4} \;\wedge\; x^2 - 6x + \frac{35}{4} < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} < x^2 - 6x + 9 \;\wedge\; x^2 - 6x + 9 < \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} < (x-3)^2 \;\wedge\; (x-3)^2 < \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-3 > \frac{1}{2} \vee x-3 < -\frac{1}{2}) \wedge (-\frac{3}{2} < x-3 < \frac{3}{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad (x > \frac{7}{2} \vee x < \frac{5}{2}) \wedge (\frac{3}{2} < x < \frac{9}{2})$$



$x \in < \frac{3}{2}, \frac{5}{2} > \cup < \frac{7}{2}, \frac{9}{2} >$ de donde los números enteros son 2 y 4 y su suma es $2 + 4 = 6$,

la respuesta es **c**

(123) La solución de la inecuación $\log_{1/3}(2x+5) < -2$ es:

a) <2,∞> b) <0,2> c) <1,4> d) [3,5> e) [1,7]

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $\log_a x < b$ sí $0 < a < 1 \Leftrightarrow x > a^b$

$\log_{1/3}(2x+5) < -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+5 > (\frac{1}{3})^{-2}$

$2x + 5 > 9 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \quad \Rightarrow$ **$x \in <2,+\infty>$** la respuesta es **a**

(124) La solución de la inecuación $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$ es:

a) $< 0, \frac{2}{11} >$ b) $< \frac{2}{11}, \frac{1}{2} >$ c) <1,4> d) <2,5> e) <0,1>

Desarrollo

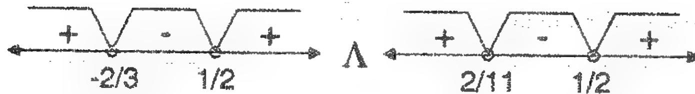
$\log_a x > b$, $a > 1 \iff x > a^b \wedge x > 0$

$\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2 \Rightarrow \log_2(\frac{3x+2}{1-2x}) > 2$

$\log_2(\frac{3x+2}{1-2x}) > 2 \iff \frac{3x+2}{1-2x} > 0 \wedge \frac{3x+2}{1-2x} > 2^2$

$\iff \frac{3x+2}{2x-1} < 0 \wedge \frac{3x+2}{1-2x} - 4 > 0$

$\iff \frac{3x+2}{2x-1} < 0 \wedge \frac{11x-2}{2x-1} < 0$



$x \in \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \rangle \wedge x \in \langle \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \rangle$ $\quad \therefore x \in \langle \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \rangle$ la respuesta es **b**

125 Si $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \langle a, b\rangle \cup \langle c, \infty\rangle$ es la solución de la inecuación $\log_{1/5}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{1/5}(x^2 + 2x + 1)$, hallar el valor de: $a + b$

a) -1 b) 1 c) 0 d) 2 e) 3

Desarrollo

$\log_a P(x) < \log_a Q(x) \iff P(x) > Q(x) \wedge (P(x) > 0 \wedge Q(x) > 0)$, $0 < a < 1$

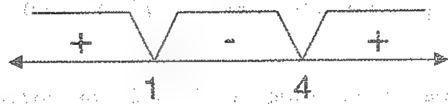
$\log_{1/5}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{1/5}(x^2 + 2x + 1)$, $0 < \frac{1}{5} < 1$



$2x^2 - 3x + 5 > x^2 + 2x + 1 \wedge (2x^2 - 3x + 5 > 0 \wedge x^2 + 2x + 1 > 0)$

$x^2 - 5x + 4 > 0 \ \wedge \ x \neq -1$

$(x-4)(x-1) > 0 \ \wedge \ x \neq -1$



$x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle \ \ x \neq -1$

$\therefore x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 4,+\infty\rangle$ de donde $a = -1$, $b = 1$ y $a + b = 0$

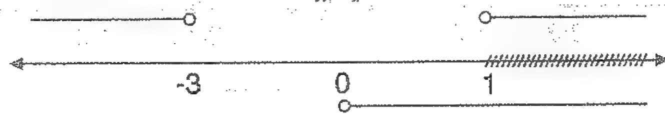
la respuesta es **c**

(126) El conjunto solución de la inecuación $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right) > 1$ es:

a) $\langle 1,3\rangle$ b) $[2,4\rangle$ c) $\langle 0,1\rangle$ d) $\langle 1,5\rangle$ e) $\langle 3,5\rangle$

Desarrollo

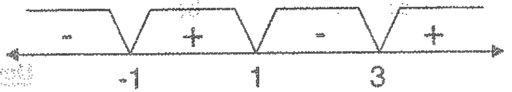
La variable x debe cumplir $x > 0 \ \wedge \ \frac{x+3}{x-1} > 0$



Como $x > 1$ aplicamos la propiedad: $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right) > 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} > x^1 = x$

$\frac{x+3}{x-1} > x \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} - x > 0 \Rightarrow \frac{x+3-x^2+x}{x-1} > 0$

$\frac{x^2-2x-3}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{x-1} < 0$



$x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle$

La solución es: $x \in \langle 1,+\infty\rangle \wedge (\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle) = \langle 1,3\rangle$ $\therefore x \in \langle 1,3\rangle$

La respuesta es **a**

(127) Resolver la inecuación $\log_5 |2x-1| > 4$ y dar como respuesta el complemento de la solución.

a) $[-312,323]$ b) $[-31,31]$ c) $[232,\infty\rangle$ d) $\langle -\infty,312]$ e) $[-5,5]$

Desarrollo

Aplicando la propiedad: si b > 1 $\Rightarrow$ $\log_b x > a \Leftrightarrow x = b^a$

b = 5 > 1 $\Rightarrow$ $\log_5 |2x-1| > 4 \Leftrightarrow |2x-1| > 5^4 = 625$

$|2x-1| > 625 \Leftrightarrow 2x-1 > 625 \vee 2x-1 < -625$

$\Leftrightarrow 2x < 626 \vee 2x < -624$

$\Leftrightarrow x > 313 \vee x < -312$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty,-312\rangle \cup \langle 313,\infty\rangle$

su complemento es [-312,313] luego la respuesta es **a**

(128) Si x ∈ <a,b> ∪ <b,∞> es la solución de la inecuación $\log_6(|\frac{x-2}{x-5}|+35) > 2$, hallar $\frac{16}{7}a+b$

a) 7 b) 9 c) 11 d) 13 e) 15

Desarrollo

Aplicando la propiedad: si b > 1 $\Rightarrow$ $\log_b x > a \Leftrightarrow x > b^a$

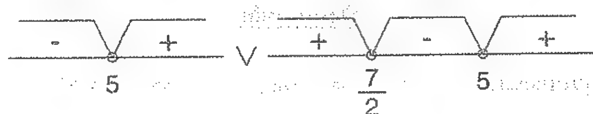
$\log_6(|\frac{x-2}{x-5}|+35) > 2 \Leftrightarrow |\frac{x-2}{x-5}|+35 > 6^2$

$\Leftrightarrow |\frac{x-2}{x-5}| > 1$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-5} > 1 \vee \frac{x-2}{x-5} < -1$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-5} - 1 > 0 \vee \frac{x-2}{x-5} + 1 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x-5} > 0 \vee \frac{2x-7}{x-5} < 0$



$$x \in <5,\infty> \lor x \in <\frac{7}{2},5>$$

$\therefore \quad x \in <\frac{7}{2},5> \cup <5,\infty>$ de donde $a = \frac{7}{2}$, $b = 5$

$\frac{16a}{7} + 5 = \frac{16}{7}(\frac{7}{2}) + 5 = 8 + 5 = 13$, la respuesta es **d**

129 Hallar el menor de los números M tales que: $|\frac{x-9}{x-6}| \le M$, sí $x \in [2,5]$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

$\frac{x-9}{x-6} = 1 - \frac{3}{x-6}$, como $x \in [2,5] \Rightarrow 2 \le x \le 5$

$$-4 \le x - 6 \le -1 \Rightarrow -1 \le \frac{1}{x-6} \le -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \le -\frac{1}{x-6} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + 1 \le \frac{x-9}{x-6} \le 2$$

$\frac{5}{4} \le |\frac{x-9}{x-6}| \le 2 \Rightarrow$ **M = 2** la respuesta es **b**

130 Hallar el mayor número M de tal manera que: $\frac{|x^2+6x+14|}{x^3+27} \ge M$, si $x \in [-2,2]$

a) 6 b) 35 c) $\frac{6}{35}$ d) $\frac{35}{6}$ e) 3

Desarrollo

$x^2 + 6x + 14 = (x+3)^2 + 5$ entonces: si $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \le x \le 2$

$1 \leq x+3 \leq 5 \;\Rightarrow\; 1 \leq (x+3)^2 \leq 25$ de donde $6 \leq (x+3)^2 + 5 \leq 30$

$6 \leq x^2 + 6x + 14 \leq 30$ ... (1)

como $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \;\Rightarrow\; -8 \leq x^3 \leq 8$

$$19 \leq x^3 + 27 \leq 35 \;\Rightarrow\; \frac{1}{35} \leq \frac{1}{x^3+27} \leq \frac{1}{19} \qquad \text{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene: $\dfrac{6}{35} \leq \dfrac{x^2+6x+14}{x^3+27} \leq \dfrac{30}{19}$

$\therefore \dfrac{|x^2+6x+6|}{x^3+27} \geq \dfrac{6}{35} \;\Rightarrow\; \boxed{M = \dfrac{6}{35}}$ la respuesta es $\boxed{c}$

(131) Hallar el número mayor de m y el número menor M tal que para todo $x \in [\frac{1}{2},1]$ se cumple: $m \leq \dfrac{x+2}{x+3} \leq M$

a) $\frac{5}{7};\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{5};\frac{4}{3}$ c) 1;2 d) $\frac{1}{2};3$ e) $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$

Desarrollo

A la expresión $\dfrac{x+2}{x+3}$ escribiremos en la forma: $\dfrac{x+2}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x+3}$

como $x \in [\frac{1}{2},1] \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ sumando 3

$\frac{7}{2} \leq x+3 \leq 4$, invirtiendo $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{2}{7}$, multiplicando por -1

$-\frac{2}{7} \leq -\frac{1}{x+3} \leq -\frac{1}{4}$ sumando 1

$1-\frac{2}{7} \leq 1-\frac{1}{x+3} \leq 1-\frac{1}{4}$ entonces $\frac{5}{7} \leq \frac{x+2}{x+3} \leq \frac{3}{4}$

de donde $m = \frac{5}{7}$ y $M = \frac{3}{4}$ la respuesta es **a**

(132) El menor número M con la propiedad $3+6x-x^2 \leq M$, para todo valor real x, es:

a) 6 b) 13 c) 12 d) 2 e) 11

Desarrollo

$3+6x-x^2 \leq M \iff x^2-6x+M-3 \geq 0, \ \forall x \in R$

esto quiere decir que el discriminante es negativo

$\Delta = (-6)^2 - 4(M-3) \leq 0$ de donde $36 - 4M + 12 \leq 0$

$4M \geq 48 \Rightarrow M \geq 12$ luego M toma los valores desde 12 hasta ∞, luego el menor valor de M es 12. La respuesta es **c**

(133) Si $m \geq -x^2+3x+12$ ¿Cuál es el menor valor real que puede tomar m?

a) 2 b) 14 c) 12 d) 14.25 e) 12.25

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente:

$ax^2+bx+c \geq 0, \ \forall x \in R \iff a > 0 \wedge \Delta \leq 0$, de donde

$m \geq -x^2+3x+12 \iff x^2-3x+m-12 \geq 0, \ \forall x \in R$

$\iff \Delta = (-3)^2 - 4(m-12) \leq 0$

$\iff 9 - 4m + 48 \leq 0$

$\iff m \geq \frac{57}{4}$

entonces el valor de m es $\frac{57}{4} = 14.25$, la respuesta es **d**

(134) Hallar el menor número M con la propiedad que para todo $x \in R$: $1+6x-x^2 \leq M$

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Desarrollo

Aplicando la propiedad siguiente se tiene:

$ax^2+bx+c\geq 0,\ \forall\, x\in R \iff a>0 \wedge \Delta\leq 0$, de donde

$$x^2+6x+M-1\geq 0,\ \forall\, x\in R \iff \Delta=b^2-4ac\leq 0$$

$$\iff 6^2-4(M-1)\leq 0$$

$$\iff 36-4M+4\leq 0$$

$$\iff 10\leq M$$

$$\iff$$

como nos piden el mínimo entonces M = 10, la respuesta es **c**

(135) Hallar el menor número racional m que para cualquier x ∈ [2,4], satisface la desigualdad: $\dfrac{x+3}{x-5}\leq m$

a) $-\dfrac{2}{3}$ b) $-\dfrac{5}{3}$ c) $-\dfrac{7}{3}$ d) -7 e) -6

Desarrollo

$$\frac{x+3}{x-5}=\frac{(x-5)+8}{x-5}=1+\frac{8}{x-5}$$

como $x\in[2,4] \iff 2\leq x\leq 4$, restando 5

$\iff -3\leq x-5\leq -1$, invirtiendo

$\iff -1\leq \dfrac{1}{x-5}\leq -\dfrac{1}{3}$, multiplicando por 8

$\iff -8\leq \dfrac{8}{x-5}\leq -\dfrac{8}{3}$, sumando 1

$\iff -7\leq 1+\dfrac{8}{x-5}\leq -\dfrac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad -7 \leq \frac{x+3}{x-5} \leq -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-5} \leq -\frac{5}{3}$$

el menor número m será $-\frac{5}{3}$, la respuesta es **b**

(136) Encontrar el mayor número "m" con la propiedad de que para todo x ∈ R: $m \leq x^2 + 14x + 33$

a) -4 b) -8 c) -12 d) -16 e) -20

Desarrollo

Se conoce que: $ax^2 + bx + c \geq 0$, ∀ x ∈ R ⇔ a > 0 ∧ Δ ≤ 0

$m \leq x^2 + 14x + 33 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 14x + 33 - m \geq 0$, ∀ x ∈ R

$\Leftrightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 14^2 - 4(33 - m) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 196 - 132 + 4m \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 64 + 4m \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq -16$

Luego el mayor número m será –16, la respuesta es **d**

(137) Hallar el menor número de "m" con la propiedad: $7 + 12x - 2x^2 \leq m$, ∀ x ∈ R

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

Desarrollo

Aplicando: $ax^2 + bx + c \geq 0$, ∀ x ∈ R ⇔ a > 0 ∧ Δ ≤ 0

$7 + 12x - 2x^2 \leq m \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 12x + m - 7 \geq 0$, ∀ x ∈ R

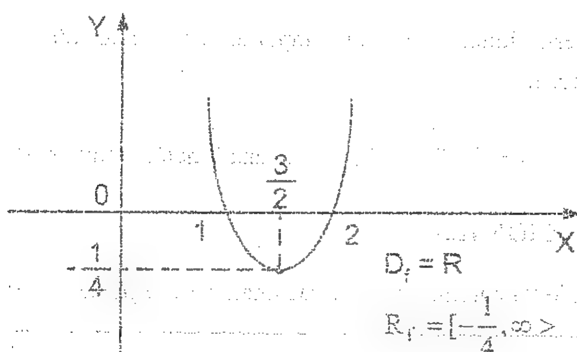
$\Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad (-12)^2 - 4(2)(m - 7) \leq 0$

Como es una parábola donde $a = 1 > 0$, la gráfica se abre hacia arriba y que corta al eje X en 1 y 2.

Como $y = f(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow y = x^2 - 3x + 2$, completamos cuadrados se tiene:

$y + \frac{1}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ de donde $y + \frac{1}{4} = (x - \frac{3}{2})^2$ luego el vértice es $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$



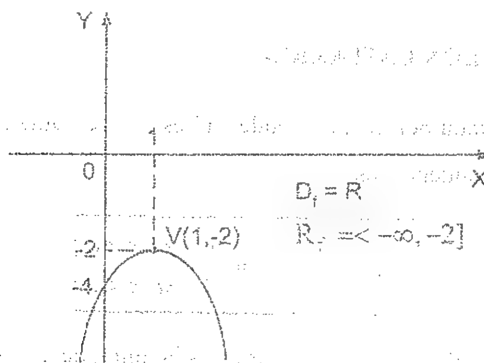
Ejemplo.- Graficar la función $f(x) = -2x^2 + 4x - 4$

Desarrollo

Como $y = f(x) = -2x^2 + 4x - 4$ entonces $y = -2x^2 + 4x - 4$

Completando cuadrado: $y + 2 = -2(x^2 - 2x + 1)$, de donde $y + 2 = -2(x-1)^2$

como $a = -2 < 0$, la gráfica se abre hacia abajo y tiene como vértice a $V(1,-2)$



(9) **FUNCIÓN POLINOMIAL.-**

A la función f, le llamaremos función polinomial, si su regla de correspondencia es:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\ ,\ x \in R$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números reales, $a_n \neq 0$.

La grafica de esta función tiene un comportamiento ondulatorio y esto depende del tipo de raíces que posee.

Ejemplo.- $f(x)=5x^5+7x^4+3x+6$, es una función polinomial.

(10) **FUNCIÓN RACIONAL.-**

A la función f, le llamaremos función racional, si su regla de correspondencia es:

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0};\ n,m \in Z^+$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ son constantes reales y $b_m \neq 0$.

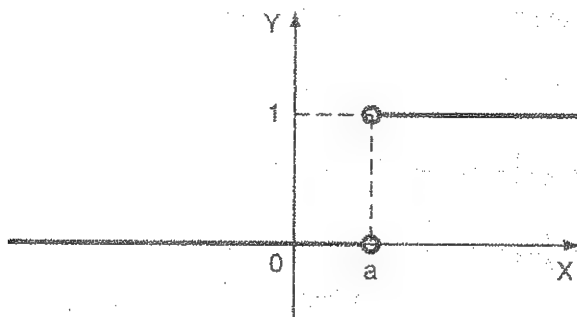
Ejemplo.- La función $f(x)=\frac{x^2+5x-17}{x^2-5x+6}$, es una función racional cuyo dominio es el conjunto de todas las x, de tal manera que el denominador no se anule, es decir: $D_f=\{x \in R / x^2-5x+6 \neq 0\} = R-\{2,3\}$

(11) **FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO.-**

A la función denotada por $U_a(x)$ donde "a" es fijo se llama función escalón unitario, si su regla de correspondencia es:

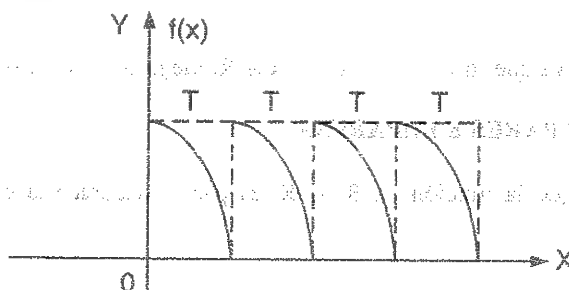
$$f(x)=U_a(x)=\begin{cases} 1\ , & si\ \ x \geq a \\ 0\ , & si\ \ x < a \end{cases}$$

donde $D_f = R$ y $R_f=\{0,1\}$ y su gráfica es la unión de dos funciones constantes



(12) FUNCIÓN PERIÓDICA.-

La función f: R → R, se dice que es una función periódica si existe un número T > 0, tal que f(x + T) = f(x), $\forall\, x \in D_f$ al menor número T > 0 que satisface la condición de periocidad se denomina periodo de la función.



Ejemplo.- Graficar y determinar el periodo de la función $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$

Desarrollo

Como $[\![x]\!] = n \iff n \le x < n+1,\ n \in Z$, entonces

$x \in [0,1> \Rightarrow [\![x]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = (-1)^0 = 1$

$x \in [1,2> \Rightarrow [\![x]\!] = 1 \Rightarrow f(x) = (-1)^1 = -1$

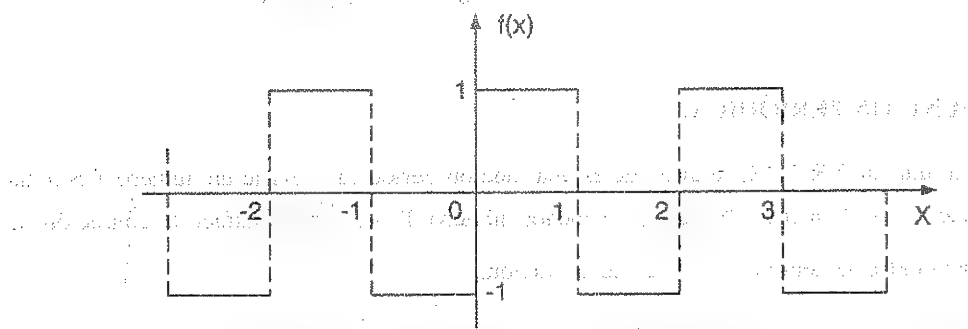
$x \in [2,3> \Rightarrow [\![x]\!] = 2 \Rightarrow f(x) = (-1)^2 = 1$

$x \in [3,4> \Rightarrow [\![x]\!] = 3 \Rightarrow f(x) = (-1)^3 = -1$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [\![x]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = (-1)^{-1} = -1$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [\![x]\!] = -2 \Rightarrow f(x) = (-1)^{-2} = 1$

$x \in [-3,-2> \Rightarrow [\![x]\!] = -3 \Rightarrow f(x) = (-1)^{-3} = -1$

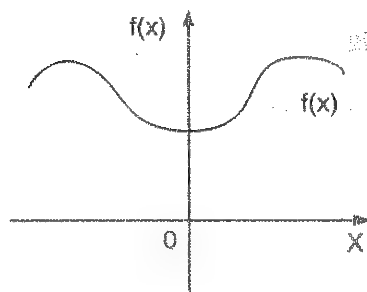


Como se observa que $f(x + 2) = f(x)$, $\forall\ x \in R$, luego f(x) es periódica de periodo T = 2

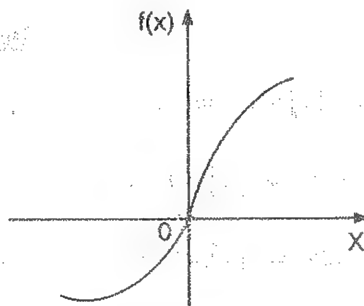
(13) FUNCIONES PARES E IMPARES.-

i) Se dice que la función f: R → R, es par, si satisface la condición $f(-x) = f(x)$, $\forall\ x \in D_f$.

ii) Se dice que la función f: R → R, es impar, si satisface la condición $f(-x) = -f(x)$, $\forall\ x \in D_f$.



función par



función impar

Ejemplos.-

① La función $f(x)=\dfrac{|x|}{1+x^2}$ es función par, puesto que:

$$f(-x)=\frac{|-x|}{1+(-x)^2}=\frac{|x|}{1+x^2}=f(x)$$

② La función $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ es función impar, puesto que:

$$f(-x)=\frac{-x}{1+|-x|}=-\frac{x}{1+|x|}=-f(x)$$

OBSERVACIÓN.- Observamos que una función par es simétrica respecto del eje vertical en el origen, mientras que una función impar es antisimetrica respecto del eje vertical en el origen.

22.9. EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN.-

Consideremos una función f con regla de correspondencia.

$$y = f(x), \quad x \in D_f$$

Si x toma valores específicos, por ejemplo: $x = x_0$, entonces $y_0 = f(x_0)$ se dice que la función ha sido evaluada, en otras palabras es:

Cuando $x = x_0$ el valor de la función es $f(x_0)$

Ejemplo.- Si $f(x)=2x^3+x^2+x+2$, el valor de f en el punto x = 2 es f(2) es decir:

$$f(2)=2(2)^3+(2)^2+2+2=16+4+2+2=24$$

Ejemplo.- Si $f(x)=x^2+x+1$ entonces $f(z)=z^2+z+1$

$$f(\sqrt{y})=y+\sqrt{y}+1$$

Ejemplo.- Si $f(x)=5^x$, probar que f(x + y) = f(x).f(y)

Desarrollo

$$f(x+y)=5^{x+y}=5^x.5^y=f(x).f(y)$$

$\therefore$ f(x + y) = f(x).f(y)

22.10. FUNCIONES DEFINIDAS CON VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA.-

En las funciones definidas con dos o más reglas de correspondencia, su dominio y rango se determinan de la siguiente forma:

Suponiendo que la función f es definida por:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in D_{f_1} \\ f_2(x), & x\in D_{f_2} \end{cases}, \text{ donde } D_{f_1}\cap D_{f_2}=\phi$$

el dominio de f(x) se determinan así: $D_f = D_{f_1}\cup D_{f_2}$

el rango de la función f(x) se calcula por: $R_f = R_{f_1}\cup R_{f_2}$

Esta forma de calcular dominio y rango de una función con dos reglas de correspondencia, también se extiende a funciones de tres o más reglas de correspondencia.

Ejemplo.- Calcular el dominio y rango de la función: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \ \ x\geq 1 \\ x^2-2 & si \ \ x<0 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando su dominio se tiene: $\begin{cases} f_1(x)=2x+1, & si \ \ x\geq 1 \\ f_2(x)=x^2-2, & si \ \ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{f_1}=[1,+\infty> \\ D_{f_2}=<-\infty,0> \end{cases}$

Luego su dominio de f(x) es: $D_f = D_{f_1}\cup D_{f_2}=[1,+\infty>\cup<-\infty,0>$

$$\therefore D_f = <-\infty,0>\cup[1,+\infty>$$

Ahora calcularemos el rango:

Si $x \geq 1 \Rightarrow y = 2x + 1$ despejamos x: $x = \frac{y-1}{2} \geq 1 \Rightarrow y \geq 3$ de donde: $y \in [3,+\infty>$

Si $x<0 \Rightarrow y = x^2 - 2$, despejando x se tiene: $x = -\sqrt{y+2} < 0 \Rightarrow \sqrt{y+2} > 0 \Rightarrow y > -2$

de donde: $y \in <-2,+\infty>$

Luego el rango de la función f es dada por: $R_f = <-2,+\infty> \cup [3,+\infty> = <-2,+\infty>$

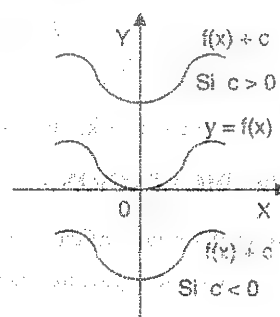
22.11. TRAZADO DE GRÁFICOS ESPECIALES.-

Cuando se conoce una función y = f(x), en base a esta función, se puede construir otra función en una forma rápida mediante el siguiente criterio:

1er. DESPLAZAMIENTO VERTICAL.-

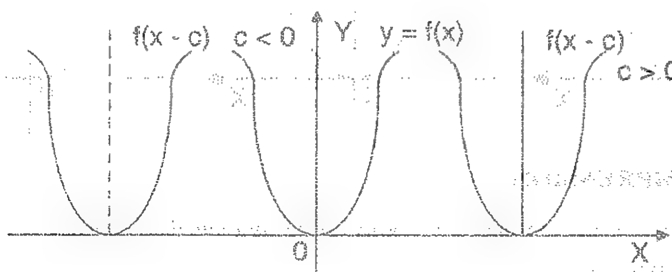
Si se tiene la gráfica de y = f(x) entonces la gráfica de la función:

F(x) = f(x) + c se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de y = f(x) en c unidades, siendo hacia arriba si c > 0 y hacia abajo si c < 0.



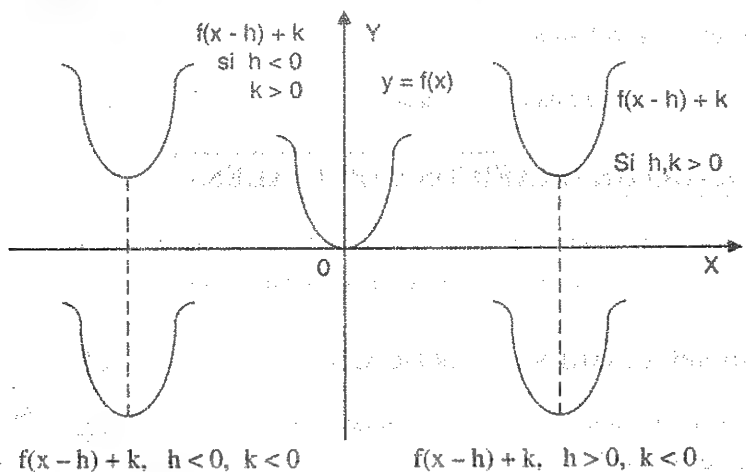
2do. DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL.-

Si se tiene la gráfica de y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(x – c) se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de y = f(x) en c unidades, siendo hacia la derecha si c > 0 y hacia la izquierda si c < 0.



3er. DESPLAMIENTO VERTICAL Y HORIZONTAL.-

Si se tiene la gráfica de $y = f(x)$ entonces la gráfica de la función $F(x) = f(x - h) + k$ se obtiene desplazando horizontal y verticalmente la gráfica $y = f(x)$ en h y k unidades respectivamente.

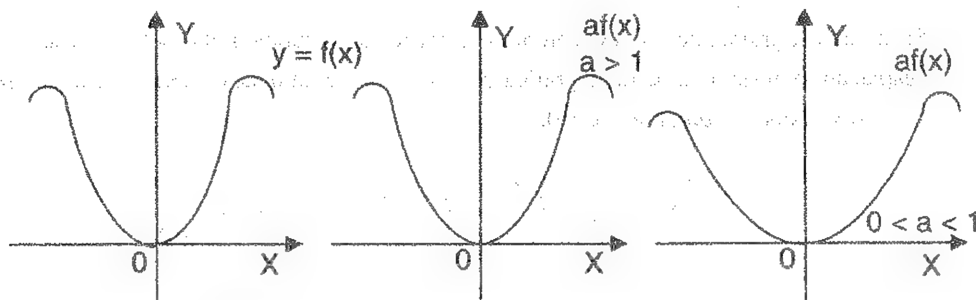


4ta. DILATACIÓN.-

Si se tiene la gráfica $y = f(x)$ entonces la gráfica de la función $F(x) = af(x)$, $a > 0$ se obtiene de la siguiente manera:

i) Si $a > 1$ la gráfica esta estirándose verticalmente en un factor a en base al eje X.

ii) Si $0 < a < 1$, la gráfica esta encogiéndose verticalmente en su factor a.

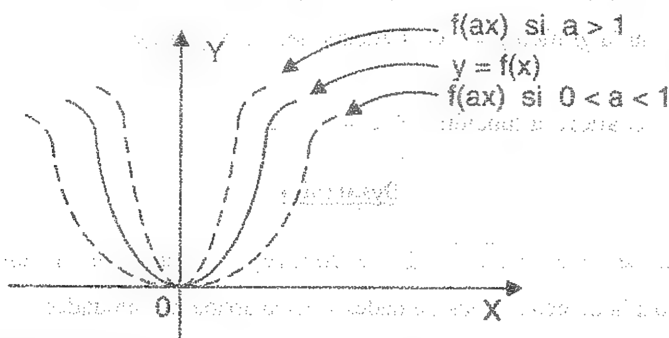


5ta. COMPRENSIÓN.-

Si se tiene $y = f(x)$ entonces la gráfica de la función $F(x) = f(ax)$, $a > 0$ se obtiene de la siguiente manera:

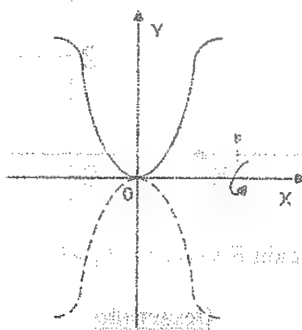
i) Si a > 1, la gráfica se encoge horizontalmente en un factor a en base al eje Y.

ii) Si 0 < a < 1, la gráfica se estira horizontalmente en un factor a en base al eje Y.



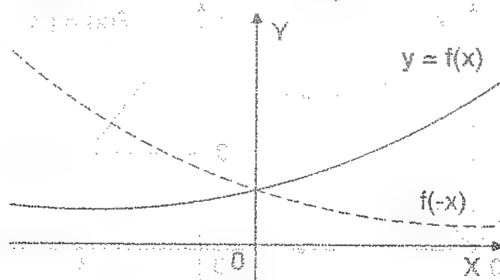
6ta. REFLEJO EN EL EJE X.-

Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = -f(x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje X.



7ma. REFLEJO EN EL EJE Y.-

Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(-x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje Y.



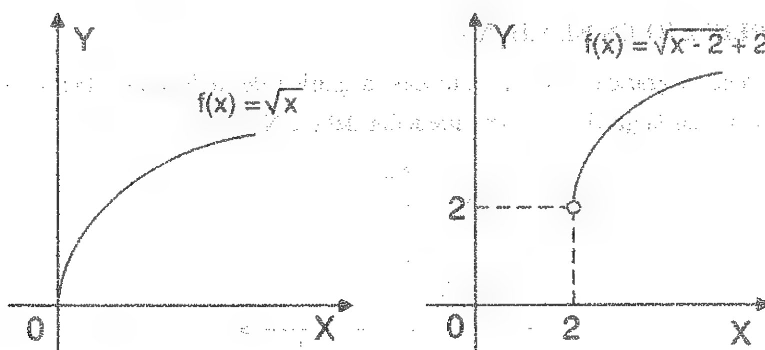
8va. REFLEJO EN EL EJE X Y EL EJE Y.-

Si se tiene la gráfica y = f (x) entonces la gráfica de la función F(x) = -f(-x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje X y el eje Y.

Ejemplo.- Graficar la función $F(x) = \sqrt{x-2} + 2$

Desarrollo

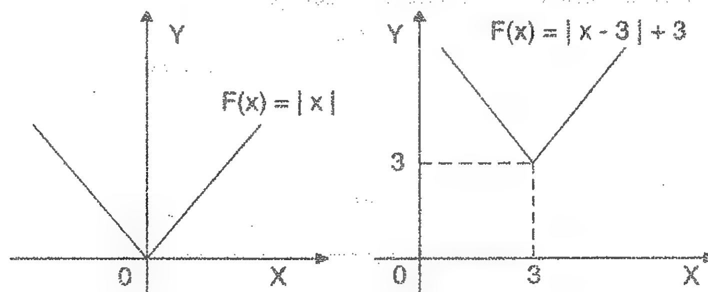
La gráfica de $F(x) = \sqrt{x-2} + 2$ se construye a partir de la función $f(x) = \sqrt{x}$, trasladando a la derecha 2 dos unidades y hacia arriba dos unidades.



Ejemplo.- Graficar la función F(x) = | x – 3 | +3

Desarrollo

La gráfica de F(x) = | x – 3 | + 3 se construye a partir de la función f(x) = | x |, trasladando a la derecha 3 unidades y hacia arriba 3 unidades.



Ejemplos.-

(1) Determinar el dominio y rango de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Desarrollo

Como $y=f(x)=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y=\sqrt{x^2-1}$. Luego analizamos los valores que x puede tomar para que "y" sea real, y como $y=\sqrt{x^2-1}$ entonces "y" es real si $x^2-1\geq 0$ $\Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow x\leq -1 \vee x\geq 1$ por lo tanto el dominio es: $D_f=<-\infty,-1]\cup[1,\infty>$

Ahora calculamos el rango, y para esto despejamos x $y=\sqrt{x^2-1}$, $y\geq 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y^2+1}$, Luego analizamos los valores que "y" puede tomar para que x sea real y como $x=\pm\sqrt{y^2+1}$ entonces x es real $\forall y\in R$.

Por lo tanto el rango de f es : $R_f=[0,+\infty> \cap R=[0,+\infty>$

(2) Calcular el rango de $f(x)=2x^2+5x-6$

Desarrollo

Como $y=f(x) \Rightarrow y=2x^2+5x-6$ es una función cuadrática en estos casos el rango se determina completando cuadrados:

$y+6=2(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16})-\frac{25}{8}$ de donde $y+\frac{73}{8}=2(x+\frac{5}{4})^2$

Luego $V(-\frac{5}{4},-\frac{73}{8})$ por lo tanto el rango de f es: $R_f=[-\frac{73}{8},+\infty>$

(3) Determinar dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x+1}$

Desarrollo

Factorizando y simplificando se tiene: $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x+1}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1}=2x-1,\ x\neq -\frac{1}{2}$

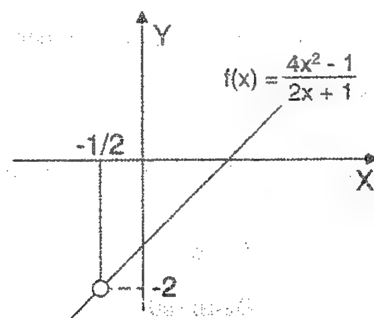
Luego como f(x) = 2x − 1 , $x \neq -\frac{1}{2}$ su dominio es: $D_f = R - \{-\frac{1}{2}\}$

Ahora calculando el rango, para esto despejamos x: $y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$

como $x \in <-\infty, -\frac{1}{2}> \cup <-\frac{1}{2}, \infty>$ entonces $\frac{y+1}{2} \in <-\infty, -\frac{1}{2}> \cup <-\frac{1}{2}, \infty>$

$\frac{y+1}{2} < -\frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2} < \frac{y+1}{2}$ entonces y < - 2 ∨ - 2 < y

Por lo tanto $R_f = <-\infty, -2> \cup <-2, \infty>$



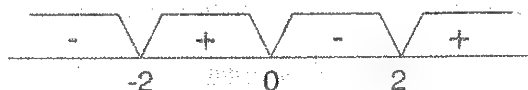
NOTA.- Aceptamos que: $-\infty + a = -\infty, \forall a \in R$; $a + \infty = +\infty, \forall a \in R$

(4) Determinar el dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2-4}}$

Desarrollo

La función f(x) está bien definida si:

$\frac{2x}{x^2-4} \geq 0$ entonces $\frac{x}{(x+2)(x-2)} \geq 0$, ahora resolvemos la inecuación.



Luego $D_f = <-2, 0] \cup <2, +\infty>$

Para determinar el rango despejamos x, como y = f(x)

Entonces $y=\sqrt{\frac{2x}{x^2-4}},\ y\geq 0 \Rightarrow y^2=\frac{2x}{x^2-4}$ de donde $y^2x^2-2x-4y^2=0,\ y\geq 0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+16y^4}}{2y^2},\ y\geq 0$,racionalizando $x=\frac{-16y^4}{2y^2(2+\sqrt{4+16y^4})}=\frac{-8y^2}{2+\sqrt{4+16y^4}},\ y\geq 0$

x es real si y solo si $y\in R$. Luego $R_f=[0,+\infty>\wedge R=[0,+\infty>$

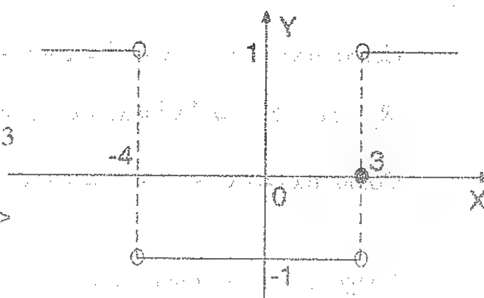
(5) Determinar dominio, rango y graficar la función: $f(x)=sig(\frac{x-3}{x+4})$

Desarrollo

Aplicando la definición de la función signo se tiene:

$$f(x)=sig(\frac{x-3}{x+4})=\begin{cases}-1 & si\ \frac{x-3}{x+4}<0\\ 0 & si\ \frac{x-3}{x+4}=0\\ 1 & si\ \frac{x-3}{x+4}>0\end{cases}$$ al resolver cada una de las inecuaciones se tiene:

$$f(x)=sig(\frac{x-3}{x+4})=\begin{cases}-1, & si\ -4<x<3\\ 0, & si\ \ x=3\\ 1, & si\ \ x<-4\ \vee\ x>3\end{cases}$$



Su dominio es: $D_f=<-\infty,-4>\cup<-4,\infty>$

Su rango es $R_f=\{-1,0,1\}$

(6) Determinar el dominio rango y graficar la función: $f(x)=[\![\sqrt{x}]\!]$

Desarrollo

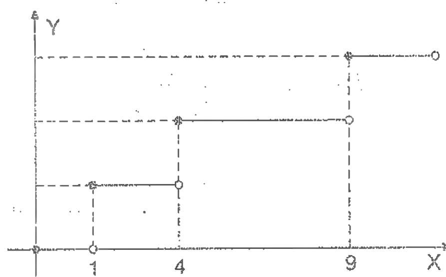
Calculando su dominio se tiene: f(x) está definida si $x\geq 0$, luego $D_f=[0,\infty>$

Por lo tanto su rango es: $R_f = Z_0^+ = \{0,1,2,...\}$

Sí $[\![\sqrt{x}]\!] = 0 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \le x < 1$

Si $[\![\sqrt{x}]\!] = 1 \Rightarrow 1 \le \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 1 \le x < 4$

Si $[\![\sqrt{x}]\!] = 2 \Rightarrow 2 \le \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 4 \le x < 9$

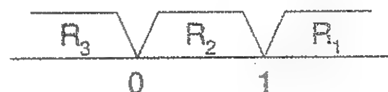


(7) Determinar el dominio y graficar la función: $f(x) = |x| + |x-1|$

Desarrollo

Por definición del valor absoluto se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \ge 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & si \ x \ge 1 \\ -x+1 & si \ x < 1 \end{cases}$$



Ahora calculando las reglas de correspondencia de f(x)

R_3 : Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x, \ |x-1| = 1-x$

como $f(x) = |x| + |x-1| \Rightarrow f(x) = -x + 1 = 1 - 2x$, para $x < 0$

R_2 : Si $0 \le x \le 1 \Rightarrow |x| = x, \ |x-1| = 1-x$

Como $f(x) = |x| + |x-1| = x + 1 - x + 1 \Rightarrow f(x) = 1$, para $0 \le x < 1$

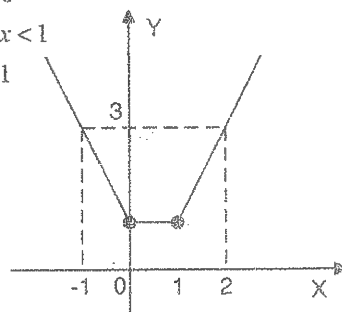
R_1 : Si $x \ge 1 \Rightarrow |x| = x, \ |x-1| = x-1$

Como $f(x) = |x| + |x-1| = x + x - 1 = 2x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$, para $x \ge 1$

Luego la función toma la forma: $f(x) = \begin{cases} 1-2x & si \ x < 0 \\ 1 & si \ 0 \le x < 1 \\ 2x-1 & si \ x \ge 1 \end{cases}$

Su dominio $D_f = R$, y su rango es $R_f = [1,+\infty>$

El gráfico es como se muestra en la figura:



(8) Determinar el dominio, rango y graficar la función:

$$f(x)=\begin{cases}[\![x]\!] & si\ [\![x]\!]\ es\ par\\ 2x-[\![x+1]\!] & si\ [\![x]\!]\ es\ impar\end{cases}$$

Desarrollo

Si x ∈ [0,1> ⇒ $[\![x]\!]=0$ es par ⇒ f(x) = 0

Si x ∈ [1,2> ⇒ $[\![x]\!]=1$ es impar ⇒ f(x) = 2x - 2

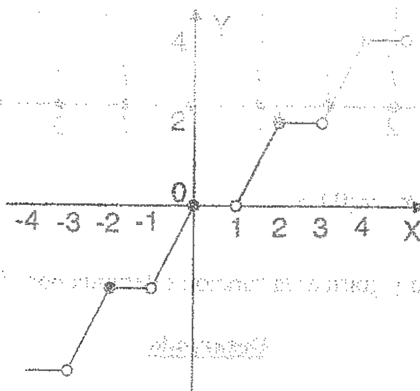
Si x ∈ [2,3> ⇒ $[\![x]\!]=2$ es par ⇒ f(x) = 2

Si x ∈ [3,4> ⇒ $[\![x]\!]=3$ es impar ⇒ f(x) = 2x - 4

Si x ∈ [-1,0> ⇒ $[\![x]\!]=-1$ es impar ⇒ f(x) = 2x

Si x ∈ [-2,-1> ⇒ $[\![x]\!]=-2$ es par ⇒ f(x) = -2

Si x ∈ [-3,-2> ⇒ $[\![x]\!]=-3$ es impar ⇒ f(x) = 2x + 2



(9) Determinar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\sqrt{x-[\![x]\!]}$

Desarrollo

Calculando el dominio de la función f es decir: f(x), está definida si $x-[\![x]\!]\geq 0$ de donde $x\geq[\![x]\!]$ que por definición de máximo entero se cumple ∀x∈R. Luego $D_f=R$

Como $[\![x]\!]=n \Leftrightarrow n \le x < n+1,\ n \in Z$

Entonces $f(x)=\sqrt{x-n}$, $\forall\ x \in [n\ ,\ n+1>,\ \ n \in Z$

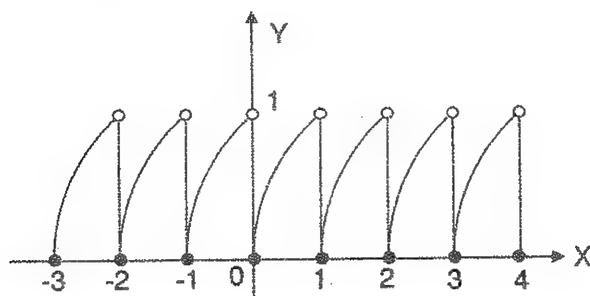
Si $x \in [0,1> \Rightarrow [\![x]\!]=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$

$x \in [1,2> \Rightarrow [\![x]\!]=1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1}$

$x \in [2,3> \Rightarrow [\![x]\!]=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-2}$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [\![x]\!]=-1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+1}$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [\![x]\!]=-2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+2}$



Luego el rango es: $R_f=[0,1>$

(10) Hallar dominio, rango y graficar la función f definida por $f(x)=\dfrac{3-x}{|x|-[\![x]\!]}$

Desarrollo

Calculando el dominio de la función, es decir:

f(x) es definida si $x-[\![x]\!] \ne 0$ es decir: $D_f=R-\{x/|x|-[\![x]\!]=0\}$

Como $|x|=[\![x]\!] \Rightarrow x \in N_0$ puesto que $|x| \ge 0$. Por lo tanto $D_f=R-N_0$

Como $|x|=\begin{cases} x & si\ x \ge 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$, analizamos en la forma

Si $\quad x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x - [\![x]\!]}$

$x \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x} = \dfrac{3}{x} - 1$

$x \in \langle 1,2 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$

$x \in \langle 2,3 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$

$x \in \langle 3,4 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-3} = -1$

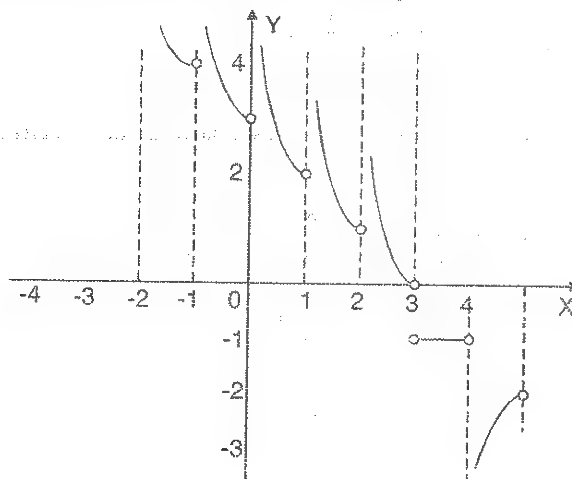
$x \in \langle 4,5 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-4}$

$x \in \langle 5,6 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-5}$

$x \in \langle -1,0 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{-x+1}$

$x \in \langle -2,-1 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{-x+2}$

$x \in \langle -3,-2 \rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{-x+3}$



Luego el rango es : $R_f = <-\infty,-2> \cup \{-1\} \cup <0,+\infty>$

(11) Determinar el rango y graficar la función definida por

$$f(x) = \left[\!\left[\frac{7x-15}{x-1}\right]\!\right] + 2x\,, \quad \text{si } x \in <-1,0>$$

Desarrollo

Por la propiedad $[\![x+n]\!] = n + [\![x]\!]$, $n \in Z$

$$f(x) = \left[\!\left[\frac{7x-15}{x-1}\right]\!\right] + 2x = \left[\!\left[\frac{7(x-1)}{x-1} - \frac{8}{x-1}\right]\!\right] = \left[\!\left[7 - \frac{8}{x-1}\right]\!\right] + 2x$$

$f(x) = 7 + \left[\!\left[-\frac{8}{x-1}\right]\!\right] + 2x$. Ahora definimos $\left[\!\left[-\frac{8}{x-1}\right]\!\right]$ es decir:

Como $x \in <-1,0> \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow -2 < x-1 < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -8 < \frac{8}{x-1} < -4 \Rightarrow 4 < -\frac{8}{x-1} < 8$$

$$\Rightarrow \left[\!\left[-\frac{8}{x-1}\right]\!\right] = 4, 5, 6, 7 \qquad \ldots (*)$$

Además $\left[\!\left[-\frac{8}{x-1}\right]\!\right] = n \Rightarrow n \le -\frac{8}{x-1} < n+1$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < -\frac{x-1}{8} \le \frac{1}{n}$ este paso se puede realizar n, n + 1 $\neq 0$ de (*)

$$\Rightarrow \frac{8}{n+1} < -x+1 \le \frac{8}{n}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{8}{n+1} < -x \le \frac{8}{n} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{n-8}{n} \le x < \frac{n-7}{n+1}$$

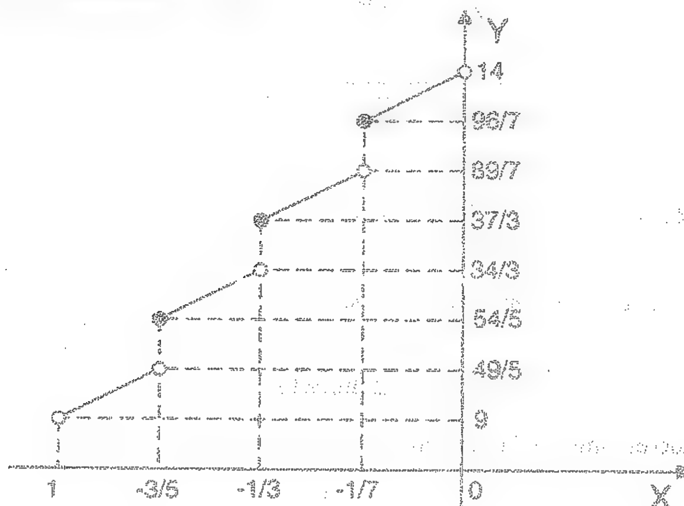
$x \in [\frac{n-8}{n}, \frac{n-7}{n+1}>$ entonces $x \in <-1,0>$ para n = 4, 5, 6, 7

Luego f(x) = 7 + n + 2x, n = 4, 5, 6, 7

Ahora definimos f para cada valor de n

$$f(x) = \begin{cases} 2x+7+4 = 2x+11 & si \quad x \in <-1,-3/5> \\ 2x+7+5 = 2x+12 & si \quad x \in [-3/5,-1/3> \\ 2x+7+6 = 2x+13 & si \quad x \in [-1/3,-1/7> \\ 2x+7+7 = 2x+14 & si \quad x \in [-1/7,0> \end{cases}$$

Graficando la función f se tiene:



$$R_f = <9, \frac{49}{5}> \cup [\frac{54}{5}, \frac{34}{3}> \cup [\frac{37}{3}, \frac{89}{7}> \cup [\frac{96}{7}, 14>$$

(12) Hallar el dominio, rango y graficar la función f(x) definida por: $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & si \quad x \leq 1 \\ 2+x^2, & si \quad x > 1 \end{cases}$

Desarrollo

El dominio se determina en la forma siguiente: $D_f = <-\infty, 1] \cup <1, +\infty> = R$

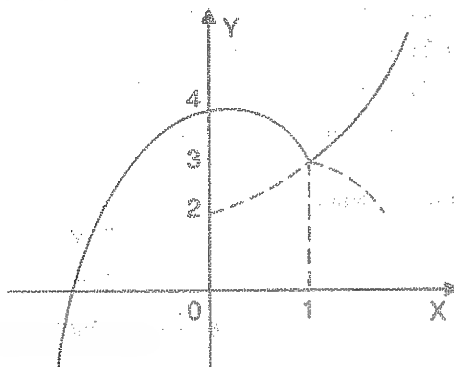
Ahora calculamos el rango por el método gráfico

Si $x \leq 1 \Rightarrow y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y$

$x^2 = -(y-4) \Rightarrow V(0, 4)$ de acuerdo al criterio de la función cuadrática.

Para $x > 1 \Rightarrow y = 2 + x^2$, de donde $y - 2 = x^2 \Rightarrow V(0, 2)$

Ahora graficando se tiene:



Luego $R_f = \langle -\infty, 4] \cup \langle 3, +\infty \rangle = R$

(13) Hallar el rango y graficar la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 12, & si\ x \in [-4, 6] \\ \dfrac{x-2}{x+1}, & si\ x \in \langle 6, +\infty \rangle \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el rango de la función

Sí $x \in [-4, 6] \Rightarrow y = x^2 - x - 12 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4}$

$x \in [-4, 6] \Rightarrow -4 \leq x \leq 6$

$\Rightarrow -\frac{9}{2} \leq x - \frac{1}{2} < \frac{11}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 < \frac{121}{4}$

$\Rightarrow -\frac{49}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4} < \frac{121}{4} - \frac{49}{4}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{49}{4} \le (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4} < 18$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{49}{4} \le y < 18 \quad \Rightarrow \quad y \in [-\frac{49}{4}, 18>$$

Si $x \in <6, +\infty> \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$

$x \in <6, +\infty> \quad \Rightarrow \quad 6 < x < +\infty \quad \Rightarrow \quad 7 < x+1 < +\infty$

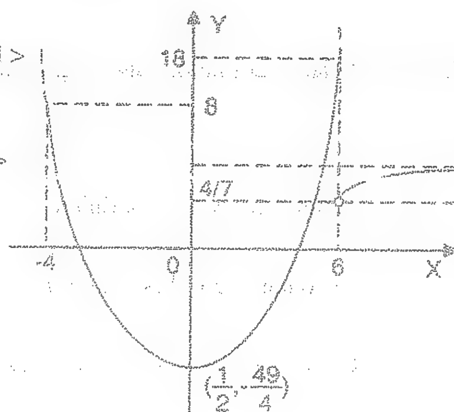
$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{3}{x+1} < \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{3}{7} < -\frac{3}{x+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{7} < 1 - \frac{3}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{7} < y < 1 \quad \Rightarrow \quad y \in <\frac{4}{7}, 1>$$

Luego el rango es: $R_f = [-\frac{49}{4}, 18> \cup <\frac{4}{7}, 1>$

$$\therefore \quad R_f = [-\frac{49}{4}, 18>$$



(14) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{|x+1|}$

Desarrollo

Calculando el dominio de la función f(x) es decir. f(x) está definida si $x \neq -1$

Luego el $D_f = R - \{-1\}$

Ahora a la función expresaremos en la forma:

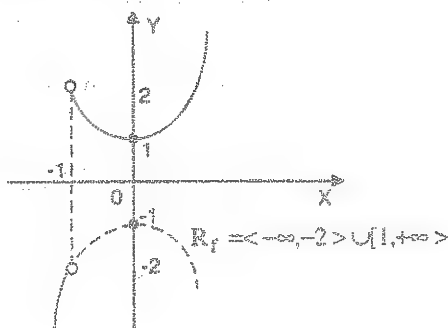
$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{|x+1|}\text{ , como } |x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\geq -1 \\ -x-1, & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

Por lo tanto la función f(x) es dada por: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x>-1 \\ -x^2-1 & si\ x<-1 \end{cases}$

Ahora graficando se tiene:

Si x > -1 $\Rightarrow y=x^2+1 \Rightarrow y-1=x^2$, V(0,1)

x < -1 $\Rightarrow y=-x^2-1 \Rightarrow y+1=-x^2$, V(0,-1)



(15) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$

Desarrollo

La función f(x) está definida si $x-[\![x]\!]\geq 0$

De donde $x\geq[\![x]\!]$ es valida ∀ x ∈ R, luego $D_f=R$

Si x ∈ [0,1 > $\Rightarrow [\![x]\!]=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$

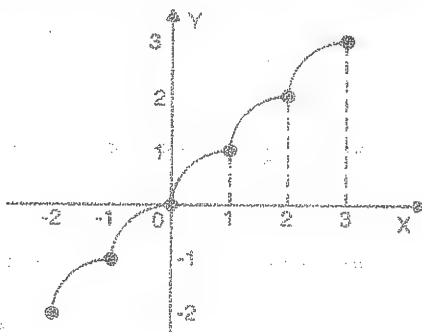
x ∈ [1,2 > $\Rightarrow [\![x]\!]=1 \Rightarrow f(x)=1+\sqrt{x-1}$

x ∈ [2,3 > $\Rightarrow [\![x]\!]=2 \Rightarrow f(x)=2+\sqrt{x-2}$

x ∈ [3,4 > $\Rightarrow [\![x]\!]=3 \Rightarrow f(x)=3+\sqrt{x-3}$

x ∈ [-1,0 > $\Rightarrow [\![x]\!]=-1 \Rightarrow f(x)=-1+\sqrt{1+x}$

x ∈ [-2,-1> $\Rightarrow [\![x]\!]=-2 \Rightarrow f(x)=-2+\sqrt{2+x}$



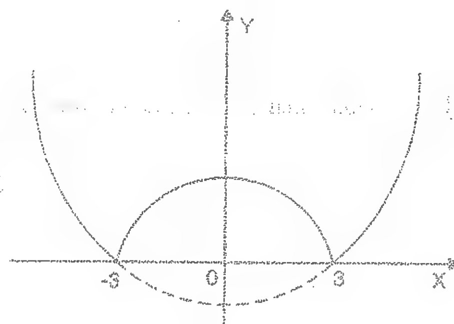
(16) Determinar el rango y graficar la función $f(x) = |x^2 - 9|$

Desarrollo

Aplicando la definición de valor absoluto a la función f(x) expresamos:

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x^2 \geq 9 \\ 9 - x^2, & \text{si } x^2 < 9 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x \in <-\infty, -3] \cup [3, +\infty> \\ 9 - x^2, & \text{si } x \in <-3, 3> \end{cases}$$



El rango de la función f(x) es $R_f = [0, +\infty>$

La gráfica es como se muestra en la figura

(17) Dada la función f: R → R definida por: $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{[\![1-x]\!]}$ f, Halle su dominio.

Desarrollo

La función f(x) esta bien definida si se cumple

$$2x - 1 \geq 0 \wedge [\![1-x]\!] \neq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \wedge 1 - x \notin [0,1>$$

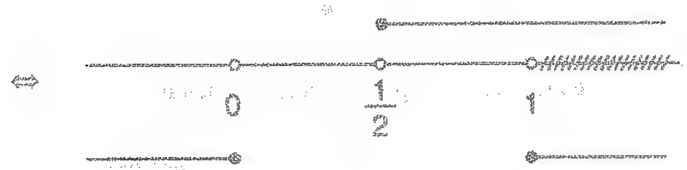
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \wedge 1 - x \in <-\infty, 0> \cup [1, \infty>$$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2} \quad \wedge \ (-\infty < 1 - x < 0 \ \vee \ 1 \leq 1 - x < \infty)$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2} \ \wedge \ (-\infty < -x < -1 \ \vee \ 0 \leq -x < \infty)$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2} \ \wedge \ \ (1 < x < \infty \ \vee \ \infty < x \leq 0)$

$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \quad x \in \, <1,\infty>$

$\therefore \quad D_f = <1, \infty>$

(18) Determinar el rango de la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - x$

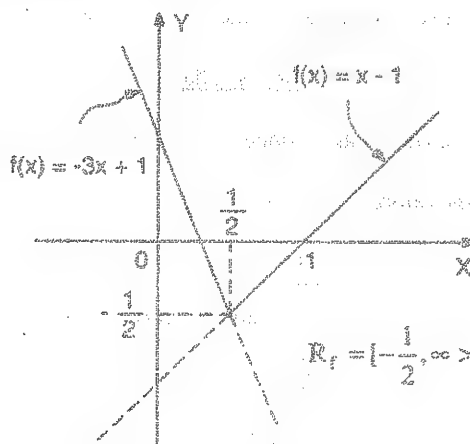
Desarrollo

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - x = \sqrt{(2x-1)^2} - x = |2x - 1| - x$$

por definición de valor absoluto: $|2x-1| = \begin{cases} 2x - 1 & si \ \ x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x & si \ \ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

Luego la función f(x) queda definida en la forma $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \ \ x \geq \frac{1}{2} \\ -3x + 1 & si \ \ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

graficando la función f(x)



(19) Dada la función $f(x) = x^2 sig(\frac{[\![x]\!]^3 + 1}{x^2 + x + 1}) + \sqrt{x} sig([\![\frac{1}{x^2+1}]\!])$; $x \neq 0$. Halle $D_f \cup R_f$

Desarrollo

Calculando el dominio de f(x):

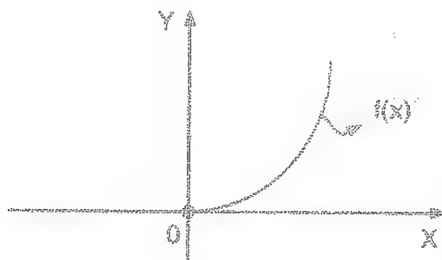
f(x) esta definida si $x \geq 0 \wedge x \neq 0$ entonces $x \in <0,\infty>$ $\therefore D_f = <0,\infty>$

además $\frac{[\![x]\!]^3 + 1}{x^2 + x + 1} > 0$, $\forall x \in <0,\infty>$ entonces $sig(\frac{[\![x]\!]^3 + 1}{x^2 + x + 1}) = 1$

como $x^2 > 0$, $\forall x \in <0,\infty> \Rightarrow x^2 + 1 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} < 1$, $x \neq 0$

entonces $[\![\frac{1}{x^2+1}]\!] = 0 \Rightarrow sig([\![\frac{1}{x^2+1}]\!]) = 0$. Luego $f(x) = x^2(1) + \sqrt{x}(0) = x^2$, $x > 0$

donde $R_f = <0,\infty>$ entonces $D_f \cup R_f = <0,\infty>$



(20) La función f(x) es lineal, hallar dicha función sí f(-1) = 2 , f(2) = -3

Desarrollo

Como f(x) es una función lineal entonces f(x) = ax + b

Ahora calculamos los valores de a y b

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b = 2 \\ f(2) = 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}, \text{ por lo tanto } \quad f(x) = \frac{-5x}{3} + \frac{1}{3}$$

(21) Dada la función f(x) = mx + b, ∀ x∈R, si se sabe que f(3) = 11, f(-3) = 6.

Hallar m + b

Desarrollo

Calculando los valores de m y b

$$\begin{cases} f(3) = 3m + b = 11 \\ f(-3) = -3m + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5}{6} \\ b = \dfrac{51}{6} \end{cases}, \quad \text{entonces:} \quad m + b = \frac{5}{6} + \frac{51}{6} = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$$

$$\therefore \ m + b = \frac{28}{3}$$

(22) Dada la función f(x) = ax + b, x ∈ R, donde a y b son constantes reales, sí f(x + y) = f(x) + f(y) ∀ x, y ∈ R , y sí f(-2) = -6. Hallar a y b

Desarrollo

Como f(x + y) = f(x) + f(y)

a(x + y) + b = ax + b + ay + b

a(x + y) + b = a(x + y) + 2b ⇒ b = 0

Luego f(x) = ax + b ⇒ f(x) = ax

f(-2) = -2a = -6 ⇒ a = 3 $\quad\quad \therefore$ a = 3, b = 0

(23) Si $f(x+4)=x^2+3x$, Hallar f(a + 1)

Desarrollo

Definiremos la función f(x) para esto se hace una sustitución $z=x+4 \Rightarrow x=z-4$

Ahora se sustituye en $f(x+4)=x^2+3x \Rightarrow f(z)=(z-4)^2+3(z-4)=z^2-5z+4$

Luego la función f(x) es dado por: $f(x)=x^2-5x+4$

Calculando f(a + 1) es decir: $f(a+1)=(a+1)^2-5(a+1)+4=a^2-3a$

$$\therefore \quad f(a+1)=a^2-3a$$

(24) Dado el polinomio $P(x)=x^3+(a+1)x^2+x$, se define la función f con dominio {0,1,2,3,5}, por f(a) = resto de la división de P(x) entre x + a , calcular f(2) + f(3)

Desarrollo

Calculando el resto de la división de P(x) entre x + a

$$\begin{array}{l|l} x^3+(a+1)x^2+x & x+a \\ \cline{2-2} -x^3-ax^2 & x^2+x+(1-a) \\ \hline \quad x^2+x & \\ \quad -x^2-ax & \\ \hline \quad\quad (1-a)x & \\ \quad\quad -(1-a)x-a(1-a) & \\ \hline \quad\quad\quad a^2-a = \text{resto} & \end{array}$$

Como $f(a)=a^2-a$

f(2) = 4 − 2 = 2

f(3) = 9 − 3 = 6

Luego f(2) + f(3) = 8

(25) Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$ donde a > 0, f(0) = 2, $R_f=[1,\infty>$. Halle $\dfrac{91a^2-5b^4}{11ab^2}$

Desarrollo

Como $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(0)=0+0+c=2 \Rightarrow c=2$

Además $f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2+2-\frac{b^2}{4a}$ de donde

$R_f=[2-\frac{b^2}{4a},\infty>=[1,\infty> \Rightarrow 2-\frac{b^2}{4a}=1 \Rightarrow b^2=4a$

Luego $\frac{91a^2-5b^4}{11ab^2}=\frac{91a^2-5(16a^2)}{11a(4a)}=\frac{91a^2-80a^2}{44a^2}=\frac{1}{4}$

(26) Construir la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}|x+[\![x]\!]| & si\ [\![x]\!]\ es\ par\\ |x+[\![x-1]\!]| & si\ [\![x]\!]\ es\ impar\end{cases}$

Desarrollo

Si $x\in[0,1> \Rightarrow [\![x]\!]=0$ es par $\Rightarrow f(x)=|x|=x$

$x\in[1,2> \Rightarrow [\![x]\!]=1$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x|=x$

$x\in[2,3> \Rightarrow [\![x]\!]=2$ es par $\Rightarrow f(x)=|x+2|=x+2$

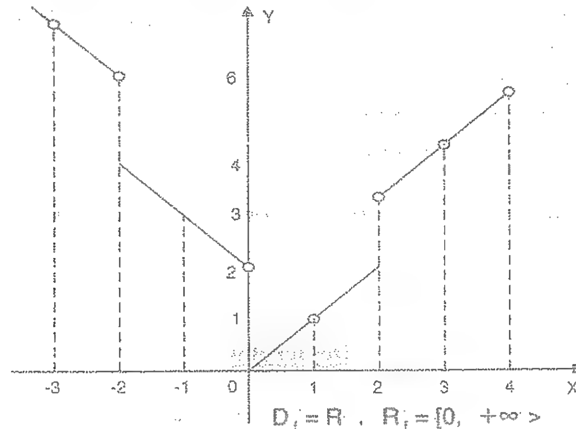
$x\in[3,4> \Rightarrow [\![x]\!]=3$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x+2|=x+2$

$x\in[-1,0> \Rightarrow [\![x]\!]=-1$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x-2|=2-x$

$x\in[-2,-1> \Rightarrow [\![x]\!]=-2$ es par $\Rightarrow f(x)=|x-2|=-x+2$

$x\in[-3,-2> \Rightarrow [\![x]\!]=-3$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x-4|=-x+4$

$x\in[-4,-3> \Rightarrow [\![x]\!]=-4$ es par $\Rightarrow f(x)=|x-4|=-x+4$



$D_f=R$, $R_f=[0,+\infty>$

(27) Hallar la gráfica de $f(x)=(x-[\![x]\!])^2$

Desarrollo

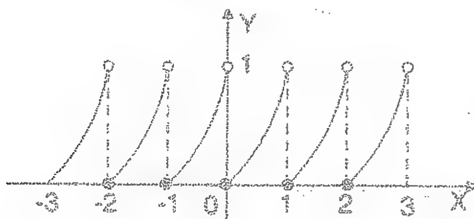
$x\in[0,1> \Rightarrow [\![x]\!]=0 \Rightarrow f(x)=x^2$

$x\in[1,2> \Rightarrow [\![x]\!]=1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2$

$x\in[2,3> \Rightarrow [\![x]\!]=2 \Rightarrow f(x)=(x-2)^2$

$x\in[-1,0> \Rightarrow [\![x]\!]=-1 \Rightarrow f(x)=(x+1)^2$

$x\in[-2,-1> \Rightarrow [\![x]\!]=-2 \Rightarrow f(x)=(x+2)^2$



$D_f=R,\ R_f=[0,1>$

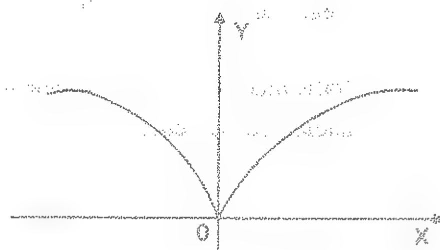
(28) Graficar la función $f(x)=\sqrt{|x|}$

Desarrollo

Por definición $|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$

Luego la función f(x) queda expresado así:

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x\geq 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{si } x<0 \end{cases}$



donde $D_f=\mathbb{R}$ y $R_f=[0,+\infty>$

(29) Hallar el rango y graficar la función f(x) dado por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{ si } x\in[1,2> \\ [\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]} & , \text{ si } x\in[-1,1> \\ \sqrt{-x} & , \text{ si } x\in[-4,-1> \end{cases}$$

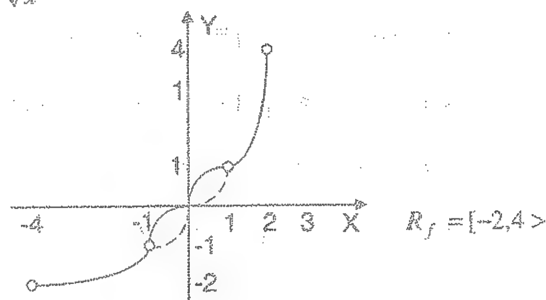
Desarrollo

$x \in [-1,0> \Rightarrow [\![x]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = -1+\sqrt{x+1}$

$x \in [0,1> \Rightarrow [\![x]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

Ahora expresaremos a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , si \;\; x \in [-4,-1> \\ -1+\sqrt{x+1}, & si \;\; x \in [-1,0> \\ \sqrt{x} & , si \;\; x \in [0,1> \\ x^2 & , si \;\; x \in [1,2> \end{cases}$$



$R_f = [-2,4>$

Graficando cada parte de la función

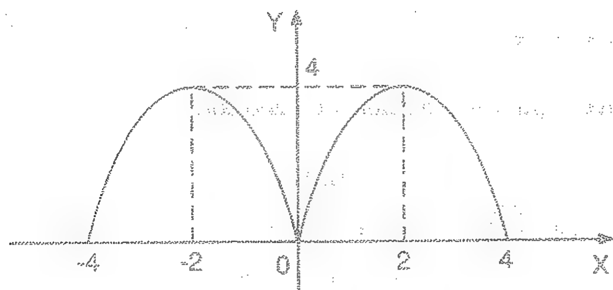
(30) Construir la grafica de $f(x) = 4|x| - x^2$, $x \in$ <-4,4>

Desarrollo

Como $f(-x) = 4|-x| - (-x)^2 = 4|x| - x^2 = f(x)$ entonces f(x) es par

Luego para $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 4x - x^2 = 4-(x-2)^2$

Graficando para $x \geq 0$ y teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje Y por ser la función par se tiene:



22.12. OPERACIONES CON FUNCIONES.-

Consideremos dos funciones reales de variable real, f,g: R → R si $D_f \cap D_g \neq \phi$, Entonces:

a) **IGUALDAD DE FUNCIONES.-**

Diremos que las funciones f y g son iguales sí y sólo sí

i) $D_f = D_g$
ii) $f(x) = g(x)$; $\forall x \in D_f = D_g$

Ejemplo.- Las funciones $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 - 1$

Son iguales porque $D_f = D_g = R$ y f(x) = g(x).

Ejemplo.- Las funciones $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-6)}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-6}$ no son iguales puesto que $D_f = <-\infty,1] \cup [6,+\infty>$ y $D_g = [6,+\infty>$ de donde $D_f \neq D_g$

Ejemplo.- Las funciones $f(x) = 2x^2 - 7x$, $x \in <0,5]$ y $g(x) = 2x^2 - 7x$, $x \in [1,9]$ no son iguales a pesar de tener la misma regla de correspondencia, debido a que sus dominios no coinciden.

b) **SUMA DE FUNCIONES.-**

Teniendo encuenta que una función está definida cuando se indica su dominio y su regla de correspondencia

DEFINICIÓN.- Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente, entonces a la suma de f y g denotado por f + g se define:

i) $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
ii) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in D_f \cap D_g$

Ejemplo.- Hallar f + g si: f={(-1,2),(0,0),(2,4),(3,-1),(4,3)}, g= {(2,0),(3,4),(4,7),(6,2)}

Desarrollo

Primero calculamos el dominio de f y g.

$D_f = \{-1,0,2,3,4\}$, $D_g = \{2,3,4,6\}$

Luego calculamos el dominio de la suma: $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2,3,4\}$

ahora calculamos los pares ordenados que pertenecen a f + g.

$$\begin{cases}(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 4+0 = 4 & (2,4) \in f+g \\ (f+g)(3) = f(3)+g(3) = -1+4 = 3 \quad \Rightarrow & (3,3) \in f+g \\ (f+g)(4) = f(4)+g(4) = 3+7 = 10 & (4,10) \in f+g\end{cases}$$

Luego la suma de f y g es: f + g = {(2,4),(3,3),(4,10)}

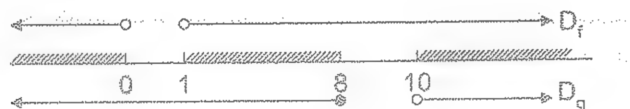
Ejemplo.- Calcular (f + g)(x) sí: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ si } x \geq 1 \\ x^2 - 2, \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1, \text{ si } x \leq 8 \\ 2x^3 \quad , \text{ si } x > 10 \end{cases}$

Desarrollo

Primero calculamos el dominio de f y g, es decir:

$D_f = <-\infty,0> \cup [1,+\infty>$, $D_g = <-\infty,8] \cup <10,+\infty>$

Luego calculamos el dominio de la suma f + g es: $D_{f+g} = D_f \cap D_g$



$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-\infty,0> \cup [1,8] \cup <10,+\infty>$

Ahora definimos la suma en cada intervalo

Si x < 0, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^2 - 2 + 3x + 1 = x^2 + 3x - 1$

Sí 1 ≤ x ≤ 8, (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + 3x + 1 = 5x + 2

Si x > 10, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x+1+2x^3 = 2x^3+2x+1$

Luego la suma (f + g)(x) es: $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+3x-1 & si \ \ x<0 \\ 5x+2 & si \ \ 1 \le x \le 8 \\ 2x^3+2x+1 & si \ \ x>10 \end{cases}$

c) DIFERENCIA DE FUNCIONES.-

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente entonces a la diferencia de f y g denotada por f – g se define:

> i) $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
>
> ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x), \ \forall \ x \in D_f \cap D_g$

Ejemplo.- Hallar f – g si f = {(1,2),(2,5),(3,4),(4,1)} y g = {(0,2),(1,0),(2,1),(-1,3)}

Desarrollo

Primero calculamos el dominio D_f y D_g : $D_f = \{1,2,3,4\}$, $D_g = \{-1,0,1,2\}$

Ahora calculamos el dominio de la diferencia $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1,2\}$

Calculando los pares ordenados que pertenecen a f – g

$$\begin{cases} (f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2-0 = 2 \\ (f-g)(2) = f(2) - g(2) = 5-1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,2) \in f-g \\ (2,4) \in f-g \end{cases}$$

Luego la diferencia f – g es: f – g = {(1,2),(2,4)}

d) MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES.-

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente, entonces a la multiplicación de f y g denotado por f.g es definido por:

> i) $D_{f.g} = D_f \cap D_g$
>
> ii) $(f.g)(x) = f(x).g(x), \ \forall \ x \in D_f \cap D_g$

Ejemplo.- Hallar f.g si: f = {(1,4),(4,5)(2,3),(3,2)} y g = {(0,2),(1,2),(2,-1),(3,0),(5,2)}

Desarrollo

Primero calculamos el dominio D_f y D_g : $D_f = \{1,2,3,4\}$, $D_g = \{0,1,2,3,5\}$

Ahora calculamos el dominio del producto: $D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

Calculamos los pares ordenados que pertenecen a f.g

$$\begin{cases} (f.g)(1) = f(1).g(1) = 4.2 = 8 \\ (f.g)(2) = f(2).g(2) = 3.(-1) = -3 \\ (f.g)(3) = f(3).g(3) = 2.(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,8) \in f.g \\ (2,-3) \in f.g \\ (3,0) \in f.g \end{cases}$$

Luego el producto f.g es: f.g = {(1,8),(2,-3),(3,0)}

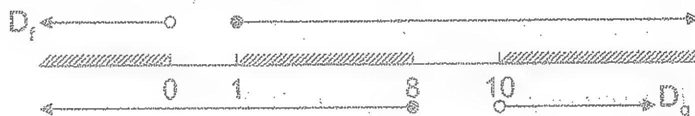
Ejemplo.- Hallar (f.g)(x) donde: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ , \ x \geq 1 \\ x^2 - 2 \ , \ x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1 \ , \ x \leq 8 \\ 2x^3 \ , \ x > 10 \end{cases}$

Desarrollo

Primero calculamos los dominios de f y g:

$D_f = <-\infty,0> \cup [1,+\infty>$, $D_g = <-\infty,8] \cup <10,+\infty>$

Ahora calculamos el dominio del producto f.g



$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = <-\infty,0> \cup [1,8] \cup <10,\infty>$$

Ahora calculamos el producto en cada intervalo

Si x < 0, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2-2).(3x+1) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2$

Si $1 \leq x \leq 8$, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)(3x+1) = 6x^2 + 5x + 1$

Si x > 10, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)2x^3 = 4x^4 + 2x^3$

Luego el producto (f.g)(x) es: $(f.g)(x) = \begin{cases} 3x^3 + x^2 - 6x - 2, & \text{si } x < 0 \\ 6x^2 + 5x + 1 & , \text{ si } 1 \le x \le 8 \\ 4x^4 + 2x^3 & , \text{ si } x > 10 \end{cases}$

e) **DIVISIÓN DE FUNCIONES.-**

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente entonces la división de f y g denotado por $\frac{f}{g}$ es definido por:

i) $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \,/\, g(x) = 0\}$

ii) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D_{f/g}$

Ejemplo.- Hallar $\frac{f}{g}$ si: f={(-2,3), (0,3), (4,0), (5,-3), (6,3)} y

g = {(0,-2), (-2,5), (3,2), (5,0), (8,-2)}

Desarrollo

Primero calculamos el dominio de f y g: $D_f = \{-2,0,4,5.6\}$, $D_g = \{-2,0,3,5,8\}$

Ahora calculamos el dominio del cociente $\frac{f}{g}$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \,/\, g(x) = 0\}$

$= \{-2,0,4,5,6\} \cap \{-2,0,3,5,8\} - \{5 \in D_g \,/\, g(5) = 0\} = \{-2,0,5\} - \{5\} = \{-2,0\}$

Calculando los pares ordenados que pertenecen a $\frac{f}{g}$

$$\begin{cases} (\frac{f}{g})(-2) = \frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{3}{5} \\ (\frac{f}{g})(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2, \frac{3}{5}) \in \frac{f}{g} \\ (0, -\frac{3}{2}) \in \frac{f}{g} \end{cases}$$

Luego el cociente $\frac{f}{g}$ es: $\frac{f}{g}=\{(-2,\frac{3}{5}),(0,-\frac{3}{2})\}$

Ejemplo.- Hallar $(\frac{f}{g})(x)$ sí: $f(x)=\begin{cases}2x+1, & si\ x\in[-3,0>\\ x+2\ , & si\ x\in[0,4]\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2+1, & si\ x\in[-2,2]\\ x-4\ , & si\ x\in<2,5]\end{cases}$

Desarrollo

Calculando los dominios de f y g: $D_f=[-3,0>\cup[0,4]$; $D_g=[-2,2]\cup<2,5]$

Ahora calculamos el conjunto $\{x\in D_g\ /\ g(x)=0\}$

a) Si x ∈ [-2,2] ⇒ $g(x)=x^2+1=0$ ⇒ ∄ x tal que g(x) = 0

b) Si x ∈ <2,5] ⇒ g(x) = x − 4 = 0 ⇒ x = 4 entonces: x ∈ <2,4> ∪ <4,5]



$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{4\}=[-2,0>\cup<0,2]\cup<2,4]-\{4\}=[-2,0>\cup<0,2]\cup<2,4>$

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x^2+1}, & si\ x\in[-2,0>\\ \frac{x+2}{x^2+1}, & si\ x\in<0,2]\\ \frac{x+2}{x-4}, & si\ x\in<2,4>\end{cases}$$

22.13. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.-

DEFINICIÓN.- Dadas dos funciones f y g, tales que: f: A ⟶ B ; g: B ⟶ C y que $R_f\cap D_g\neq\phi$, entonces la función compuesta g o f es aquella función definida por:

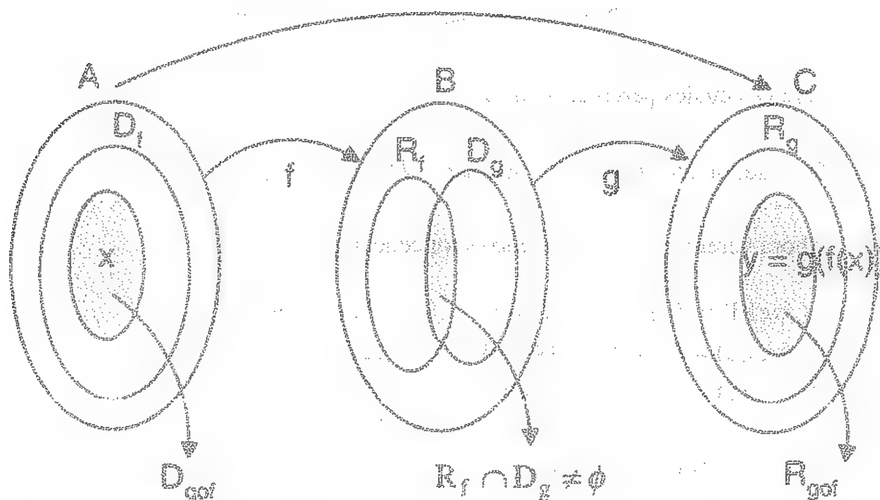
i) $D_{gof}=\{x\ /\ x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}$

ii) (gof)(x) = g(f(x)) es la regla de correspondencia.



OBSERVACIÓN.- Para que exista la composición de funciones g o f es necesario que: $R_f \cap D_g \neq \phi$.

ILUSTRACIÓN GRÁFICA



En esta representación gráfica se tiene:

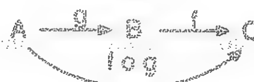
i)	$D_{gof} \subseteq D_f \subseteq A$
ii)	$R_{gof} \subseteq R_g \subseteq C$

Ejemplo.- Sean f = {(0,1),(1,2),(2,3),(4,3),(5,2)} y g= {(6,7),(5,4),(4,3),(2,4),(1,4),(0,7)}

Hallar D_{gof} , D_{gof} , así como f o g y g o f.

<u>**Desarrollo**</u>

i) Calculando D_{fog} :



$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ por definición:

$$\begin{array}{ccccccc} D_g = \{ & 0, & 1, & 2, & 4, & 5, & 6\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & g(0) & g(1) & g(2) & g(4) & g(5) & g(6) \\ & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ & 7 & 4 & 4 & 3 & 4 & 7 \end{array}$$

veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que el $4 \in D_f$ entonces $D_{fog} = \{1,2,5\}$

Ahora veremos su regla de correspondencia.

$$\begin{cases} (fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 3 \\ (fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 3 \\ (fog)(5) = f(g(5)) = f(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,3) \in fog \\ (2,3) \in fog \\ (5,3) \in fog \end{cases}$$

$\therefore$ f o g = {(1,3),(2,3),(5,3)}

ii) Calculando D_{gof} ;

$D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$ por definición.

$$\begin{array}{cccccc} D_f = \{ & 0, & 1, & 2, & 4, & 5\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & f(0) & f(1) & f(2) & f(4) & f(5) \\ & \| & \| & \| & \| & \| \\ & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

Veremos cuales de estos elementos pertenecen al D_g, entonces $1 \in D_g$, $2 \in D_g$ luego: $D_{gof} = \{0,1,5\}$

Ahora veremos su regla de correspondencia.

$$\begin{cases} (gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = 4 \\ (gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 4 \\ (gof)(5) = f(g(5)) = g(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,4) \in gof \\ (1,4) \in gof \\ (5,4) \in gof \end{cases}$$

$\therefore$ g o f = {(0,4),(1,4),(5,4)}

Ejemplo.- Sean f, g: R ⟶ R tal que: $f(x) = x^2 + 2x + 3$, g(x) = x − 5

Hallar $\left[\frac{(gof)(1) + (fog)(2).(fog)(3) - (gog)(2)}{(fog)(2)}\right]^{-2}$

Desarrollo

Calculando cada una de las operaciones

(gof)(1) = (g(f(1)) = g(6) = 1 ; (fog)(2) = (f(g(2)) = f(-3) = 6

(fog)(3) = f(g(3)) = f(-2) = 3 ; (gog)(2) = g(g(2) = g(-3) = -8

Ahora reemplazamos en la expresión dada:

$$\left[\frac{(gof)(1) + (fog)(2).(fog)(3) - (gog)(2)}{(fog)(2)}\right]^{-2} = \left[\frac{1 + (6)(3) - (-8)}{6}\right]^{-2} = \left(\frac{27}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{81}$$

Ejemplo.- Sea $g(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & si\ x \geq 1 \\ x - 1 & si\ x < 1 \end{cases}$ Hallar $\frac{(gog)(1) + 2g(-1)}{(gog)(-1) + g^2(1)}$

Desarrollo

Calculando cada operación se tiene: $\begin{cases} (gog)(1) = g(g(1)) = g(-2) = -3 \\ (gog)(-1) = g(g(-1)) = g(-2) = -3 \\ g(-1) = -2,\ g(1) = -2 \end{cases}$

Ahora reemplazamos en la expresión: $\frac{(gog)(1) + 2g(-1)}{(gog)(-1) + g^2(1)} = \frac{-3 + 2(-2)}{-3 + (-2)^2} = \frac{-3-4}{-3+4} = -7$

Ejemplo.- Si $f(x) = x^2$ encontrar dos funciones g para los cuales $(fog)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Desarrollo

$(fog)(x)=f(g(x))=4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

$g^2(x)=(2x-3)^2 \Rightarrow g(x)=\pm(2x-3)$

$\therefore\ g_1(x)=2x-3 \quad , \quad g_2(x)=-2x+3$

Ejemplo.- Dadas las funciones $f(x) = 3x - 2$ sí $x \in <0,+\infty>$; $g(x)=x^2$ sí $x \in <-3,5>$

a) Hallar fog (la función f composición g)

b) Hallar gof (la función g composición f)

Desarrollo

a) 1ro. calculamos el dominio de f o g: $D_{fog}=\{x\in D_g \,/\, x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g \wedge g(x)\in D_f$

$x\in<-3,5> \wedge x^2 \in<0,\infty>$ entonces $x \in <-3,5> \wedge <-\infty,0> \cup <0,\infty>$

$x \in <-3,0> \cup <0,5>$

2do. Calculando la regla de correspondencia de f o g

$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2)=3x^2-2$

Por lo tanto: $(fog)(x)=3x^2-2$ para $x \in <-3,0> \cup <0,5>$

b) 1ro. Calculamos el dominio de g o f: $D_{gof}=\{x\in D_f \,/\, x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}$

$x\in D_f \wedge f(x)\in D_g$

$x \in <0,\infty> \wedge 3x-2 \in <-3,5>$ entonces $x \in <0,\infty> \wedge -3 < 3x-2 < 5$

$x \in <0,\infty> \wedge -1 < 3x < 7$ entonces $x\in<0,\infty> \wedge -\frac{1}{3}<x<\frac{7}{3} \Rightarrow x\in<0,\frac{7}{3}>$

2do. Calculando la regla de correspondencia de g o f

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

Por lo tanto: $(gof)(x) = 9x^2 - 12x + 4$, para: $x \in <0, \frac{7}{3}>$

Ejemplo.- Hallar fog si f(x) = 3x + 2, x ∈ <-∞,3>, $g(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 0 \\ -3x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Desarrollo

$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x & si \quad x < 0 \\ g_2(x) = -3x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$, donde $D_g = D_{g_1} \cup D_{g_2}$ dominio de la función g

Ahora calculamos el dominio de f o g

$D_{fog} = \{x \in D_g \ / \ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g \ / \ x \in D_{g_1} \cup D_{g_2} \wedge g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_f\} \cup \{x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_f\} = D_{fog_1} \cup D_{fog_2}$

Luego: $(fog)(x) = \begin{cases} (fog_1)(x) & si\ x \in D_{fog_1} \\ (fog_2)(x) & si\ x \in D_{fog_2} \end{cases}$

Ahora calculando D_{fog_1} y D_{fog_2}

$D_{fog_1} = \{x \in D_{g_1} \ / \ x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_f\}$

x ∈ <-∞,0> ∧ 2x ∈ <-∞,3>

x ∈ <-∞,0> ∧ x ∈ <-∞,3/2> entonces x ∈ <-∞,0> por lo tanto $D_{fog_1} = <-\infty, 0>$

$D_{fog_2} = \{x \in D_{g_2} \ / \ x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_f\}$

x ∈ [1,∞> ∧ -3x ∈ <-∞,3> entonces x ∈ [1,∞> ∧ x ∈ <-1,∞> entonces x ∈ [1,∞>

$D_{fog_2} = [1, \infty>$

$(fog_1)(x) = f(g_1(x)) = f(2x) = 3(2x) + 2 = 6x + 2$

$(fog_2)(x) = f(g_2(x)) = f(-3x) = 3(-3x)+2 = -9x+2$

$$\therefore \quad (fog)(x) = \begin{cases} 6x+2 & si \quad x \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ -9x+2 & si \quad x \in [1, \infty \rangle \end{cases}$$

Ejemplo.- Hallar (f o g)(x) sí: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ -x^3 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x & si \quad x < 2 \\ 2x & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

Desarrollo

Veremos el caso cuando las funciones tienen dos reglas de correspondencia.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \in D_{f_1} \\ f_2(x) & si \quad x \in D_{f_2} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & si \quad x \in D_{g_1} \\ g_2(x) & si \quad x \in D_{g_2} \end{cases}$$

el dominio de f o g se obtiene siguiendo el mismo criterio del ejemplo anterior, es decir:

i) $D_{f_1og_1} = \{x \in D_{g_1} \mathbin{/} x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_{f_1}\}$

x ∈<-∞,2> Λ -x ∈ <-∞,1> entonces x ∈<-∞,2> Λ x ∈ <-1,∞> de donde x ∈<-1,2>

ii) $D_{f_1og_2} = \{x \in D_{g_2} \mathbin{/} x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_{f_1}\}$

x ∈ [4,∞> Λ 2x ∈ <-∞,1> entonces x ∈ [4-∞> Λ x ∈ <-∞,1/2> ⇒ x ∈ ϕ

iii) $D_{f_2og_1} = \{x \in D_{g_1} \mathbin{/} x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_{f_2}\}$

x ∈<-∞,2> Λ -x ∈ [2,∞> entonces x ∈<-∞,2> Λ ∈ <-∞,-2] de donde x ∈<-∞,-2]

iv) $D_{f_2og_2} = \{x \in D_{g_2} \mathbin{/} x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_{f_2}\}$

x ∈[4,∞> Λ 2x ∈ [2,∞> entonces x ∈[4,∞> Λ x ∈ [1,∞> de donde x ∈[4,∞>

Luego de i) , iii) , iv), la regla de correspondencia es:

$(f_1og_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(-x) = x^2$

$(f_2og_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(-x) = x^3$

$(f_2 o g_2)(x) = f_2(g_2(x)) = f_2(2x) = -8x^3$, luego

$$(fog)(x) = \begin{cases} (f_1 o g_1)(x) & , si \quad x \in \langle -1,2 \rangle \\ (f_2 o g_1)(x) & , si \quad x \in \langle -\infty,-2] \\ (f_2 o g_2)(x) & , si \quad x \in [4,\infty \rangle \end{cases} \therefore \; (fog)(x) = \begin{cases} x^2 & , si \quad x \in \langle -\infty,-2] \\ x^3 & , si \quad x \in \langle -1,2 \rangle \\ -8x^3 & , si \quad x \in [4,\infty \rangle \end{cases}$$

22.14. PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.-

Consideremos las funciones f, g, h, I (identidad)

① f o g ≠ g o f no es conmutativa

② (fog) o h = fo(goh) asociativa

③ (f + g) o h = (foh) + (goh) distributiva

④ (fg) o h = (f o h).(g o h)

⑤ f o I = f , I o f = f , ∀ f

⑥ $I^n o I^m = I^{nm}, n, m \in Z^+$

⑦ $I^{1/n} o I^n = I^n \; o \; I^{1/n} = I$, $n \in z^+$, n impar

⑧ $I^n = \underbrace{I.I.I...I}_{n-veces}$

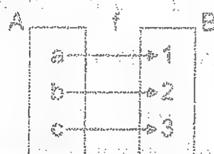
22.15. FUNCIONES: INYECTIVAS, SURYECTIVAS Y BIYECTIVAS.-

a) FUNCIÓN INYECTIVA.-

La función f: A → B es inyectiva (univalente) si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento en el dominio, es decir: si existen dos elementos $x_1, x_2 \in D_f$ distintos $x_1 \neq x_2$ entonces sus imágenes son distintas $f(x_1) \neq f(x_2)$ lo que es equivalente a decir:

Si $x_1, x_2 \in D_f$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ que es la forma más práctica para determinar si una función es inyectiva.

Ejemplo.-



f función inyectiva



f no es función inyectiva

OBSERVACIÓN.- Si la función f(x) tiene varias reglas de correspondencia es decir:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in D_{f_1} \\ f_2(x), & x\in D_{f_2} \\ \vdots & \\ f_n(x), & x\in D_{f_n} \end{cases}$$

diremos que es inyectiva sí y sólo sí cada función f_1, f_2, ..., f_n deben ser inyectivas y además $R_{f_i}\cap R_{f_j}=\phi \quad \forall\ i\neq j$

Ejemplo.- Determinar que la función f(x) = 5x + 3 es inyectiva.

Desarrollo

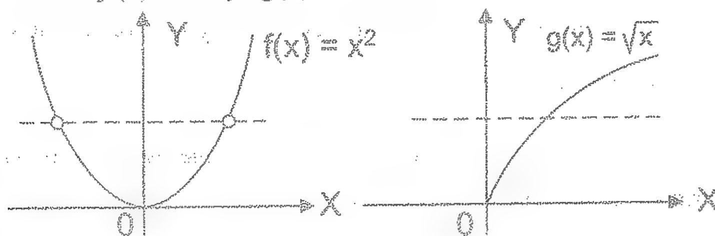
f es inyectiva sí $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 5x_1+3=5x_2+3 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$\therefore f(x)=5x+3 \text{ es inyectiva}$$

OBSERVACIÓN.- En forma gráfica se puede determinar si una función es inyectiva o no, para esto tracemos una recta paralela al eje X, si dicha recta corta a la gráfica en dos partes o más, entonces la función f no es inyectiva y si corta en un solo punto, entonces la función f es inyectiva.

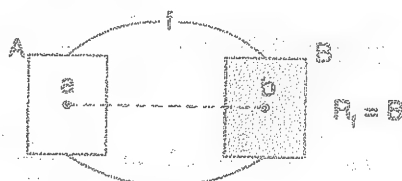
Ejemplo.- Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$



f no es función inyectiva — g es función inyectiva

b) **FUNCIÓN SURYECTIVA (SOBREYECTIVA).-**

La función f: A → B, es suryectiva (o sobre) si y sólo sí, ∀ y ∈ B, existe x ∈ A tal que y = f(x); esto quiere decir que todo elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A es decir que f: A → B es suryectiva si $R_f=B$



Ejemplo.- La función f: [0,∞> → [0,∞> tal que $f(x)=\sqrt{x}$ es suryectiva puesto que $R_f = [0,\infty>$

Ejemplo.- Determinar si la función f(x) = 3x + 5 es suryectiva.

Desarrollo

Como f: R → R / f(x) = 3x + 5

y = 3x + 5 despejamos x es decir $x=\frac{y-5}{3}$ Luego ∀ y ∈ R, $\exists x=\frac{y-5}{3}$

Tal que $f(x)=f(\frac{y-5}{5})=3(\frac{y-5}{5})+5=y$ entonces f es suryectiva.

e) **FUNCIÓN BIYECTIVA.-**

La función f: A → B se llama función biyectiva, si la función f es inyectiva y suryectiva simultáneamente.

Ejemplo.- Determinar si la función f: [0,2> → <-∞,0] tal que $f(x)=\frac{x}{x-2}$ es biyectiva.

Desarrollo

i) Veremos si f es inyectiva, es decir: $f(x)=f(x_1) \Rightarrow x=x_1$

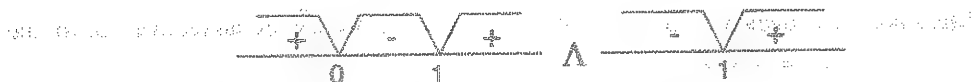
$\frac{x}{x-2}=\frac{x_1}{x_1-2} \Rightarrow x\,x_1-2x=x_1x-2x_1$

$-2x_1=-2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ por lo tanto f es inyectiva.

ii) Ahora veremos si f es suryectiva, para esto es suficiente ver si el rango de f coincide con el conjunto de llegada.

$$y=\frac{x}{x-2} \Rightarrow x=\frac{2y}{y-1}\in[0,2> \Rightarrow 0\le\frac{2y}{y-1}<2$$

$$0\le\frac{2y}{y-1}<2 \Leftrightarrow 0\le\frac{2y}{y-1}\wedge\frac{2y}{y-1}<2 \Leftrightarrow 0\le\frac{y}{y-1}\wedge\frac{1}{y-1}<0$$



y ∈ <-∞,0], luego R_f =< −∞,0] entonces f es suryectiva.

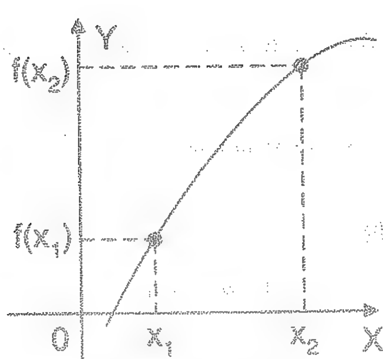
Como f es inyectiva y suryectiva entonces f es biyectiva.

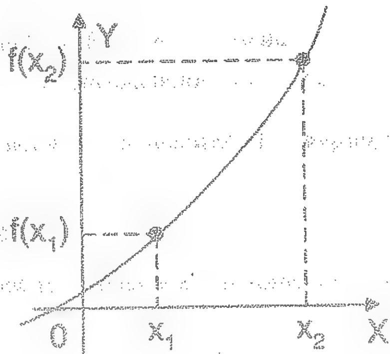
22.16. FUNCIONES CRECIENTES, DECRECIENTES Y MONÓTONAS.-

a) **FUNCIÓN CRECIENTE.-**

La función f se llama creciente si para todo $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

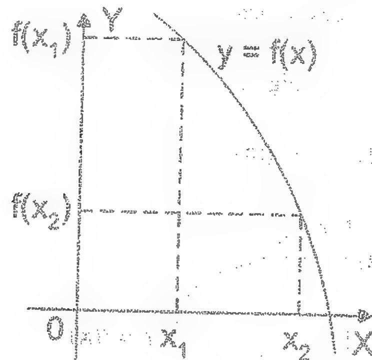


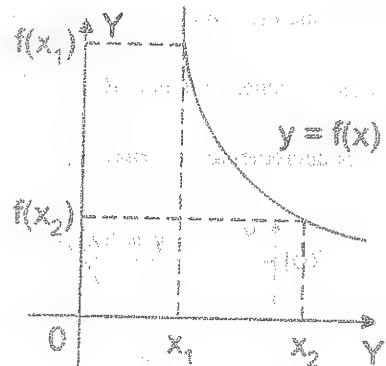


b) **FUNCIÓN DECRECIENTE.-**

La función f se llama decreciente si para todo par $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$





c) **FUNCIÓN MONÓTONA.-**

La función f se llama monótona si la función f es creciente ó decreciente

d) **TEOREMA.-** Si una función f es creciente, entonces f es inyectiva (univalente).

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in D_f$, tales que $x_1 \neq x_2$ de donde se tiene $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$

Si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ por ser f creciente

Si $x_2 < x_1$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$ por ser f creciente

Por lo tanto en ambos casos se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$ es decir, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Luego la función f es inyectiva.

e) **Teorema.-** Si una función f es decreciente, entonces f es inyectiva (univalente).

Demostración

La demostración se hace en forma similar al teorema anterior.

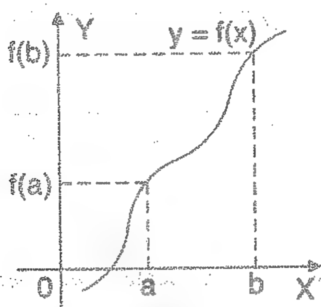
22.17. CÁLCULO DE RANGOS DE FUNCIONES INYECTIVAS MONÓTONAS.-

Cuando las funciones dadas son inyectivas su rango se encuentra en forma muy práctica de la siguiente manera:

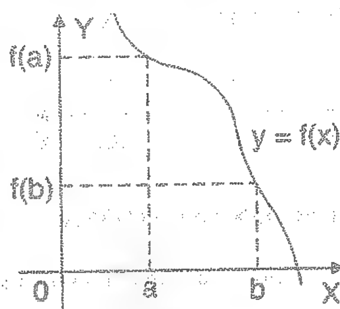
Sea la función inyectiva cuyo $D_f = [a,b]$ entonces se tiene:

Si f es creciente se tiene: $R_f = [f(a), f(b)]$; Fig (a)

Si f es decreciente se tiene: $R_f = [f(b), f(a)]$; Fig(b)



Fig(a)

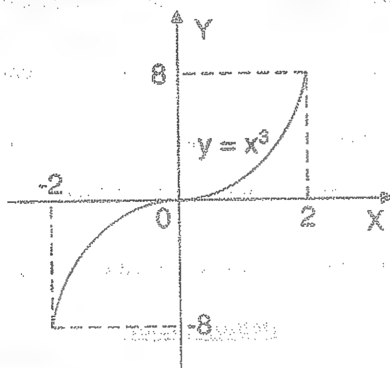


Fig(b)

Ejemplo.- Calcular el rango de $f(x) = x^3$ para x ∈ [-2,2].

Desarrollo

f es inyectiva y creciente entonces $R_f = [f(-2), f(2)] \Rightarrow R_f = [-8,8]$



22.18. FUNCIÓN INVERSA.-

a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos la función: $f = \{(x, f(x)) / x \in D_f\}$ con dominio D_f y rango R_f entonces diremos que existe la función inversa de f, si y solo si, f es inyectiva.

A la función inversa de f denotaremos por f^* ó f^{-1}, la cuál es definida en la forma siguiente:

$$f^* = \{(f(x), x) / x \in D_f\}$$

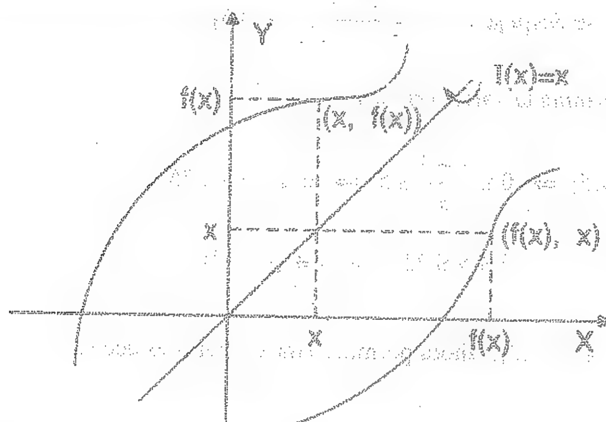
donde: $D_{f^*} = R_f$ y $R_{f^*} = D_f$

Ejemplo.- Consideremos una función inyectiva f = {(1,3),(2,5),(4,7),(6,9),(8,11)} entonces la función inversa de f es: $f^* = \{(3,1), (5,2), (7,4), (9,6), (11,8)\}$

donde $D_{f^*} = \{3,5,7,9,11\} = R_f$ y $R_{f^*} = \{1,2,4,6,8\} = D_f$

b) GRÁFICO DE LA FUNCIÓN INVERSA.-

Consideremos una función f y su inversa f^*, el gráfico de la función inversa f^* es simétrica a la función f con respecto a la función identidad I(x) = x por tal motivo dicho gráfico se obtiene por reflexión con respecto a la recta I(x) = x.



c) PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES INVERSAS.-

Sí f: A→B es una función inyectiva y f^*: B→A es la función inversa de f entonces:

$$f^*(f(x)) = x \quad , \quad \forall x \in D_f$$

$$f(f^*(x)) = x \quad , \quad \forall x \in D_{f^*}$$

d) CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA.-

Sea f: A→B una función inyectiva, entonces a la función inversa $f^*: B \to A$ se puede hallar resolviendo la ecuación $f(f^*(x)) = x$

Ejemplo.- Hallar la inversa de la función f(x) = 7x + 3

Desarrollo

$f(f^*(x)) = x \Rightarrow 7f^*(x)+3 = x \qquad \therefore f^*(x) = \dfrac{x-3}{7}$

También la inversa de una función inyectiva se puede obtener en la forma siguiente:

Ejemplo.- Hallar la inversa de la función f(x) = 5x-3 si x ∈ [0,5]

Desarrollo

Como y = f(x) ⇒ y = 5x - 3, x ∈ [0,5]

Primeramente se despeja x: $x = \dfrac{y+3}{5}$, x ∈ [0,5]

Luego se determina la variación de y

$$x = \frac{y+3}{5} \in [0,5] \Rightarrow 0 \le \frac{y+3}{5} \le 5 \Rightarrow 0 \le y+3 \le 25$$

$$-3 \le y \le 22 \Rightarrow y \in [-3, 22]$$

$x = \dfrac{y+3}{5}$, y ∈ [-3, 22]. ahora permutaremos x por y es decir:

$y = \dfrac{x+3}{5}$, x ∈ [-3, 22]. Por lo tanto $f^*(x) = \dfrac{x+3}{5}$, x ∈ [-3, 22]

22.19. FUNCIÓN INVERSA DE UNA COMPOSICIÓN.-

Si dos funciones f y g son inyectivas y la función composición f o g existen entonces la función f o g es inyectiva por lo tanto tiene inversa (f o g)* en este caso tiene la siguiente propiedad. (f o g)* = g* o f*

Ejemplos.-

① Dada las funciones f = {(2,1),(-2,3),(1,5),(-3,4),(7,8)}; g = {(3,-2),(7,2),(-3,1),(2,4)}

Calcular f + g, f – g, f.g , $\frac{f}{g}$

Desarrollo

Calculando el dominio de cada función: $D_f = \{-3,-2,1,2,7\}$; $D_g = \{-3,2,3,7\}$

Como $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{-3,2,7\}$

$$\begin{cases} (f+g)(-3) = f(-3)+g(-3) = 4+1 = 5 \\ (f+g)(2) = f(2)+g(2) = 1+4 = 5 \\ (f+g)(7) = f(7)+g(7) = 8+2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,5) \in f+g \\ (2,5) \in f+g \\ (7,10) \in f+g \end{cases}$$

∴ f + g = {(-3,5),(2,5),(7,10)}

$$\begin{cases} (f-g)(-3) = f(-3)-g(-3) = 4-1 = 3 \\ (f-g)(2) = f(2)-g(2) = 1-4 = -3 \\ (f-g)(7) = f(7)-g(7) = 8-2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,3) \in f-g \\ (2,-3) \in f-g \\ (7,6) \in f-g \end{cases}$$

∴ f – g = {(-3,3),(2,-3),(7,6)}

$$\begin{cases} (f.g)(-3) = f(-3).g(-3) = 4(1) = 4 \\ (f.g)(2) = f(2).g(2) = 1(4) = 4 \\ (f.g)(7) = f(7).g(7) = 8(2) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,4) \in f.g \\ (2,4) \in f.g \\ (7,16) \in f.g \end{cases}$$

∴ f . g = {(-3,4),(2,4),(7,16)}

Calculando el dominio de $\frac{f}{g}$: $D_{f/g} = D_f \wedge D_g - \{x / g(x) = 0\} = \{-3,2,7\}$

$$\begin{cases} (\frac{f}{g})(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = \frac{4}{1} = 4 \\ (\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1}{4} \\ (\frac{f}{g})(7) = \frac{f(7)}{g(7)} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,4) \in \frac{f}{g} \\ (2,\frac{1}{4}) \in \frac{f}{g} \\ (7,4) \in \frac{f}{g} \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{f}{g}=\{(-3,4),(2,\frac{1}{4}),(7,4)\}$$

(2) Sean $f=\{(1,3),(3,5),(2,4),(4,6)\}$; $g=\{(4,1),(0,-3),(3,2),(1,0)\}$. Hallar $\frac{f}{g}$

Desarrollo

Calculando el dominio de cada función: $D_f=\{1,2,3,4\}$, $D_g=\{0,1,3,4\}$

Calculando el dominio de $\frac{f}{g}$: $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x/\,g(x)=0\}=\{1,3,4\}-\{1\}=\{3,4\}$

$$\begin{cases}(\frac{f}{g})(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{5}{2}\\ (\frac{f}{g})(4)=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{1}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3,\frac{5}{2})\in\frac{f}{g}\\ (4,6)\in\frac{f}{g}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{f}{g}=\{(3,\frac{5}{2}),(4,6)\}$$

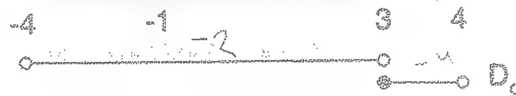
(3) Sí $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1\\ x-3, & -1\le x<4\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-2x, & -4<x<3\\ -4, & x\ge 3\end{cases}$. Calculando f + g

Desarrollo

Calculando el dominio de cada función:

$D_f=<-\infty,-1>\cup[-1,4>$; $D_g=<-4,3>\cup[3,\infty>$

Ahora interceptamos los dominios



$D_{f+g}=D_f\cap D_g=<-4,-1>\cup[-1,3>\cup[3,4>$

Si $x\in<-4,-1>$, $f(x)+g(x)=x+4-2x=-x+4$

$x\in[-1,3>$, $f(x)+g(x)=x-3-2x=-x-3$

$x\in[3,4>$, $f(x)+g(x)=x-3-4=x-7$

de donde $(f+g)(x)=\begin{cases}-x+4 & si\ x\in<-4,-1>\\ -x-3 & si\ x\in[-1,3>\\ x-7 & si\ x\in[3,4>\end{cases}$

④ Hallar (f + g)(x) si f y g están definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|\ , & si\ |x-1|\le 1\\ 3x\ , & si\ |x-1|>1\end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases}[\![x]\!]\ , & si\ -3\le x<1\\ -2\ , & si\ 1\le x\le 2\\ 1-2x\ , & si\ x<2\end{cases}$$

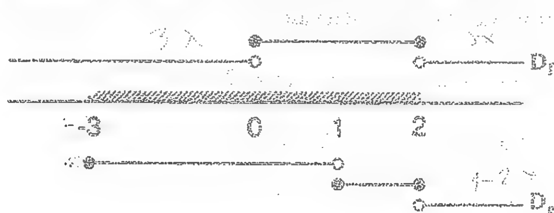
Desarrollo

$|x-1|\le 1 \Rightarrow -1\le x-1\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 2$

$|x-1|>1 \Rightarrow x-1>1 \lor x-1<-1 \Rightarrow x>2 \lor x<0$

Ahora a la función f(x) expresamos así: $f(x)=\begin{cases}|x-1| & si\ 0\le x\le 2\\ 3x & si\ x\in\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 2,+\infty\rangle\end{cases}$

Dibujando los dominios de cada función en una recta horizontal.



$D_{f+g}=D_f\wedge D_g=[-3,0\rangle\cup[0,1\rangle\cup[1,2]\cup\langle 2,\infty\rangle$

Calculando la suma en cada intervalo

$x\in[-3,0\rangle \Rightarrow f(x)+g(x)=3x+[\![x]\!]$

$x\in[0,1\rangle \Rightarrow f(x)+g(x)=|x-1|+[\![x]\!]$

$x\in[1,2] \Rightarrow f(x)+g(x)=|x-1|-2$

$x\in\langle 2,\infty\rangle \Rightarrow f(x)+g(x)=3x+1-2x=x+1$

NOTA.- Se efectúa la operación en sus propias reglas de correspondencia

$$(f+g)(x)=\begin{cases}3x+[\![x]\!] & ,\ si\ x\in[-3,0\rangle\\ |x-1|+[\![x]\!], & si\ x\in[0,1\rangle\\ |x-1|-2 & ,\ si\ x\in[1,2]\\ x+1 & ,\ si\ x\in\langle 2,+\infty\rangle\end{cases}=\begin{cases}3x+[\![x]\!] & ,\ x\in[-3,0\rangle\\ 1-x & ,\ x\in[0,1\rangle\\ x-3 & ,\ x\in[1,2]\\ x+1 & ,\ x\in\langle 2,+\infty\rangle\end{cases}$$

(5) Sí $f(x)=|x-2|+|x+2|$, $g(x)=\begin{cases}3x+2, & si\ x<0\\ 1-x, & si\ x\geq 0\end{cases}$ y $H(x)=f(x)+g(x)$, $D_H=[-2,3>$.

Hallar la gráfica y el rango de H.

Desarrollo

Primeramente definiremos los valores absolutos.

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & , si\ \ x\geq 2\\ 2-x & , si\ \ x<2\end{cases} \quad ; \quad |x+2|=\begin{cases}x+2 & , si\ \ x\geq -2\\ -x-2 & , si\ \ x<-2\end{cases}$$



Ahora definiremos f(x) en cada intervalo

Si $x<-2$, $f(x)=(2-x)+(-x-2)=-2x$

$-2\leq x<2$, $f(x)=2-x+x+2=4$

$x\geq 2$, $f(x)=x-2+x+2=2x$

por lo tanto $f(x)=\begin{cases}-2x & , si\ \ x<-2\\ 4 & , si\ \ -2\leq x<2\\ 2x & , si\ \ x\geq 2\end{cases}$

Ahora calculemos los dominios de cada función



$D_H=[-2,3>=[-2,0>\cup[0,2>\cup[2,3>$

Definiremos a la función H(x) en cada intervalo

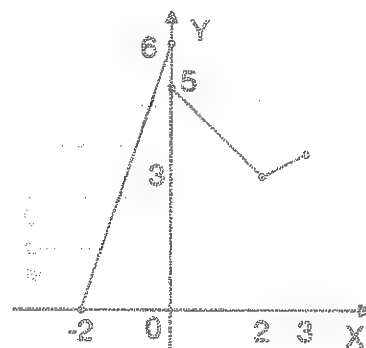
$x\in[-2,0> \Rightarrow H(x)=4+3x+2=3x+6$

$x \in [0,2\rangle \Rightarrow H(x) = 4 + 1 - x = 5 - x$

$x \in [2,3\rangle \Rightarrow H(x) = 2x + 1 - x = x + 1$

Por lo tanto la función H(x) queda definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 3x+6 & si \; -2 \le x < 0 \\ 5-x & si \; 0 \le x < 2 \\ x+1 & si \; 2 \le x < 3 \end{cases}$$



Graficando la función H(x) se tiene: $R_H = [0,6\rangle$

⑥ Si se tiene que $f(x+2) = x^2$ sí $x \in \langle -5,5]$ y $g(x-1) = x^2$ sí $x \in [-2,2]$. Calcular f(x) y g(x)

Desarrollo

Calculando f(x), para esto $x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2$

Como $x \in \langle -5,5] \Rightarrow y-2 \in \langle -5,5]$ de donde $-5 < y-2 \le 5 \Rightarrow -3 < y \le 7 \Rightarrow y \in \langle -3,7]$

Luego $f(x+2) = x^2 \Rightarrow f(y) = (y-2)^2$, $y \in \langle -3,7]$

Ahora evaluamos en x: $f(x) = (x-2)^2$, $x \in \langle -3,7]$

Calculando g(x), para esto $x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$

Como $x \in [-2,2] \Rightarrow y + 1 \in [-2,2] \Rightarrow -2 \le y+1 \le 2 \Rightarrow -3 \le y \le 1 \Rightarrow y \in [-3,1]$

Luego $g(x-1) = x^2 \Rightarrow g(y) = (y+1)^2$, $y \in [-3,1]$

Ahora veremos en x: $g(x) = (x+1)^2$, $x \in [-3,1]$

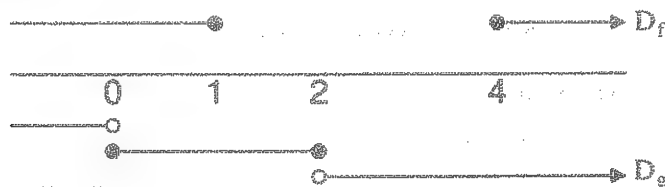
⑦ Calcular (f+g)(x) y (f/g)(x), donde $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & si \; x \le 1 \\ \sqrt{x} & , si \; x \ge 4 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & si \; x < 0 \\ x & , si \; 0 \le x \le 2 \\ x+5 & , si \; x > 2 \end{cases}$

Desarrollo

Calculando el dominio de cada función

$D_f = <-\infty,1] \cup [4,+\infty>$, $D_g = <-\infty,0> \cup [0,2] \cup <2,+\infty>$

Ahora calculamos D_{f+g}



$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-\infty,0> \cup [0,1] \cup [4,+\infty>$

Calculando f(x) + g(x) en cada intervalo

Sí $x \in <-\infty,0>$, $f(x)+g(x) = \sqrt{1-x}+x^2-1$

$x \in [0,1]$, $f(x)+g(x) = \sqrt{1-x}+x$

$x \in [4,+\infty>$, $f(x)+g(x) = \sqrt{x}+x+5$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}+x^2-1 , & si \ x<0 \\ \sqrt{1-x}+x , & si \ 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x}+x+5 , & si \ x \ge 4 \end{cases}$$

Ahora calculamos $D_{f/g}$ es decir:

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\} = <-\infty,0> \cup [0,1] \cup [4,+\infty> - \{0,-1\}$

$= <-\infty,-1> \cup <-1,0> \cup <0,1] \cup [4,+\infty>$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} , & si \ x \in <-\infty,-1> \cup <-1,0> \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x} , & si \ x \in <0,1] \\ \frac{\sqrt{x}}{x+5} , & si \ x \ge 4 \end{cases}$$

(8) Calcular $(f+g)(x)$ y $(\frac{f}{g})(x)$ donde

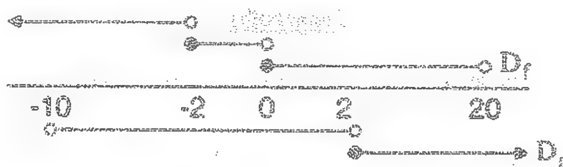
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , si \ x<-2 \\ \sqrt{1-x} & , si \ -2\le x<0 \\ x & , si \ 0\le x<20 \end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x^2-1 & , si \ -10<x<2 \\ \sqrt{x} & , si \ x\ge 2 \end{cases}$$

Desarrollo

Calculando el dominio de cada función

$D_f = <-\infty,-2> \cup [-2,0> \cup [0,20>$, $\quad D_g = <-10,2> \cup [2,+\infty>$

Ahora calculamos el D_{f+g}



$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-10,-2> \cup [-2,0> \cup [0,2> \cup [2,20>$

Calculando f(x) + g(x) en cada intervalo.

$x \in <-10,-2>$, $\quad f(x)+g(x)=x^2-1+x^2-1=2x^2-2$

$x \in [-2,0>$, $\quad f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+x^2-1$

$x \in [0,2>$, $\quad f(x)+g(x)=x+x^2-1$

$x \in [2,20>$, $\quad f(x)+g(x)=x+\sqrt{x}$

Luego se tiene: $\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} 2x^2-2 & si \ -10\le x<-2 \\ \sqrt{1-x}+x^2-1 & si \ -2\le x<0 \\ x^2+x-1 & si \ 0\le x<2 \\ x+\sqrt{x} & si \ 2\le x<20 \end{cases}$

Calculando $(\frac{f}{g})(x)$

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2-1} & si\ -10<x<-2\\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & si\ -2\le x<0-\{-1\}\\ \frac{x}{x^2-1} & si\ 0\le x<2-\{1\}\\ \frac{x}{\sqrt{x}} & si\ 2\le x<20\end{cases}\quad \text{ósea}\quad (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}1 & si\ -10<x<-2\\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & si\ x\in[-2,-1>\cup<-1,0>\\ \frac{x}{x^2-1} & si\ x\in[0,1>\cup<1,2>\\ \frac{x}{\sqrt{x}} & si\ x\in[2,20>\end{cases}$$


Dadas las funciones definidas por:

f = {(0,0),(4,3),(2,4),(-3,2),(3,-1)} y g = {(6,2),(3,4),(2,0),(4,7)}. Calcular f o g

Desarrollo

Calculando D_{fog} es decir: $D_{fog}=\{x / x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$$\begin{array}{ccccc} D_g=\{ & 2, & 3, & 4, & 6\ \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & g(2) & g(3) & g(4) & g(6) \\ & \| & \| & \| & \| \\ & 0 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

Veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que: $0\in D_f$, $4\in D_f$, $2\in D_f$ entonces $D_{fog}=\{2,3,6\}$

Ahora calculamos los elementos de f o g

$$\begin{cases}(fog)(2)=f(g(2))=f(0)=0\\ (fog)(3)=f(g(3))=f(4)=3\\ (fog)(6)=f(g(6))=f(2)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2,0)\in D_{fog}\\ (3,3)\in D_{fog}\\ (6,4)\in D_{fog}\end{cases}$$

$\therefore$ f o g = {(2,0),(3,3),(6,4)}

(10) Sean las funciones reales de variable real $f(x)=\begin{cases}x+2\ , & x\le 1\\ x-1\ , & x>1\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}x^2\ , & x<0\\ 1-x\ , & x\ge 0\end{cases}$

Hallar f o g

Desarrollo

De acuerdo a los criterios establecidos se tiene:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x)=x+2\ , & x\le 1\\ f_2(x)=x-1\ , & x>1\end{cases}\ ,\quad g(x)=\begin{cases}g_1(x)=x^2\ , & x<0\\ g_2(x)=1-x\ , & x\ge 0\end{cases}$$

Calculando $D_{f_1og_1}=\{x\in D_{g_1}\ \wedge\ g_1(x)\in D_{f_1}\}$

$x\in <-\infty,0>\ \wedge\ x^2\le 1$ desarrollando $x\in <-\infty,0>\ \wedge\ -1\le x\le 1\ \Rightarrow\ x\in [-1,0>$

$(f_1og_1)(x)=f_1(g_1(x))=f_1(x^2)=x^2+2\ ,\ x\in [-1,0>$ ... (I)

Calculando $D_{f_1og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\ \wedge\ g_2(x)\in D_{f_1}\}$

$x\in [0,+\infty>\ \wedge\ 1-x\in <-\infty,1]$ entonces $x\in [0,+\infty>\ \wedge\ 0\le x<\infty\ \Rightarrow\ x\in [0,+\infty>$

$(f_1og_2)(x)=f_1(g_2(x))=f_1(1-x)=1-x+2=3-x$ ... (II)

Calculando $D_{f_2og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\ \wedge\ g_1(x)\in D_{f_2}\}$

$x\in <-\infty,0>\ \wedge\ x^2\in <1,+\infty>$

$x\in <-\infty,0>\ \wedge\ x\in <-\infty,-1>\cup <1,+\infty>=<-\infty,-1>\ \Rightarrow\ x\in <-\infty,-1>$

$(f_2og_1)(x)=f_2(g_1(x))=f_2(x^2)=x^2-1$ ... (III)

Calculando $D_{f_2og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\ \wedge\ g_2(x)\in D_{f_2}\}$

$x\in [0,+\infty>\ \wedge\ 1-x\in <1,+\infty>$ entonces $x\in [0,+\infty>\ \wedge\ x\in <-\infty,0>\ \Rightarrow\ \phi$ ... (IV)

de (I), (II), (III) y (IV)

$$(fog)(x)=\begin{cases}x^2-1 & si\ \ x<-1\\ x^2+2 & si\ \ x\in [-1,0>\\ 3-x & si\ \ x\in [0,+\infty>\end{cases}$$

(11) Dadas las funciones: $f(x)=\begin{cases} x, & x\in<-\infty,1] \\ -1, & x\in<1,+\infty> \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x^2-8\ , & x<0 \\ [\![x]\!] \ , & x\geq 0 \end{cases}$

Calcular (f o g)(x)

Desarrollo

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=x, & x\in<-\infty,1] \\ f_2(x)=-1, & x\in<1,+\infty> \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} g_1(x)=x^2-8 & si\ \ x<0 \\ g_2(x)=[\![x]\!] & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

$D_{fog}=D_{f_1og_1}\cup D_{f_1og_2}\cup D_{f_2og_1}\cup D_{f_2og_2}$

$D_{f_1og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\wedge g_1(x)\in D_{f_1}\}$

$x<0\ \wedge\ x^2-8\in<-\infty,1]\ \Rightarrow\ x<0\wedge -\infty<x^2\leq 9$

$\Rightarrow\ x<0\wedge(-\infty<x^2\ \wedge\ x^2\leq 9)\ \Rightarrow\ x<0\ \wedge\ (\mathbb{R}\ \wedge -3\leq x\leq 3)$

$\Rightarrow\ x<0\ \wedge\ -3\leq x\leq 3\ \Rightarrow\ x\in[-3,0>$

$(f_1og_1)=f_1(g_1(x))=f_1(x^2-8)=x^2-8$

$$(f_1og_1)(x)=x^2-8,\quad x\in[-3,0>$$

$D_{f_1og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\wedge\ g_2(x)\in D_{f_1}\}$

$x\geq 0\ \wedge\ [\![x]\!]\in<-\infty,1]\quad\Rightarrow\quad x\geq 0\ \wedge\ -\infty<[\![x]\!]\leq 1$

$\Rightarrow\quad x\geq 0\ \wedge\ -\infty<x<2\ \Rightarrow\ x\in[0,2>$

$(f_1og_2)(x)=f_1(g_2(x))=f_1([\![x]\!])=[\![x]\!]$

$$(f_1og_2)(x)=[\![x]\!],\ x\in[0,2>$$

$D_{f_2og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\wedge\ g(x)\in D_{f_2}\}$

$x<0\ \wedge\ x^2-8\in<1,+\infty>\quad\Rightarrow\quad x<0\ \wedge\ 9<x^2<\infty$

$x<0\ \wedge\ (9<x^2\ \wedge\ x^2<+\infty)\ \Rightarrow\ x<0\ \wedge(x<-3\vee x>3)\Rightarrow x\in<-\infty,-3>$

$(f_2 o g_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(x^2 - 8) = -1$

$$(f_2 o g_1)(x) = -1, \; x \in \langle -\infty, -3 \rangle \qquad \text{... (III)}$$

$D_{f_2 o g_2} = \{x / x \in D_{g_2} \wedge \; g_2(x) \in D_{f_2}\}$

$$x \geq 0 \;\wedge\; [\![x]\!] \in \langle 1, +\infty \rangle \;\Rightarrow\; x \geq 0 \;\wedge\; 1 < [\![x]\!] < +\infty$$

$$\Rightarrow\; x \geq 0 \;\wedge\; 2 \leq x < \infty \;\Rightarrow\; x \in [2, +\infty\rangle$$

$(f_2 o g_2) = f_2(g_2(x)) = f_2([\![x]\!]) = -1, \; x \in [2, +\infty\rangle$

$$(f_2 o g_2)(x) = -1, \; x \in [2, +\infty\rangle \qquad \text{... (IV)}$$

$$(f o g)(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & si \;\; x \in [-3, 0\rangle \\ [\![x]\!] & si \;\; x \in [0, 2\rangle \\ -1 & si \;\; x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup [2, +\infty\rangle \end{cases}$$

(12) Si $f(x) = x^2$ y $(f o g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$ encontrar dos funciones g(x).

Desarrollo

$(f o g)(x) = f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9$

$g^2(x) = (2x-3)^2 \;\Rightarrow\; g(x) = \pm(2x-3) \qquad \therefore \; g_1(x) = 2x - 3, \; g_2(x) = -2x + 3$

(13) Si $f(x-1) = x - 2$ y $(g o f)(x+2) = 2x^2 - x$. Calcular g(x).

Desarrollo

$f(x-1) = x - 2 \;\Rightarrow\; f(x) = x - 1$

$(g o f)(x+2) = 2x^2 - x \;\Rightarrow\; (g o f)(x) = 2(x-2)^2 - (x-2) = 2x^2 - 9x + 10$

$(g o f)(x) = 2x^2 - 9x + 10$ de donde $g(f(x)) = 2x^2 - 9x + 10$

$g(x-1) = 2x^2 - 9x + 10 \;\Rightarrow\; g(x) = 2(x+1)^2 - 9(x+1) + 10 = 2x^2 - 5x + 3$

(14) Si $f(x)=x^2+2$ y $g(x)=x+a$, determinar el valor de a de modo que (f o g)(3) = (g o f)(a – 1).

Desarrollo

$(fog)(3)=f(g(3))=f(3+a)=(3+a)^2+2=a^2+6a+11$ ... (1)

$(gof)(a-1)=g(f(a-1))=g((a-1)^2+2)$

$=g(a^2-2a+3)=a^2-2a+3+a=a^2-a+3$ ... (2)

Igualando (1) y (2) se tiene: $a^2+6a+11=a^2-a+3 \Rightarrow a=-\frac{8}{7}$

(15) Si H(x) = cos 2x y f(x) = sen x encuentre una función g tal que H(x) = (g o f)(x)

Desarrollo

H(x) = (g o f)(x) = g(f(x)) = cos 2x

$g(\operatorname{sen} x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$ $\therefore\ g(x)=1-2x^2$

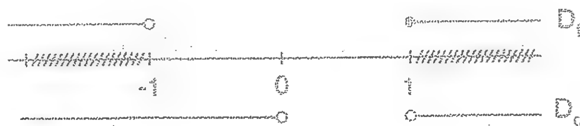
(16) Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & , x\geq 1\\ -x+1 , & x<-1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & , x<0\\ x^2-\frac{1}{x} & , x>1\end{cases}$ Hallar (f + g)(x) y graficar.

Desarrollo

Calculando el dominio de f + g, pero $D_{f+g}=D_f\cap D_g$, luego para esto calculamos los dominios de f y g

$D_f=\langle-\infty,-1\rangle\cup[1,\infty\rangle$ y $D_g=\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle$

calculando la intersección de D_f y D_g



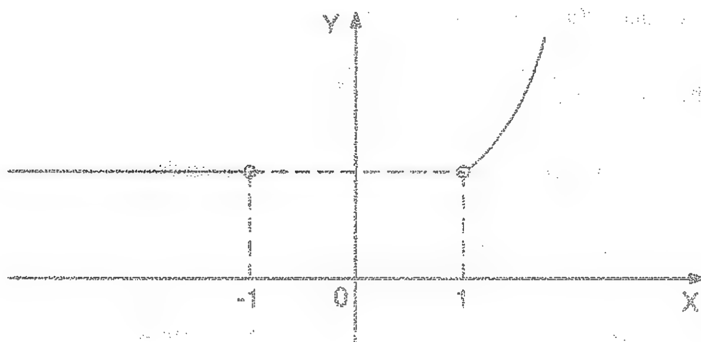
$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-\infty,-1> \cup <1,\infty>$$

calculando la regla de correspondencia de $f+g$

si $x \in <-\infty,-1> \Rightarrow f(x)+g(x) = -x+1+x = 1$

si $x \in <1,\infty> \Rightarrow f(x)+g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - \frac{1}{x} = x^2$

Luego $(f+g)(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ x < -1 \\ x^2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$, graficando



(17) Determinar si la función es inyectiva $f(x) = \sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}$

Desarrollo

Simplificado $3x^{3/2}+2x^{1/2} = \sqrt{x}(3x+2)$ de aquí se tiene que x>0 $\Rightarrow |x| = x$ entonces

$$f(x) = \sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}} = \sqrt{\frac{3x+2}{\sqrt{x}(3x+2)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

debemos probar que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ con lo cual se determina que es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b}} \Rightarrow a = b.$$ Por lo tanto f es inyectiva.

(18) Demostrar que f es inyectiva donde $f(x) = 5^x$, $\forall x \in R$.

Desarrollo

Debemos probar que: f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 5^a = 5^b \Rightarrow a = b$$

Por lo tanto f es inyectiva.

(19) Dada la función $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 7}$, x ∈ [-3,3], demostrar que f es inyectiva.

Desarrollo

Probaremos que f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b

$f(a) = f(b) \Rightarrow a + \sqrt{a^2 + 7} = b + \sqrt{b^2 + 7}$

$a - b = \sqrt{b^2 + 7} - \sqrt{a^2 + 7}$, elevando al cuadrado:

$$(a - b)^2 = (\sqrt{b^2 + 7} - \sqrt{a^2 + 7})^2$$

$ab + 7 = \sqrt{a^2 + 7}\sqrt{b^2 + 7}$, elevando al cuadrado:

$$a^2b^2 + 14ab + 49 = a^2b^2 + 7a^2 + 7b^2 + 49$$

$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$ $\therefore$ f es inyectiva

(20) La función f: R $\to$[0,+∞> definida por $f(x) = 5x^2$. ¿Es f suryectiva?

Desarrollo

Debemos de comprobar que: ∀ y ∈[0,+∞> , ∃ x ∈ R tal que f(x) = y

pero como $y = 5x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y/5}$, entonces:

$\exists x = \pm\sqrt{y/5}$, y ∈[0,∞> tal que $f(x) = f(\pm\sqrt{y/5}) = 5(\pm\sqrt{y/x})^2 = y$

$\therefore$ f(x) = y $\Rightarrow$ f es suryectiva.

(21) Determinar si la función $f(x) = x+1-[\![x]\!]$, $x \in R$ es inyectiva.

Desarrollo

Definimos él $[\![x]\!]$, $\forall x \in R$

$[\![x]\!] = k \iff k \le x < k+1$, $k \in Z$. Luego la función f(x) queda definida

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x+3 & , x \in [-2,-1> \\ x+2 & , x \in [-1,0> \\ x+1 & , x \in [0,1> \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Luego la función f(x) es la unión de una familia de funciones lineales donde cada una de las cuales es inyectiva, es decir:

$f(x) = x+1-[\![x]\!] \implies f(x) = x+1-k$

Probaremos que si $f(a) = f(b) \implies a = b$.

$f(a) = f(b) \implies a+1-k = b+1-k \implies a = b$

Por lo tanto cada función f(x) sea inyectiva falta ver que la intersección de los rangos de dos en dos es el vacío.

$f_k(x) = x+1-k$

$x \in [k, k+1> \implies k \le x < k+1 \implies k+1 \le x+1 < k+2 \implies 1 \le x+1-k < 2$

$1 \le f_k(x) < 2$ $\quad\therefore\quad y \in [1,2> \implies R_{f_k} = [1,2>$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k(x) = [1,2> \neq \phi$, por lo tanto f(x) no es inyectiva.

(22) Determinar sí la función f: <-4,3] ⟶ [-9,13> definida por f(x) = -2x + 1 es biyectiva.

Desarrollo

Veremos si f es inyectiva, es decir: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$$\begin{cases} f(x_1)=-2x_1+1 \\ f(x_2)=-2x_2+1 \end{cases} \Rightarrow -2x_1+1=-2x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2.$$ Por lo tanto f es inyectiva.

Ahora veremos si f es suryectiva, es decir: $R_f=[-9,13>$

Como y = -2x + 1 ⟹ $x=\frac{1-y}{2} \in <-4,3]$

$$-4<\frac{1-y}{2}\leq 3 \Rightarrow -8<1-y\leq 6 \Rightarrow -9\leq -y\leq 5 \Rightarrow -5\leq y<9$$

$\therefore\ R_f=[-5,9>\neq[-9,13>$, por lo tanto f no es suryectiva,

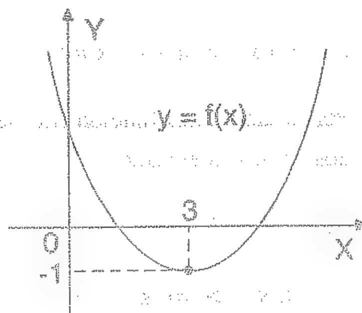
Luego la función f no es biyectiva.

(23) Determinar el dominio de la función $f(x)=x^2-6x+8$ para que la función f sea biyectiva.

Desarrollo

El dominio de una función cuadrática para que sea inyectiva se determina completando cuadrado es decir:

$f(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$ que es una parábola con vértice en el punto (3,-1) por lo tanto f es inyectiva si $D_f=[3,+\infty>$ ó para $D_f=<-\infty,3]$



(24) Si existe f o g, donde f y g son inyectivas. Demostrar que f o g es inyectiva.

Demostración

Como f y g son inyectivas, entonces: $\begin{cases} f(x_1)=f(x_2) \\ g(x_3)=f(x_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 & \dots (1) \\ x_3=x_4 & \dots (2) \end{cases}$

Probaremos que f o g es inyectiva, es decir:

$$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2$$

$$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \quad \Rightarrow \quad f(g(x_1))=f(g(x_2))$$

$$\Rightarrow \quad g(x_1)=g(x_2), \text{ por ser f inyectiva.}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_2, \text{ por ser g inyectiva.}$$

Como $(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$, entonces f o g es también inyectiva.

(25) Si f: R ⟶ B es una función suryectiva. Tal que f(x) = |x – 3| - x, Hallar el conjunto B.

Desarrollo

Se conoce que $|x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$

Luego a la función f expresaremos así: $f(x)=\begin{cases} -3, & x\geq 3 \\ 3-2x, & x<3 \end{cases}$

Donde $D_f = <-\infty,3> \cup [3,+\infty>$, ahora calculamos el rango

Si $x < 3 \Rightarrow y = f(x) = 3-2x \Rightarrow x=\frac{3-y}{2}<3 \Rightarrow y > -3 \Rightarrow y \in <-3,+\infty>$

Si $x \geq 3 \Rightarrow y = f(x) = -3 \Rightarrow y = -3$

$R_f = <-3,+\infty> \cup \{-3\} = [-3,+\infty>$

Por lo tanto la función f es suryectiva cuando: $B = [-3,+\infty>$

(26) Si la función f es creciente en todo su dominio demostrar que f es inyectiva.

Desarrollo

Aplicaremos la definición siguiente de función inyectiva f es inyectiva, si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in D_f$

Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$ pero f es creciente entonces: $f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_2) < f(x_1)$ de donde $f(x_1) \neq f(x_2)$ por lo tanto f es inyectiva.

(27) Demostrar que la función f es inyectiva, donde: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in <4,+\infty> \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Desarrollo

Primeramente veremos si $f_1(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ y $f_2(x) = -x^2$ son inyectivas.

$$\forall\ x_1, x_2 \in D_{f_1} \Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1}} = \frac{2}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto $f_1(x)$ es inyectiva.

$$\forall\ x_1, x_2 \in D_{f_2} \Rightarrow f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

como $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Por lo tanto $f_2(x)$ es inyectiva.

Ahora veremos que $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \phi$

Para $x \in <4,+\infty> \Rightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y^2}$

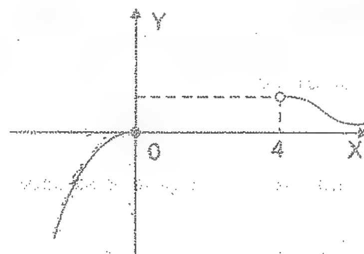
$$x = \frac{4}{y^2} \in <4,+\infty> \Rightarrow \frac{4}{y^2} > 4 \Rightarrow y^2 < 1 \wedge y > 0 \Rightarrow y \in <0,1> \Rightarrow R_{f_1} = <0,1>$$

para $x < 0 \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{-y} < 0 \Rightarrow \sqrt{-y} > 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow y < 0$

$R_{f_2} = <-\infty, 0>$

$R_{f_1} \wedge R_{f_2} = <0,1> \wedge <-\infty,0> = \phi$

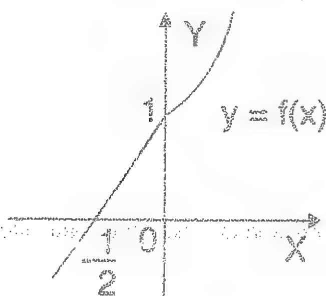
Por lo tanto es inyectiva.



(28) Hallar la inversa $f^{-1}(x)$ si existe, de la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 \ , & x \le 0 \\ x^2+1 \ , & x > 0 \end{cases}$

Desarrollo

Graficando a la función f(x) se tiene: Si $x \le 0 \Rightarrow R_{f_1} = <-\infty,1]$



$x > 0 \Rightarrow R_{f_2} = <1,+\infty>$ además cada función $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son inyectivas, y como $R_{f_1} \wedge R_{f_2} = \phi$ entonces f(x) es inyectiva.

Por lo tanto existe la inversa de f(x). Ahora calculamos la inversa de f(x)

Si $x \le 0$, $f_1(x) = 2x+1$

Para esto: $f_1(f_1^*(x)) = x$

$x \in <-\infty,1]$, $2f_1^*(x)+1 = x$, de donde $f_1^*(x) = \frac{x-1}{2}$, $x \le 1$

Si $x > 0$, $f_2(x) = x^2+1$

para esto: $f_2(f_2^*(x)) = x$, $x \in <1,+\infty>$

$f_2^{*2}(x)+1 = x$, de donde $f_2^*(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in <1,+\infty>$

puesto que el rango de $f_2(x)$ es $[1,\infty>$ entonces $f_2^*(x) > 0$

por lo tanto: $f^*(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} \ , & x \le 1 \\ \sqrt{x-1} \ , & x > 1 \end{cases}$

(29) Probar que $f(x)=4\sqrt{x}-x$ para $0 \le x \le 1$, posee inversa y hallar la función inversa si es que existe.

Desarrollo

Para que f(x) tenga inversa debe de ser inyectiva y para esto debe cumplir que:

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$4\sqrt{x_1}-x_1=4\sqrt{x_2}-x_2 \Rightarrow 4(\sqrt{x}-\sqrt{x_1})-(x-x_1)=0$

$\Rightarrow 4(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})-(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=0$

$\Rightarrow (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(4-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$

Como $0 \le x_2 \le 1 \Rightarrow 4-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} \ne 0$

Luego $\sqrt{x}-\sqrt{x_1}=0 \Rightarrow x_1=x_2$ por lo tanto

f(x) es inyectiva entonces existe f*(x), ahora calculamos la inversa f*(x) para esto:

f(f*(x)) = x, $x \in [0,3]$

despejando f*(x) se tiene: $f^*(x)=(2+\sqrt{4-x})^2$, $x \in [0,3]$

(30) Hallar f*(x) si existe donde $f(x)=\begin{cases} -x[\![1-\frac{x}{2}]\!] & \text{si} \quad -2<x<0 \\ |x^2-1|-1 & \text{si} \quad 0 \le x<1 \end{cases}$

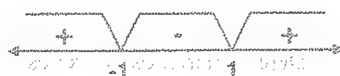
Desarrollo

Primeramente definiremos el máximo entero $[\![1-\frac{x}{2}]\!]$ y el valor absoluto $|x^2-1|$ en cada intervalo $[\![1-\frac{x}{2}]\!]=1+[\![-\frac{x}{2}]\!]=1+0=1$

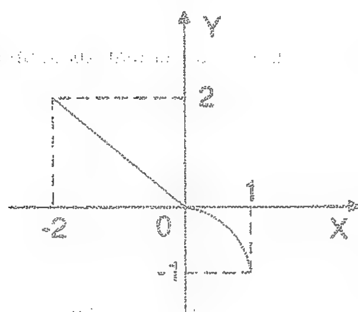
Como $-2<x<0 \Rightarrow 0<-x<2$

$$\Rightarrow \quad 0 < -\frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$



Para $0 \le x < 1 \Rightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2$ por definición.



Por lo tanto la función f(x) queda en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad -2 < x < 0 \\ -x^2 & si \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Como f(x) es inyectiva, entonces f*(x) existe:

Si $-2 < x < 0$, $f_1(x) = -x$, calculando su inversa $f_1(f_1^*(x)) = x$

$x \in \langle 0, 2 \rangle$, $-f_1^*(x) = x$, de donde $\therefore f_1^*(x) = -x$, $0 < x < 2$

Si $0 \le x < 1$, $f_2(x) = -x^2$, calculando su inversa $f_2^*(x)$

Se tiene: $f_2(f_2^*(x)) = x$, $-1 \le x < 0$, de donde $-f_2^{*2}(x) = x$, $-1 < x \le 0$

$$\therefore f_2^*(x) = \sqrt{-x}, \quad 1 < x \le 0$$

Por lo tanto la inversa de f(x) es: $f^*(x) \begin{cases} -x & si \quad 0 < x < 2 \\ \sqrt{-x} & si \quad -1 < x \le 0 \end{cases}$

(31) Hallar f*(x) si existe donde $f(x) = \sqrt{\dfrac{2|x| + x + 2}{3x^{3/2} + 2x^{1/2}}}$

Desarrollo

Calculando el dominio para definir $|x|$

$3x^{3/2} + 2x^{1/2} = \sqrt{x}(3x+2)$ de aquí $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

Ahora simplificado se tiene: $f(x)=\sqrt{\dfrac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}=\sqrt{\dfrac{3x+2}{\sqrt{x}(3x+2)}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Determinaremos si f(x) es inyectiva: f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b (f es inyectiva)

f(a) = f(b) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}$ $\Rightarrow$ a = b

Por lo tanto f(x) es inyectiva entonces f(x) tiene inversa. Ahora calculamos la inversa.

$$f(f^*(x))=x$$

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{f^*(x)}}=x$, de donde $f^*(x)=\dfrac{1}{x^4}$

(32) Si f es la función definida por $f(x)=\sqrt{x^2+16}+2x$, $x\in[0,3]$ determinar si existe f*(x).

Desarrollo

Para que exista f*(x) la función f(x) debe de ser inyectiva, es decir:

Sí f(a) = f(b) entonces a = b

$\sqrt{a^2+16}+2a=\sqrt{b^2+16}+2b$ entonces $2(a-b)=\sqrt{b^2+16}-\sqrt{a^2+16}$

para que sea f inyectiva debe cumplir a = b de donde

$a-b=0\Rightarrow\sqrt{b^2+16}-\sqrt{a^2+16}=0$

$\sqrt{a^2+16}=\sqrt{b^2+16}\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow|a|^2=|b|^2$

$\Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow$ a = b puesto que a , b $\in[0,3]$

por lo tanto f(x) es inyectiva $\Rightarrow$ $\exists$ f*(x)

Ahora calculamos f*(x) mediante la ecuación: f(f*(x)) = x , $x\in[4,11]$

$\sqrt{f^*(x))^2+16}+2f^*(x)=x\Rightarrow\sqrt{(f^*(x))^2+16}=x-2f^*(x)$ elevado al cuadrado

$$(f^*(x))^2+16=x^2-4xf^*(x)+4(f^*(x))^2 \Rightarrow 3(f^*(x))^2-4xf^*(x)+x^2-16=0$$

$$f^*(x)=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2-12(x^2-16)}}{6} \Rightarrow f^*(x)=\frac{4x\pm 2\sqrt{x^2+48}}{6}$$

$$f^*(x)=\frac{2x\pm\sqrt{x^2+48}}{3} \qquad \therefore f^*(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2+48}}{3}\ ,\ x\in[4,11]$$

(33) Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} & ,\ x\geq 3\\ x^2+2x-3 & ,\ x\in[-1,1>\end{cases}$ Determinar si f*(x) si existe.

Desarrollo

Determinaremos si f(x) es inyectiva

Sí $x\geq 3 \Rightarrow f_1(x)=\sqrt{x-3}$ donde $R_{f_1}=[0,\infty>$

Si $f_1(x_1)=f_1(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1-3}=\sqrt{x_2-3}$ elevando al cuadrado $\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f_1$ es inyectiva

Si $-1\leq x<1 \Rightarrow f_2(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

Como $-1\leq x<1 \Rightarrow 0\leq x+1<2 \Rightarrow 0\leq(x+1)^2<4$

$$\Rightarrow -4\leq(x+1)^2-4<0 \Rightarrow R_{f_2}=[-4,0>$$

Si $f_2(x_1)=f_2(x_2)\Rightarrow(x_1+1)^2-4=(x_2+1)^2-4$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2\Rightarrow x_1+1=x_2+1$$

$\Rightarrow x_1=x_2$ puesto que $x_1,x_2\in[-1,1>$. Por lo tanto f_2 es inyectiva.

Como $R_{f_1}\wedge R_{f_2}=[0,\infty>\wedge[-4,0>=\phi$.

Entonces f(x) es inyectiva y por lo tanto ∃ f*(x)

Ahora calculando la inversa de cada función: $f_1(f_1^*(x))=x$, $x\in[0,+\infty>$

$\sqrt{(f_1^*(x))-3} = x \Rightarrow f_1^*(x) = x^2+3$, $x \in [0,+\infty>$

$f_2(f^*(x)) = x$, $x \in [-4,0>$

$(f_2^*(x))^2 + 2f^*(x) - 3 = x \Rightarrow f_2^*(x) = \sqrt{x+4}-1$, $x \in [-4,0>$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} x^2+3 & , x \geq 0 \\ \sqrt{x+4}-1 & , -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

(34) Si f(x) = 2x − 3b , determinar el valor de b de manera que $f(b+1) = 3f^*(b^2)$

Desarrollo

Calculando la inversa de f(x): f(f*(x)) = x, $x \in D_{f^*}$

2f*(x) − 3b = x, $x \in D_{f^*}$, de donde $f^*(x) = \frac{x+3b}{2}$, $x \in D_{f^*}$

como $f(b+1) = 3f^*(b^2)$, entonces $2(b+1) - 3b = 3(\frac{b^2+3b}{2})$

$3b^2 + 11b - 4 = 0 \Rightarrow$ (3b − 1)(b + 4) = 0, de donde $b = \frac{1}{3}$, b = -4

(35) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2-8x+7 & si \ 4 < x \leq 7 \vee -3 \leq x < -1 \\ \sqrt{7-2x} & si \ -1 \leq x < 3 \end{cases}$. Hallar f*(x) si existe.

Desarrollo

Analizaremos sí $f_1(x) = x^2-8x+7$, $f_2(x) = \sqrt{7-2x}$ es inyectiva

Sí 4 < x ≤ 7 V − 3 ≤ x <-1 $\Rightarrow f_1(x) = x^2 - 8x + 7$

$f_1(x) = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$

Sí $x_1, x_2 \in D_{f_1}$; $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$(x_1-4)^2-9=(x_2-4)^2-9 \quad \Rightarrow \quad |x_1-4|^2=|x_2-4|^2$

$\Rightarrow \ |x_1-4|=|x_2-4| \ \Rightarrow \ x_1=x_2$, puesto que $|x-4|=x-4$

Sí $4<x\le 7$, $|x-4|=4-x$ si $-3\le x<-1$. Luego $f_1(x)$ es inyectiva

Sí $-1\le x<3 \ \Rightarrow \ f_2(x)=\sqrt{7-2x}$

Sí $x_1,x_2\in D_{f_2}$; $f_2(x_1)=f_2(x_2) \ \Rightarrow \ x_1=x_2$

$\sqrt{7-2x_1}=\sqrt{7-2x_2} \quad \Rightarrow \ 2x_1=2x_2 \quad \Rightarrow \ x_1=x_2$. Luego $f_2(x)$ es inyectiva.

Ahora calcularemos el rango de cada función.

Sí $4<x\le 7 \ \vee \ -3\le x<-1 \quad \Rightarrow \quad 0\le(x-4)^2\le 9 \ \vee \ -7\le x-4<-5$

$-9\le(x-4)^2-9\le 0 \ \vee \ 16<(x-4)^2-9\le 40$, pro lo tanto $\quad R_{f_1}=<-9,0]\cup<16,40]$

Sí $-1\le x<3 \ \Rightarrow \ -6<-2x\le 2 \ \Rightarrow \ 1<7-2x\le 9 \ \Rightarrow \ 1<\sqrt{7-2x}\le 3$

Entonces $R_{f_2}=<1,3]$

Como $R_{f_1}\wedge R_{f_2}=\phi$ entonces f es inyectiva en todo su dominio.

Ahora calculamos f*(x)

$f_1(f_1^*(x))=x$, $x\in <-9,0]\cup<16,40]$

$(f_1^*(x))^2-8f_1^*(x)+7-x=0$, $x\in <-9,0]\cup<16,40]$

$f_1^*(x)=4\pm\sqrt{x+9}$

$$f_1(x)=\begin{cases}4+\sqrt{x+9} \ , x\in<-9,0]\\ 4-\sqrt{x+9} \ , x\in<16,40]\end{cases}$$

$f_2(f_2^*(x))=x$, $x\in<1,3] \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7-2f_2^*(x)}=x$, $x\in<1,3]$

$f_2^*(x) = \frac{1}{2}(7 - x^2)$, $x \in <1,3]$

Luego la función f*(x) queda en la forma: $f^*(x) = \begin{cases} 4 + \sqrt{x+9}, & x \in < -9, 0] \\ 4 - \sqrt{x+9}, & x \in < 16, 40] \\ 1/2(7 - x^2), & x \in < 1, 3] \end{cases}$

22.20. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Sean A = {a ∈ N / a es impar}; B = {b ∈ N / b es par} y R = {(a,b) ∈ AxB / a + b; primo menor que 10}, calcular n(R).

a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 6

Desarrollo

A = {1,3,5,7,9,11,...}, B = {2,4,6,8,10,...}

A x B = {(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(1,10),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(7,2),...}

Ahora expresamos a R por extensión.

(1,2) ∈ R puesto que $1 + 2 = 3$ es primo

(1,4) ∈ R puesto que $1 + 4 = 5$ es primo

(1,6) ∈ R puesto que $1 + 6 = 7$ es primo

(3,2) ∈ R puesto que $3 + 2 = 5$ es primo

(3,4) ∈ R puesto que $3 + 4 = 7$ es primo

(5,2) ∈ R puesto que $5 + 2 = 7$ es primo

Luego R = {(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(5,2)}

de donde n(R) = 6, la respuesta es **e**

(2) Consideremos los conjuntos A = {2,5,7} y B = {3,4}, halle la suma de los elementos del dominio de la relación R: A → B definida por R = {(x,y) / x + y > 8}

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

Desarrollo

Calculando el producto cartesiano AxB

$(2,3) \notin R$ puesto que $2+3 \ngtr 8$

$(2,4) \notin R$ puesto que $2+4 \ngtr 8$

$(5,3) \notin R$ puesto que $5+3 \ngtr 8$

$(5,4) \in R$ puesto que $5+4>8$ es verdadero

$(7,3) \in R$ puesto que $7+3>8$ es verdadero

$(7,4) \in R$ puesto que $7+4>8$ es verdadero

por lo tanto $R=\{(5,4),(7,3),(7,4)\}$ de donde $D_R=\{5,7,7\}=\{5,7\}$ y la suma de sus elementos es: $5+7=12$, la respuesta es **c**

(3) Dado $A=\{1;2;3\}$ halle la suma de elementos del rango de R si $R=\{(x,y)\in AxA \,/\, x+y\leq 4\}$

a) 4 b) 6 c) 5 d) 3 e) 7

Desarrollo

$AxA=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ de donde

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$ y $R_{g(R)}=\{1,2,3\}$

La suma de los elementos del rango es: $1+2+3=6$, la respuesta es **b**

(4) Si $A=\{a\in Z \,/\, 1<a\leq 6\}$, $B=\{b\in N \,/\, 3\leq b\leq 9\}$, $R=\{(a,b)\in AxB \,/\, 3\leq a<b\leq 6\}$ halle la suma de los elementos del rango de R.

a) 20 b) 19 c) 18 d) 15 e) 9

Desarrollo

Calculando los elementos de A y B, obteniéndose lo siguiente

$A=\{2,3,4,5,6\}$; $B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$

Ahora calculamos los elementos de la relación R

Como $3 \leq a < b \leq 6$

(3,4)

(3,5)

(3,6)

(4,5)

(4,6)

(5,6) de donde $R = \{(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$

y su rango es: $R_{g(R)} = \{4,5,6\}$, la suma de estos elementos es: $4 + 5 + 6 = 15$

por lo tanto la respuesta es **d**

(5) Sean $A = \{2,3,4,5\}$ y $B = \{3,6,7,10\}$ halle n(R) si: $R = \{(x,y) \in AxB$ / "x" divide a "y" exactamente}

a) 6 b) 5 c) 7 d) 4 e) 3

Desarrollo

$AxB = \{(2,3),(2,6),(2,7),(2,10),(3,3),(3,6),(3,7),(3,10),(4,3),(4,6),(4,7),(4,10),(5,3),$
$(5,6),(5,7),(5,10)\}$

Calculando los elementos de R donde el elemento del dominio divide a su rango es decir:

$R = \{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)\}$, de donde se tiene $n(R) = 5$, la respuesta es **b**

(6) Dado el conjunto universal: $U = \{x / x \in N,\ 0 < x < 20\}$, $A = \{(2x) / -2 < x < 8\}$;
$B = \{3x / 3 < \frac{x+1}{2} < 5\}$. Halle n(A x B)

a) 75 b) 110 c) 190 d) 209 e) 60

Desarrollo

Calcular los elementos del conjunto universal $U = \{1,2,3,4,...,19\}$

Calculando los elementos de los conjuntos A y B

$A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ de donde $n(A) = 7$

$B = \{18,21,24\}$ de donde $n(B) = 3$

$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = (7)(3) = 21$

NOTA ACLARATORIA.- Esta pregunta ha sido tomado en uno de los concursos nacionales de matemática el año 2001 el resultado obtenido no figura entre las alternativas debo indicar que los elementos del conjunto A se obtiene así: $A = \{(2x) / -2 < x < 8\}$

Se debe tomar para x el 1,2,3,4,5,6,7 y los elementos de A es 2(1), 2(2), 2(3), 2(4), 2(5), 2(6), 2(7) es decir: 2,4,6,8,10,12,14 son los elementos para B: $3 < \frac{x+1}{2} < 5$

$$6 < x + 1 < 10 \Rightarrow 5 < x < 9$$

los valores de x que debe tomar para calcular los elementos de B es: 6,7,8 y por lo tanto sus elementos de B es: 3(6), 3(7), 3(8) es decir 18,21,24

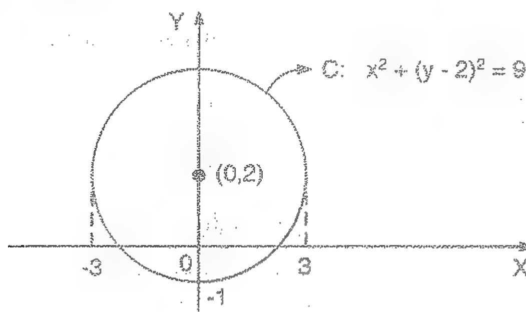
(7) Dada la relación $R = \{(x, y) \in RxR / (2-y)^2 = 9 - x^2\}$. Halle $D_R \cap R_{g(R)}$

a) [-1,3] b) [-3,1] c) [3,5] d) [-3,5] e) [-1,2]

Desarrollo

A la ecuación $(2-y)^2 = 9 - x^2$, expresamos en la forma: $x^2 + (y-2)^2 = 9$, es la ecuación de la circunferencia de centro el punto C(0,2) y de radio r = 3.

Graficando la circunferencia



$D_R = [-3,3]$ y $R_R = [-1,5]$

$D_R \cap R_R = [-3,3] \cap [-1,5] = [-1,3]$, la respuesta es **a**

(8) Consideremos los conjuntos A = {1,3,5} y B = {2,4,6}, se define las relaciones $R_1 = \{(x,y) \in AxB / x + y = 7\}$; $R_2 = \{(x,y) \in AxB / y = 6\}$. Hallar la suma de todos los elementos de $D_{(R_1 - R_2)} \cup R_{(R_1 - R_2)}$

a) 7 b) 10 c) 14 d) 12 e) 6

Desarrollo

AxB = {(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)}

Ahora determinaremos los elementos de R_1 y R_2

$R_1 = \{(1,6),(3,4),(5,2)\}$; $R_2 = \{(1,6),(3,6),(5,6)\}$

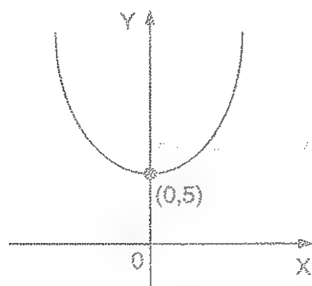
$R_1 - R_2 = \{(3,4),(5,2)\}$ de donde $D_{R_1 - R_2} = \{3,5\}$ y $R_{R_1 - R_2} = \{2,4\}$

calculando la suma de los elementos $D_{R_1 - R_2} \cup R_{R_1 - R_2}$

$D_{R_1 - R_2} \cup R_{R_1 - R_2} = \{2,3,4,5\}$ de donde $2 + 3 + 4 + 5 = 14$

por lo tanto la respuesta es **c**

(9) Sea f: R →R una función definida por $f(x) = ax^2 + b$, donde a y b son constantes, siendo $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{2}$, cuya grafica es:



Hallar el valor de "a + b"

a) -3 b) 2 c) 4

d) 5 e) 7

Desarrollo

Como $f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} + b = \frac{11}{2}$ de donde **a + 4b = 22**

Además del grafico $f(0)=5 \Rightarrow 0+b=5 \Rightarrow b=5$, $a=2$

Por lo tanto: $a+b=2+5=7$, la respuesta es **e**

(10) Dada la función definida por: $f(x)=\begin{cases} 3x-1 \ , \ si \ \ x>3 \\ x^2-2 \ , \ si \ -2\le x\le 3 \\ 2x+3 \ , \ si \ \ x<-2 \end{cases}$, calcule el valor de $E=f(2)+f(-1)+f(-3)+f(4)$

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

$E=f(2)+f(-1)+f(-3)+f(4)=(4-2)+(1-2)+(-6+3)+(12-1)$

$=2-1-3+11=13-4=9$, la respuesta es **d**

(11) Si $f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x-1}{x+1}$; $x>1$, indicar el valor de "n" que satisface la condición $f(2n-1).f(\frac{1}{n-1})=3$

a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 1

Desarrollo

Expresaremos a la expresión $\frac{x-1}{x+1}$ en términos de $\frac{1}{x}-1$

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-(\frac{1}{x}-1)}{(\frac{1}{x}-1)+2} \quad \text{de donde} \quad y=\frac{1}{x}-1$$

$$f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{-(\frac{1}{x}-1)}{(\frac{1}{x}-1)+2} \Rightarrow \boxed{f(y)=-\frac{y}{y+2}}$$

ahora evaluamos en la condición dada:

$f(2n-1).f(\frac{1}{n-1}) = 3$, de donde $\frac{(2n-1)}{(2n-1)+2} \cdot \frac{\frac{1}{n-1}}{(\frac{1}{n-1}+2)} = 3$

$\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = 3$ entonces $\frac{1}{2n+1} = 3$

$3(2n+1) = 1 \Rightarrow 2n+1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 2n = -\frac{2}{3}$ de donde $n = -\frac{1}{3}$

por lo tanto la respuesta es **b**

(12) Sea la función $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}$, halle el rango e indique el menor valor entero positivo del rango.

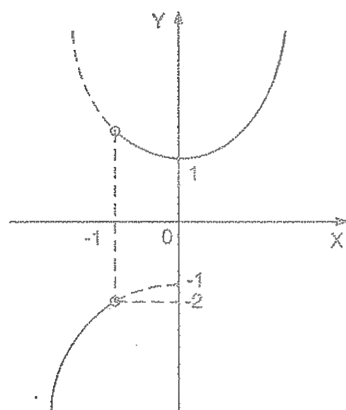
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desarrollo

Factorizando la expresión $x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1)+(x+1) = (x^2+1)(x+1)$

$f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|} = \frac{(x^2+1)(x+1)}{|x+1|}$, ahora definimos f(x)

$f(x) = \begin{cases} -x^2-1 & , \; si \; x < -1 \\ x^2+1 & , \; si \; x > -1 \end{cases}$, graficando



si $x < -1 \Rightarrow f(x) = -x^2-1 \Rightarrow y+1 = -x^2$, V(0,-1)

$x > -1 \Rightarrow f(x) = x^2+1 \Rightarrow y-1 = x^2$, V(0,1)

$R_f = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [1, \infty \rangle$

el menor entero de R_f es 1 y la respuesta es **a**

(13) Hallar la suma de coeficientes de la función cuadrática que cumple que: f(2) = 6, f(0) = 4, f(-1) = 7.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{11}{3}$ d) $\frac{13}{3}$ e) 1

Desarrollo

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, la función cuadrática

$$\begin{cases} f(0) = 0 + 0 + c = 4 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 6 \\ f(-1) = a - b + c = 7 \end{cases} \text{ entonces } \boxed{c = 4} \quad \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

$$3a = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Luego $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 4$, la suma de sus coeficientes es: $\frac{4}{3} - \frac{5}{3} + 4 = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$

Por lo tanto la respuesta es $\boxed{c}$

(14) Si $f(x) = x^2 - 10x$, halle el valor de "m" de tal manera que: f(x) ≥ f(m), ∀ x ∈ R, m∈ R

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Desarrollo

$f(x) = (x^2 - 10x + 25) - 25 = (x-5)^2 - 25$

∀ x ∈ R, $(x-5)^2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{(x-5)^2 - 25} \geq -25$

f(x) ≥ -25 de donde f(m) = -25

como f(m) = -25 $\Rightarrow (m-5)^2 - 25 = -25 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 5}$

por lo tanto la respuesta es $\boxed{b}$

(15) Hallar el rango de: $G(x)=\dfrac{4x^2-1}{|2x+1|}$

a) <-2,2>   b) [-2,2>   c) <2,∞>   d) <-2,∞>   e) <-2,2]

Desarrollo

El dominio de la función G es: $x\in\langle-\infty,-\frac{1}{2}\rangle\cup\langle\frac{1}{2},\infty\rangle$

Si $x\in\langle-\infty,-\frac{1}{2}\rangle \Rightarrow |2x+1|=-(2x+1)$, de donde

$$G(x)=\frac{4x^2-1}{|2x+1|}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{-(2x+1)}=1-2x$$

como $x<-\frac{1}{2} \Rightarrow 2x<-1 \Rightarrow -2x>1$

$\Rightarrow 1-2x>2 \Rightarrow G(x)>2$ $\therefore R(G_1)=\langle 2,+\infty\rangle$

Si $x\in\langle-\frac{1}{2},\infty\rangle \Rightarrow |2x+1|=2x+1$, de donde

$$G(x)=\frac{4x^2-1}{|2x+1|}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1}=2x-1$$

como $x>-\frac{1}{2} \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow 2x-1>-2 \Rightarrow G(x)>-2$ $\therefore R(G_2)=\langle-2,\infty\rangle$

Luego $R_{G(x)}=R_{(G_1)}\cup R_{(G_2)}=\langle 2,\infty\rangle\cup\langle-2,\infty\rangle=\langle-2,\infty\rangle$

Por lo tanto la respuesta es **d**

(16) Determinar el máximo valor de la función $f(x)=-x^4+6x^2-4$ en el intervalo [-1,1]

a) -4   b) 3   c) 1   d) 7   e) 5

Desarrollo

$f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4 = -(x^4 - 6x^2 + 9) + 5 = -(x^2 - 3)^2 + 5$

Luego $f(x) = -(x^2 - 3)^2 + 5$

Como $x \in [-1,1] \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -3 \leq x^2 - 3 \leq -2$, elevando al cuadrado

$4 \leq (x^2 - 3)^2 \leq 9 \Rightarrow -9 \leq -(x^2 - 3)^2 \leq -4$

$-4 \leq -(x^2 - 3)^2 + 5 \leq 1$

$-4 \leq f(x) \leq 1$

por lo tanto $f_{max} = 1$. la respuesta es **c**

(17) El dominio de la función $g(x) = [\log\frac{(5x - x^2)}{4}]^{\frac{1}{2}}$ (donde log es el logaritmo de base 10) es:

a) [1,15> b) [1,4] c) <1,3> d) <1,4> e) [1,3]

Desarrollo

g(x) esta definida si $\frac{5x - x^2}{4} > 0 \wedge \log(\frac{5x - x^2}{4}) \geq 0$

$\frac{5x - x^2}{4} > 0 \wedge \log\frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x - x^2}{4} > 0 \wedge \frac{5x - x^2}{4} \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) \leq 0$

+ 1 - 4 +

Luego $x \in [1,4] \Rightarrow D_g = [1,4]$, la respuesta es **b**

(18) Sea $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ donde el dominio de f es [a;a+2]; a< -1. Luego el máximo valor de f es:

a) $\frac{a+1}{a-1}$ b) $\frac{a+3}{a+1}$ c) $\frac{a+2}{a}$ d) $\frac{a+3}{a-1}$ e) $\frac{a+2}{a+1}$

Desarrollo

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}, \quad x\in D_f=[a;a+2]$$

calculando el rango de f de la función f(x)

x ∈ [a, a + 2] ⇒ a ≤ x ≤ a + 2 ⇒ a − 1 ≤ x − 1 ≤ a + 1, para a < -1 entonces a + 1 < 0 luego los extremos son negativos por lo tanto se puede tomar inversas

$$\frac{1}{a+1}\le\frac{1}{x-1}\le\frac{1}{a-1} \Rightarrow \frac{2}{a+1}\le\frac{2}{x-1}\le\frac{2}{a-1}$$

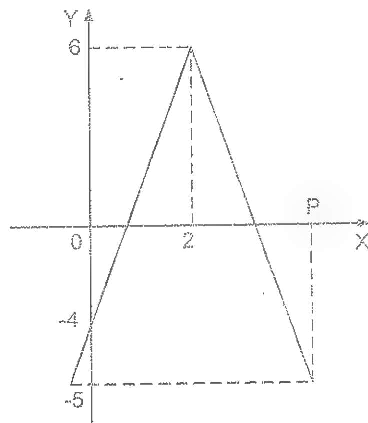
$$\Rightarrow 1+\frac{2}{a+1}\le 1+\frac{2}{x-1}\le 1+\frac{2}{a-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{a+1}\le\frac{x+1}{x-1}\le\frac{a+1}{a-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{a+1}\le f(x)\le\frac{a+1}{a-1}$$

$f(x)\in[\frac{a+3}{a+1},\frac{a+1}{a-1}]=R_f$, luego el valor máximo de la función que existe y esta determinado por $f_{max}=\frac{a+1}{a-1}$, la respuesta es **a**

(19) El gráfico adjunto corresponde a la función f definida por: f(x) = a | x − b | + c, hallar la abscisa de P



a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{21}{5}$ c) $\frac{12}{5}$

d) $\frac{13}{5}$ e) 6

Desarrollo

Del gráfico, consideremos que $R_f = [-5,6]$, es decir, que la función dada por:

f(x) = a | x – b | + c, tiene un máximo si a < 0 ∧ $f_{max} = c = 6$ para x = 2

f(2) = a | 2 – b | + 6 = 6 ⇒ | 2 – b | = 0 ⇒ **b = 2**

además se observa que f(0) = -4, de donde

f(0) = a | 0 – b | + 6 = -4 ⇒ a | -2 | = -10 ⇒ 2a = -10 ⇒ **a = -5**

por lo tanto f(x) = -5 | x – 2 | + 6

si P(y,0) ⇒ f(y) = -5 ⇒ -5 | y – 2 | + 6 = -5, y > 2

$-5\,|\,y-2\,| = -11 \Rightarrow |\,y-2\,| = \frac{11}{5} \Rightarrow y-2 = \frac{11}{5} \Rightarrow y = 2+\frac{11}{5} \Rightarrow y = \frac{21}{5}$

por lo tanto la respuesta es **b**

(20) La siguiente función $f(x) = -784x^4 + (53x^2 - 24x - 1)^2$, puede escribirse f(x) = 2025a (x – b)(x – c)(x – d)(x – e) entonces el valor de: a + b + c + d + e es

a) $\frac{1325}{765}$ b) $\frac{1253}{567}$ c) $\frac{1532}{657}$ d) $\frac{1523}{675}$ e) $\frac{1235}{756}$

Desarrollo

$$f(x) = -784x^4 + 2809x^4 - 2544x^3 + 470x^2 + 48x + 1$$

$$= 2025x^4 - 2544x^3 + 470x^2 + 48x + 1$$

f(x) = 2025a(x – b)(x – c)(x – d)(x – e)

$$= 2025ax^4 - 2025a(b+c+d+e)x^4 + 2025a[bc+(b+c)(d+e)de]x^2 -$$

$$-2025a[bc(d+e)+e(b+c)]x + 2025abcde$$

de donde 2025a = 2025 entonces a = 1

-2544 = -2025a(b + c + d + e), como a = 1

$$2544 = 2025(b + c + d + e) \Rightarrow b+c+d+e = \frac{2544}{2025} = \frac{848}{675}$$

$a+b+c+d+e = 1+\frac{848}{675} = \frac{1523}{675}$, la respuesta es **d**

(21) Dadas las funciones $f(x) = 3+\frac{x^2}{4}$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$ y la función h(x) = g(f(x)), entonces h(4) es igual a:

a) 0 b) 3 c) 4 d) 1 e) $\frac{1}{4}$

Desarrollo

$h(4) = g(f(4)) = g(7) = \frac{2}{7+1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, la respuesta es **e**

(22) Sea f una función inyectiva tal que $f^*(\frac{x-5}{x+5}) = b$. Hallar el conjunto solución de la inecuación $f(b) \le \frac{x-4}{x-5}$

a) $<-5, \frac{46}{11}] \cup [5, \infty>$ b) $<-5, \frac{45}{11}] \cup <5, \infty>$ c) $<-5, \frac{45}{11}> \cup [5, \infty>$

d) $<-\infty, \frac{45}{11}] \cup [5, \infty>$ e) $<-\infty, -5> \cup [\frac{45}{11}, 5>$

Desarrollo

Como f es inyectiva, entonces existe f* y además f o f* = I, $\forall x \in D_{f^*}$ de donde se tiene: $f^*(\frac{x-5}{x+5}) = b \Rightarrow f(f^*(\frac{x-5}{x+5})) = f(b)$

$$f \, o \, f^*(\frac{x-5}{x+5}) = f(b) \Rightarrow I(\frac{x-5}{x+5}) = f(b)$$

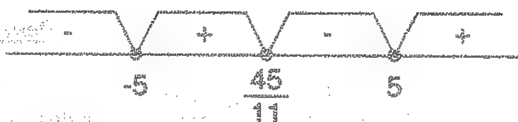
$\frac{x-5}{x+5} = f(b) \le \frac{x-4}{x-5}$; de donde se tiene:

$$\frac{x-5}{x+5} \le \frac{x-4}{x-5} \iff \frac{x-5}{x+5} - \frac{x-4}{x-5} \le 0$$

$$\iff \frac{(x^2-10x+25)-(x^2+x-20)}{(x+5)(x-5)} = 0$$

$$\iff \frac{-11x+45}{(x+5)(x-5)} \le 0$$

$$\iff \frac{11x-45}{(x+5)(x-5)} \ge 0$$



$\therefore \quad x \in <-5, \frac{45}{11}] \cup <5, \infty>$, la respuesta es **b**

(23) Sean las funciones $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2-1}$; $g(x) = 1 + \sqrt{x^2-1}$, sea A el dominio de (f + g) y B el rango de f + g, entonces $A \cup B$ es:

a) R b) <-1,1> c) R - <-1,1> d) [0,∞> e) [1,∞>

Desarrollo

Como $A = D_{f+g} = D_f \cap D_g$, entonces calculamos

$D_f = \{x \in R / x^2 - 1 \ge 0\}$ de donde $x^2 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1 \vee x \le -1$

$$D_f = <-\infty, -1] \cup [1, \infty>$$

$D_g = \{x \in R / x^2 - 1 \ge 0\}$ de donde $x^2 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1 \vee x \le -1$

$$D_g = <-\infty, -1] \cup [1, \infty>$$

$A = D_f \cap D_g = <-\infty, -1] \cup [1, \infty> = R - <-1, 1>$

Luego $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1$

$x \in A \Rightarrow x^2 - 1 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 1 \ge 2 \Rightarrow (f+g)(x) \ge 2$ de donde $R_{f+g} = [2, \infty> = B$

se observa que $B \subset A$ entonces $A \cup B = A = R - <-1,1>$

por lo tanto la respuesta es **c**

(24) El valor máximo de la función $f(x) = \dfrac{a^2 - x^2}{b^2 + x^2}$ en los reales, es:

a) $-\infty$ b) ∞ c) 0 d) $\dfrac{a^2}{b^2}$ e) no existe

Desarrollo

$$f(x) = \frac{a^2 - x^2}{b^2 + x^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + x^2} - 1, \text{ donde } D_f = R$$

$$x \in D_f \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + b^2 \geq b^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + b^2} \leq \frac{1}{b^2}$$

como $a^2 + b^2 > 0$, entonces multiplicamos

$$0 < \frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{b^2}, \text{ restando } -1$$

$$-1 < -1 + \frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2} \leq -1 + \frac{a^2 + b^2}{b^2} \Rightarrow -1 < \frac{a^2 - x^2}{x^2 + b^2} \leq \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow -1 < f(x) \leq \frac{a^2}{b^2}$$

de donde $f(x) \in <-1, \frac{a^2}{b^2}]$ entonces $R_f = <-1, \frac{a^2}{b^2}]$

$\therefore \quad f_{max} = \dfrac{a^2}{b^2}$, la respuesta es **d**

(25) Sea la función $f(x) = \left| \dfrac{3(3x+1)}{2(x+3)} + \dfrac{1}{2} \right|$, $x \in <0,1>$ entonces, el menor número m tal que $f(x) < m$ es:

a) 2 b) 3 c) 1 d) $\dfrac{3}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$

Desarrollo

$$f(x)=\left|\frac{3(3x+1)}{2(x+3)}+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{10x+6}{2(x+3)}\right|=\left|\frac{5x+3}{x+3}\right|=\left|5-\frac{12}{x+3}\right|$$

como $x \in \langle 0,1\rangle \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow 3 < x+3 < 4$, de donde

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{x+3}<\frac{1}{3} \Rightarrow 3<\frac{12}{x+3}<4$$

$$\Rightarrow -4<-\frac{12}{x+3}<-3 \text{, sumando } 5$$

$$\Rightarrow 1<5-\frac{12}{x+3}<2 \Rightarrow 1<\left|5-\frac{12}{x+3}\right|<2$$

$$\Rightarrow 1 < f(x) < 2$$

Luego el menor "m" tal que $f(x) < m$ es $m = 2$, la respuesta es **a**

(26) Sea $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g=\{(2,4),(5,3),(-6,8),(0,2),(-\frac{1}{2},5)\}$. Hallar $(f \circ g^*)(4)$, g^* es la inversa de g.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{35}$ d) $\sqrt{5}$ e) $-\sqrt{35}$

Desarrollo

$g=\{(2,4),(5,3),(-6,8),(0,2),(-\frac{1}{2},5)\}$, calculando su inversa

$g^*=\{(4,2),(3,5),(8,-6),(2,0),(5,-\frac{1}{2})\}$, de aquí observamos que $g^*(4) = 2$

ahora calculamos $(f \circ g^*)(4)$

$(f \circ g^*)(4)=f(g^*(4))=f(2)=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, la respuesta es **b**

(27) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1 & , si\ x>1 \\ x-7 & , si\ -1\le x\le 1 \\ -1 & , si\ x<-1 \end{cases}$ si "m" es mayor número real tal que $m \le f(x)$, $\forall x \in R$ y M es el menor número real tal que $f(x) \le M$, $\forall x \in R$. Hallar $M - m$

a) 4 b) 9 c) 6 d) 8 e) 10

Desarrollo

De la condición del problema se tiene: $m \le f(x) \le M, \ \forall x \in R$

de donde $R_f = [m, M]$, por lo tanto calculamos R_f

si $x > 1 \Rightarrow f_1(x) = 1 \Rightarrow R_{f_1} = \{1\}$

si $-1 \le x \le 1 \Rightarrow f_2(x) = x - 7$ de donde $-1 \le x \le 1$

$$-8 \le x - 7 \le -6$$

$$-8 \le f_2(x) \le -6 \qquad \therefore R_{f_2} = [-8, -6]$$

si $x < -1 \Rightarrow f_3(x) = -1 \Rightarrow R_{f_3} = \{-1\}$

Luego $R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} = \{1\} \cup [-8, -6] \cup \{-1\} = [-8, -6] \cup \{-1, 1\}$

Este resultado podemos expresar en la forma

$R_f = [-8, 1] - (< -6, -1 > \cup < -1, 1 >)$ de donde se obtiene $m = -8$ y $M = 1$

Luego $M - m = 1 - (-8) = 9$, la respuesta es **b**

(28) Se tiene la siguiente función $f(x) = \frac{a^x}{a^x + 1}$, $x \in [1, \infty>$; $a > 1$. Hallar el $R_f \cup D_{(\frac{1}{f})}$

a) $< 0, \frac{1}{2} >$ b) $< 0, \frac{a}{2}]$ c) $[\frac{a}{a+1}, \infty >$ d) $[\frac{a}{a+2}, \infty >$ e) $[\frac{1}{a}, \infty >$

Desarrollo

NOTA.- $D_{\frac{1}{f}} = D_f = [1, \infty >$, luego calculamos R_f

Para esto se tiene: $x \ge 1$ y $a > 1$ de donde $a^x \ge a^1$, invirtiendo

$0 \le \frac{1}{a^x} \le \frac{1}{a}$, sumando 1 a ambos miembros

$$1 \le 1+\frac{1}{a^x} \le 1+\frac{1}{a}$$

$$1 \le \frac{a^x+1}{a^x} \le \frac{a+1}{a}$$ invirtiendo

$$\frac{a}{a+1} \le \frac{a^x}{a^x+1} \le 1$$, como $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}$

$\frac{a}{a+1} \le f(x) \le 1$, de donde $R_f = [\frac{a}{a+1},1]$, por lo tanto se tiene:

$R_f \cup D_{\frac{1}{f}} = [\frac{a}{a+1},1] \cup [1,\infty> = [\frac{a}{a+1},\infty>$, la respuesta es **c**

(29) Sean las funciones f y g, ambas con dominio <-∞,∞> y tal que $f(2x-1)=4x^2-4x$, g(x – 2) = f(2x), calcular $E=5\sqrt{\frac{(f\circ g)(0)}{14}}$

a) 10 b) 12 c) 15 d) 16 e) 20

Desarrollo

Como $f(2x-1)=4x^2-4x$, expresaremos en términos de 2x – 1

$f(2x-1)=(4x^2-4x+1)-1=(2x-1)^2-1$, para z = 2x – 1

$f(z)=z^2-1 \Rightarrow f(2x)=(2x)^2-1=4x^2-1$

como $g(x-2)=f(2x)=4x^2-1$, para x = 2 se tiene: $g(0)=4(2)^2-1=15$

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(15)=15^2-1=224$

Luego $E=5\sqrt{\frac{(f\circ g)(0)}{14}}=5\sqrt{\frac{224}{14}}=5\sqrt{16}=5(4)=20$

Por lo tanto la respuesta es **e**

(30) Sean f y g dos funciones inyectivas, tales que: $(f o g)(\frac{2}{5})=\frac{3}{4}$, $f(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}$, $f^*(\frac{3}{4})=\frac{1}{2}$.

Hallar $(f o g^*)(\frac{1}{2})$

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 2

Desarrollo

Se conoce que: f* o f = I; (g o f)* = f* o g*, (f o g)(x) = f(g(x))

(f* o f)(x) = x como nos piden $(f o g^*)(\frac{1}{2})=f(g^*(\frac{1}{2}))$ ... (1)

pero se conoce: $(f o g)(\frac{2}{5})=\frac{3}{4}$ tomando (f o g)*

$(f o g)^*(f o g)(\frac{2}{5})=(f o g)^*(\frac{3}{4})$

$\frac{2}{5}=(g^* o f^*)(\frac{3}{4})=g^*(f^*(\frac{3}{4})) \Rightarrow \frac{2}{5}=g^*(\frac{1}{2})$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1)

$(f o g^*)(\frac{1}{2})=f(g^*(\frac{1}{2}))=f(\frac{2}{5})=\frac{4}{3}$, la respuesta es **a**

(31) Hallar el rango de la función $f(x)=10^{\log(1-|-x|)}$

a) <0,1] b) <0,1> c) [0,1] d) <-∞,1> e) <-∞,1]

Desarrollo

$f(x)=10^{\log(1-|-x|)}=10^{\log(1-|x|)}$

f(x) esta definido si: 1 - | x | > 0 ⇒ **| x | < 1**

aplicando la propiedad de logaritmo: $10^{\log A}=A$

$f(x)=10^{\log(1-|x|)}=1-|x|$, de donde

$y=1-|x| \Rightarrow 1-y=|x|\geq 0 \Rightarrow \boxed{y\leq 1}$ ... (1)

además $|x|<1 \Rightarrow 1-y<1 \Rightarrow \boxed{y>0}$ ... (2)

de (2) y (1) se tiene $0<y\leq 1$ $\therefore$ $R_f=<0,1]$

Por lo tanto la respuesta es **a**

(32) Se define las funciones: f={(-1,2),(0,4),(3,1),(5,8),(4,3)}, $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}\ , & x\in[0,3>\\ -|x-4|+1\ , & x\in[3,5]\end{cases}$, hallar $\frac{f}{g}$ y dar como resultado la suma de los elementos del rango de $\frac{f}{g}$.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

<u>Desarrollo</u>

Para calcular $\frac{f}{g}$ se debe tomar en cuenta que $\sqrt{x+1}\neq 0 \ \wedge\ -|x-4|+1\neq 0$ y esto ocurre para $x\neq -1 \ \wedge\ x\neq 3;5$ es decir que no deben estar en el $D_{\frac{f}{g}}$

además $D_f=\{-1,0,3,4,5\}$, $D_g=[0,3>\cup[3,5]$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x/g(x)=0\}=\{0,4\}$

si $x=0$, $y=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{4}{1}=4 \Rightarrow (0,4)\in\frac{f}{g}$

$x=4$, $y=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{3}{1}=3 \Rightarrow (4,3)\in\frac{f}{g}$

$\frac{f}{g}=\{(0,4),(4,3)\}$ donde $R_{\frac{f}{g}}=\{3,4\}$ y la suma de los elementos del rango de $\frac{f}{g}$ es:

$3+4=7$, la respuesta es **c**

(33) Si $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$, x > 0 y h(x) > 0, si x ≥ 1 y sabiendo que $(f\,o\,g\,o\,h)(x)=\sqrt{2x^2-1}$, hallar h(1) + h(2)

a) 1 b) $\sqrt{7}$ c) $1+\sqrt{7}$ d) $3-\sqrt{7}$ e) $4-\sqrt{7}$

Desarrollo

Como $(f\,o\,g\,o\,h)(x)=\sqrt{2x^2-1} \Rightarrow f(g(h(x)))=\sqrt{2x^2-1}$ ... (1)

Como $g(x)=x^2 \Rightarrow g(h(x))=h^2(x)$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$f(h^2(x))=\sqrt{2x^2-1}$ pero $f(x)=\sqrt{x}$ entonces

$\sqrt{h^2(x)}=\sqrt{2x^2-1} \Rightarrow h(x)=\sqrt{2x^2-1}$ porque h(x) > 0

$h(1)=\sqrt{2-1}=1$, $h(2)=\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$

Luego $h(1)+h(2)=1+\sqrt{7}$, la respuesta es **c**

(34) Dadas las funciones: f = {(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)}, g = {(0,3),(1,2),(2,1),(3,4)}. Hallar la suma de los elementos del rango de la función h = (f o g) + (g o f)

a) 8 b) 10 c) 12 d) 15 e) 16

Desarrollo

Para calcular f o g determinaremos su dominio

$D_{fog}=\{x/x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=\{0,1,2,3\}$

(f o g)(0) = f(g(0)) = f(3) = 5 ⇒ (0,5) ∈ f o g

(f o g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 3 ⇒ (1,3) ∈ f o g

(f o g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2 ⇒ (2,2) ∈ f o g

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(4) = 7 \Rightarrow (3,7) \in f \circ g$

$f \circ g = \{(0,5),(1,3),(2,2),(3,7)\}$

calculando $D_{gof} = \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{1,2\}$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1 \Rightarrow (1,1) \in g \circ f$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 4 \Rightarrow (2,4) \in g \circ f$

como $h = (f \circ g) + (g \circ f)$, $D_h = D_{fog} \cap D_{gof} = \{1,2\}$

$h(1) = (f \circ g)(1) + (g \circ f)(1) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow (1,4) \in h$

$h(2) = (f \circ g)(2) + (g \circ f)(2) = 2 + 4 = 6 \Rightarrow (2,6) \in h$

de donde $h = \{(1,4),(2,6)\}$ y su $R_h = \{4,6\}$

y la suma de los elementos del rango de h es: $4 + 6 = 10$, la respuesta es **b**

(35) Sea $f(x) = \sqrt{x^2 + |2x+2| + 3}$, $x \in \langle -\infty,-1]$ hallar f* indicando su dominio.

a) $f^*(x) = 1 - x$, $x \in [2,\infty\rangle$

b) $f^*(x) = 1 + x$, $x \in [2,+\infty\rangle$

c) $f^*(x) = 1 - 2x$, $x \in [-2,\infty\rangle$

d) $f^*(x) = x^2$, $x \in [1,\infty\rangle$

e) $f^*(x) = 2 - 2x$, $x \in [-1,\infty\rangle$

Desarrollo

Como $x \leq -1 \Rightarrow 2x \leq -2 \Rightarrow 2x + 2 \leq 0 \Rightarrow |2x + 2| = -2x - 2$

Luego $f(x) = \sqrt{x^2 + |2x+2| + 3}$, $x \in \langle -\infty,-1]$

$$= \sqrt{x^2 - 2x - 2 + 3} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \Rightarrow f(x) = |x - 1|$$

como $x \leq -1 \Rightarrow x - 1 \leq -2 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$

sabemos que $D_{f^*} = R_f$ entonces hallaremos el rango de f

x ≤ -1 ⇒ -x ≥ 1 ⇒ 1 − x ≥ 2 ⇒ f(x) ≥ 2

Luego $R_f = [2,\infty >= D_{f^*}$

f(x) = 1 − x ⇒ f(f*(x)) = x ⇒ 1 − f*(x) = x ⇒ f*(x) = 1 − x

∴ f*(x) = 1 − x, x ∈ [2,∞>, la respuesta es **a**

(36) Si f: <-∞,1] → [2,∞> es una función decreciente (estrictamente decreciente) y suryectiva tal que: $f(x)=\frac{ax+b}{2}$, ∀ x ≤ 1 y f(0) = -a, hallar a + b

a) 4 b) 8 c) 10 d) 12 e) 15

Desarrollo

Como la función f: <-∞,1] → [2,∞> es suryectiva entones $R_f = [2,\infty >$, además

$f(x)=\frac{ax+b}{2}$ y f(0) = -a, x ≤ 1

$f(0)=\frac{0+b}{2}=-a$ ⇒ b = -2a

Luego $y=f(x)=\frac{ax+b}{2}=\frac{ax-2a}{2}$, $D_f =< -\infty,1]$

Como $R_f \geq 2$ ⇒ $\frac{ax-2a}{2} \geq 2$ ⇒ ax ≥ 4 + 2a

De aquí, si a < 0 ⇒ $x \leq \frac{4+2a}{a}$ pero como x ≤ 1

Se concluye que $\frac{4+2a}{a}=1$ ⇒ **a = -4**, b = -2a = 8

Luego a + b = -4 + 8 = 4, la respuesta es **a**

(37) Sea $f(x)=x^2-1$, una función cuyo dominio es: $D_f = [-4,-2] \cup [-1,1]$. Hallar R_f

a) [-1,15] b) [-1,0] ∪ [3,15] c) [-1,1] ∪ [3,15] d) ⊂ [-1,15> e) ⊂[-3,15>

Desarrollo

A partir del D_f obtendremos $f(x) = x^2 - 1$

$x \in D_f \Rightarrow -4 \le x \le -2 \vee -1 \le x \le 1$, elevando al cuadrado

$\Rightarrow 4 \le x^2 \le 16 \vee 0 \le x^2 \le 1$, restando 1

$\Rightarrow 3 \le x^2 - 1 \le 15 \vee -1 \le x^2 - 1 \le 0$

$\Rightarrow -3 \le f(x) \le 15 \vee -1 \le f(x) \le 0$

$\Rightarrow f(x) \in [3,15] \vee f(x) \in [-1,0]$

$\Rightarrow f(x) \in [-1,0] \cup [3,15]$

$\therefore \quad R_f = [-1,0] \cup [3,15]$, la respuesta es **b**

(38) Sea $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si \ x \le 1 \\ x^2 - 1 & si \ x > 1 \end{cases}$, calcular f(2 + h), si $|h| < 1$.

a) $3h - 1$ b) $3h + 5$ c) $h^2 + 4h + 3$ d) $h^2 - 4h + 3$ e) $h^2 + 3$

Desarrollo

Como $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si \ x \le 1 \\ x^2 - 1 & si \ x > 1 \end{cases}$, luego hallamos f(2 + h)

$f(2+h) = \begin{cases} 3(2+h)+1 & si \ 2+h \le 1 \\ (2+h)^2 - 1 & si \ 2+h > 1 \end{cases}$, simplificando

$f(2+h) = \begin{cases} 3h+7 & si \ h \le -1 \\ h^2 + 4h + 3 & si \ h > -1 \end{cases}$, de aquí se tiene

$f(2+h) = h^2 + 4h + 3$ si $h > -1$, o también: $f(2+h) = h^2 + 4h + 3$, si $|h| < 1$

por lo tanto la respuesta es **c**

(39) Sea F una función constante con dominio los números reales, tal que: $\frac{F(3)+F(2)}{F(5)-3}=8$, calcular E = F(1997) + F(1998) + 2

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Desarrollo

Como F es función constante $\Rightarrow$ F(x) = k, k es constante

Por lo tanto F(3) = k ; F(2) = k ; F(5) = k

Como $\frac{F(3)+F(2)}{F(5)-3}=8 \Rightarrow \frac{k+k}{k-3}=8 \Rightarrow 2k=8(k-3)$

$k=4(k-3) \Rightarrow k=4k-12$ de donde $3k=12 \Rightarrow k=4$

Luego F(x) = 4 de donde F(1997) = 4 , F(1998) = 4

Entonces E = F(1997) + F(1998) + 2 = 4 + 4 + 2 = 10

Por lo tanto la respuesta es **c**

(40) Calcular el rango de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1\ , & x<3 \\ \sqrt{x-3}\ , & x\geq 3 \end{cases}$

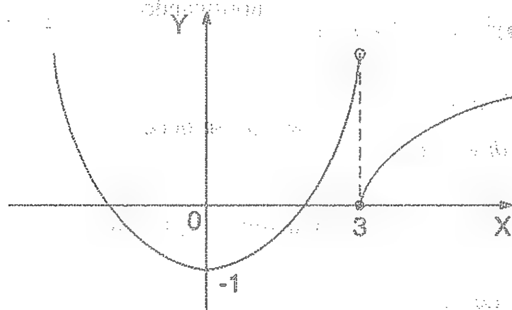
a) [-3,∞> b) <-∞,-2] c) [-3,3] d) [-1,∞> e) <-∞,∞>

Desarrollo

Una de las formas de hallar el rango de esta función es graficando la función f(x)

Si $x<3 \Rightarrow f_1(x)=x^2-1 \Rightarrow y+1=x^2$, V(0,-1)

$x\geq 3 \Rightarrow f_2(x)=\sqrt{x-3}$



$R_{f_1} = [-1, \infty >$ y $R_{f_2} = [0, \infty >$, de donde

$R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} = [-1, \infty > \cup [0, \infty > = [-1, \infty >$, por lo tanto la respuesta es **d**

22.21. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Sea A = {1,2,3,4,5,6,7} y $R = \{(x, y) \in A^2 / x + y \neq 8\}$, calcular n(R)

a) 42 b) 90 c) 49 d) 35 e) 7

(2) Si A = {5,6,7} se define en A^2 las relaciones $R_1 = \{(x, y) / (x + y)$ es un número primo$\}$, $R_2 = \{(a, b) / a\,x\,b$ es impar$\}$ calcular $n(R_1\, x\, R_2)$

a) 20 b) 16 c) 14 d) 18 e) 10

(3) Si A = {4,5,7,13}, R = {(a,2a – 1),(3b – 2,b)}, calcule el máximo valor de "a + b" si R es una relación de A en A.

a) 10 b) 8 c) 9 d) 12 e) 13

(4) Sean A = {1,2,3,5}, B = {4,6,8,9} y la relación R = {(x,y) ∈ AxB / x + y es par}, calcule n(R).

a) 3 b) 7 c) 8 d) 6 e) 9

(5) Dados los conjuntos: A = {x / x es par, 0 < x < 25}, B = {x / x es N; 25 < x < 50} se define R ⊂ AxB, siendo $R = \{(a, b) / a.b = \overset{o}{9} \wedge a.b = \overset{o}{7}\}$, determine n(R)

a) 61 b) 73 c) 80 d) 36 e) 72

(6) Dados los conjuntos M = {5x – 1 / x ∈ N; 1 < x < 8}, N = {9y + 2 / y ∈ N; 3 < y < 8} se define R ⊂ MxN, donde R = {(a,b)/a y b dejan el mismo resto al ser dividido entre 7}. Determine la suma de los términos del rango.

a) 205 b) 206 c) 594 d) 410 e) 204

(7) Si R es una relación en A = {2,3,9} tal que: $R = \{(x, y) \in AxA / y + 1 \leq x^2\}$, halle n(R)

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

(8) Sea A = {n ∈ N / n < 6} donde N = {1,2,3,...} es una relación en A tal que R = {(x,y) ∈ AxA / x + y ≤ 6} calcule la suma de elementos del rango de R.

a) 6 b) 7 c) 9 d) 15 e) 14

(9) Dado el conjunto $A = \{x / x \in Z^+,\ 8 \leq x \leq 30\}$ en A^2 se define la relación R = {(a,b) / M.C.D(a,b) = 5}, calcule n(R)

a) 9 b) 10 c) 12 d) 16 e) 23

(10) ¿Cuál de las siguientes relaciones son de equivalencia?

I) R = {(a,b) / a es paralela a b}

II) R = {(A,B) / A ⊂ B, A,B conjuntos no vacíos}

III) $R = \{(a,b) / a - b = \overset{o}{n},\ a,b \in Z\}$, ($\overset{o}{n}$ múltiplo de n)

a) solo I b) solo II c) solo III d) solo I y II e) todos

(11) Se define una relación R, en el conjunto Z^+, donde $R = \{(a,b) \in Z^+ x Z^+ / a + b = \overset{o}{2}\}$ indique la proposición verdadera respecto a la relación R.

a) solo es reflexiva b) solo es simétrica c) solos es transitiva

d) es de equivalencia e) solo reflexiva y simétrica

(12) Dado $M = \{(\frac{3x+2}{5}) \in Z / 2 < x < 7\}$ se define R de M en M tal que: R = {(a,b) ∈ MxM / a + b > 5}, decir si R es:

I) reflexiva II) simétrica III) transitiva

a) solo II b) solo I c) solo III d) I y II e) II y III

(13) Dado el conjunto A = {2,5,8} se define la relación R de A en A tal que: R = {(b,b),(5,5),(8,8),(b,8),(c,b)(c,x),(x,c)} es reflexiva y simétrica, donde x es impar, determinar b + c + x

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 15

(14) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Sea A={1,2,3,4} y R una relación en A; R={(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(4,4)} es reflexiva

II) La relación R = {(x,y) / x, y son triángulos semejantes} R es de equivalencia.

III) A = {1,2,3,4} y R una relación en A; R = {(1,2),(3,4),(2,1),(3,3)} es simétrica

a) VVV b) FVF c) FFV d) VFV e) FFF

(15) Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Sea A = [-1,1] y la relación R en A; $R = \{(x,y)/x^2 = y^2\}$ es de equivalencia

II) Si R y S son relaciones transitivas entonces $R \cap S$ es transitiva.

III) Si R es transitiva entonces R^{-1} es transitiva.

a) VFV b) FVF c) VVV d) VFF e) FVV

(16) Se define las siguientes relaciones en Z: $R_1 = \{(x,y)/x.y \text{ es par}\}$, $R_2 = \{(x,y)/x + y^2 = y + x^2\}$, $R_3 = \{(x,y)/x \le y\}$ de las siguientes afirmaciones ¿Cuáles son verdaderas?

I) R_1 y R_2 son reflexivas

II) R_2 es simétrica y R_3 no es simétrica

III) R_2 es transitiva

IV) R_3 es transitiva

a) FVVV b) VFFF c) FVVF d) VVFF e) FVVF

(17) Sea R la relación definida en los números naturales por: $R = \{(x,y) \in N^2 / x + y = 12\}$ ¿Cuántas son verdaderas?

I) R es reflexiva

II) R es simétrica

III) R es transitiva

IV) R es de equivalencia

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(18) Sea A = {0,1,2,3,4,5} si R_1, R_2, R_3 subconjuntos de AxA, definimos $R_1 = \{(x,y)/x + y = 5\}$, $R_2 = \{(x,y)/x = y\}$, $R_3 = \{(x,y)/x^2 = y\}$ entonces $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$ es:

a) $\{(1,1),(2,4)\}$ b) $\{(0,0),(1,1)\}$ c) $\{(1,1),(2,4)\}$

d) $\{(2,1),(1,4)\}$ e) ϕ

(19) Si $R_1=\{(x,y)\in R^2 / y-x=6\}$, $R_2=\{(x,y)\in R^2 / y+x=8\}$, calcular el producto de los componentes de los elementos de $R_1\cap R_2$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(20) Dados los conjuntos $A=\{x\in R / x^2=8-2x\}$, $B=\{x\in R / x^3=2x^2+3x\}$ el numero de posibles relaciones de A en B es:

a) 8 b) 16 c) 32 d) 64 e) 128

(21) Dado el conjunto A = {1,2,3,4} y las relaciones en A:

$R_1=\{(-1,2),(2,3),(2,1),(3,4),(3,2),(4,3),(3,3)\}$, $R_2=\{(x,y)/ x^2+y^2=5\}$,

$R_3=\{(x,y)/ y=x-2\}$ ¿Cuáles son simétricas?

a) $R_1\wedge R_3$ b) R_3 c) R_2 d) R_1 e) $R_1\wedge R_2$

(22) Dado el conjunto A = {1,2,3,4} y las relaciones en A

I) $R_1=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

II) $R_2=\{(x,y)/ x^2+y^2=5\}\cup\{(1,1)\}$

III) $R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3)\}$, indicar las relaciones transitivas

a) II b) I y III c) I y II d) II y III e) I,II,III

(23) Dado el conjunto: A ={2,4,6} y las relaciones en A: $R_1=\{(2,2),(2,4),(4,4),(6,6),(4,2)\}$, $R_2=\{(x,y)/ y-x=0\}$, $R_3=\{(x,y)/ y-2=x\}$ ¿Cuáles son relaciones equivalentes?

a) R_1 y R_2 b) R_1 y R_3 c) R_2 y R_3 d) R_2 e) R_3

(24) Dados dos conjuntos A = {2,3,4}; B = {5,6} ¿Qué alternativa no es relación de A en B?

a) $\{(2,5)\}$ b) $\{3,6\}$ c) $\{(2,6),(1,5)\}$ d) $\{(4,5),(4,6)\}$ e) $\{(2,5),(3,5),(3,6)\}$

(25) Dados los conjuntos A = {3,5,7}; B = {2,4,6} se definen las relaciones $R_1 = \{(x,y) \in AxB / x + y = 9\}$, $R_2 = \{(x,y) \in AxB / y = 4\}$ calcule $D_{(R_1 - R_2)}$

a) {7} b) {5} c) {3,7} d) {3,5,7} e) {5,7}

(26) Dado el conjunto A = {2,3,4} se tiene la relación reflexiva R en A R = {(2,a),(2,3),(b,4),(3,c),(3,2)} calcule a + b + c

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

(27) Dado A = {2,3,5} y R sea una relación de A en A, tal como R = {(2,3),(3,2),(2,2),(5,5)} se dice que:

a) R es reflexiva b) R es simétrica c) R es transitiva

d) R es de equivalencia e) b) y c)

(28) Sea A = {1,2,3,4,5} y $R_1 = \{(x,y) / x < y\}$, $R_2 = \{(x,y) / x + y = 6\}$ dos relaciones en A, hallar $D_{R_1 \cap R_2}$

a) {1,2} b) {1,2,3} c) {1,2,3,4} d) {2,3} e) {3,4}

(29) Calcule la suma de los elementos del rango de R, si R = {(a,b) ∈ NxN / 1 < a < b < 6}

a) 19 b) 14 c) 13 d) 12 e) 11

(30) Sea R una relación definida en el conjunto de los números enteros positivos tal que: $R = \{(a+1, a-1) / a^2 < 50\}$ calcule cuantos elementos de R tiene como suma de sus coordenadas a un numero que sea mayor que 8.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 9

(31) Si A = {3,4,5,6,7,8,9}, además R ⊂ AxB tal que (x,y) ∈ R si "x" es divisor de "y", calcular n(R).

a) 4 b) 8 c) 10 d) 32 e) 36

(32) Si A = {2n + 1 / n ∈ Z, 3 < n < 10}, B = {1,2,3,4,5}. Si R = {(x,y) ∈ AxB / "y" es el número de divisores positivos de x}. Dar como respuesta la suma de los elementos diferentes del rango.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

(33) Determinar el rango y graficar la función $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & si \quad x<4 \\ 5x-2 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$

a) [-9,∞> b) <-∞,-9] c) [-9,9] d) [9,∞> e) <-∞,9]

(34) Dadas las funciones $f(x)=-x^2+3x+1$; $g(x)=3x^2+2x+1$, Hallar $R_f \cap R_g$

a) [3,13] b) [2,3] c) $[\frac{2}{3},\frac{13}{4}]$ d) [4,13] e) [2,13]

(35) Dada la función f: [-3,3] →[1,4> tal que $f(x)=x^2-2x+1$. Hallar su dominio.

a) <-3,1> b) [-1,0> ∪ [2,3> c) <-3,2] ∪ [3,4> d) <0,5> e) <-3,0>

(36) Hallar el rango de la función $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$

a) <-∞,1> b) <1,∞> c) <-1,1> d) [-2,2] e) [-3,3]

(37) Hallar el rango de la función $f(x)=x^2+2x+3$

a) <-∞,5] b) [5,∞> c) <-1,5] d) R e) [-5,0]

(38) Sea la función $f(x)=\frac{2x+7}{-x-3}$, cuyo dominio es $D_f=<-\infty,-3>\cup<-3,1>$. Hallar el rango de la función f.

a) $<-\infty,-\frac{9}{4}>\cup<-2,\infty>$ b) <-∞,0> c) <0,∞> d) $[-\frac{9}{4},-2]$ e) [-9,8]

(39) Calcular el rango de $f(x)=\frac{x^2}{2x^2+1}$

a) [0,∞> b) $<\frac{1}{2},1>$ c) $[0,\frac{1}{2}>$ d) $<0,\frac{1}{2}>$ e) <0,1>

(40) Sea f: [-2,4> → R tal que $f(x)=\frac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$. Hallar el rango de f

a) [-3,1] b) $[-\frac{3}{5},1]$ c) [1,5] d) [-3,5] e) [-2,4]

(41) Si $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$; $-1 \le x \le 1$, hallar el rango de f

a) [-1,0] b) [-1,3] c) [0,3] d) $[-\frac{1}{3},0]$ e) [-1,0]

(42) Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=|2x|$ hallar el rango de $f-g$.

a) [0,∞> b) [8,∞> c) [2,∞> d) [3,∞> e) <-1,∞>

(43) Hallar el dominio de la función: $f(x)=3+\sqrt{\frac{|x+1|-1}{|x+7|-2}}$ si

$D_f =<-\infty,a]\cup[b,c>\cup<d,\infty>$, hallar a + b + c + d

a) 14 b) 7 c) 3 d) 12 e) 10

(44) La siguiente función $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+8x+16}$ es constante en [a,b] calcular a + b

a) -2 b) -3 c) -5 d) -9 e) -11

(45) Dadas las funciones $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ y $g(x)=\frac{1}{1+\sqrt[4]{10+x}}$. Hallar $D_f \cap D_g$

a) <-10,∞> - {-1,1} b) <-10,-1> c) <-1,1> d) <-1,∞> e) <-∞,-10>

(46) Hallar el rango de la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}-x^2$

a) <-1,1> b) <-1,1] c) [-1,1] d) [-1,1> e) <-1,∞>

(47) Halle el rango de la función $f: D_f \to R$, tal que: $f(x)=\frac{(x^2-4)(x+3)}{x^2+x-6}$, si $D_f =<-3,3]-\{2\}$

a) <-1,5> b)<-1,5] c) <-1,-5] − {4} d) <-1,4> e) <-1,4> ∪ {5}

(48) El rango de la función $f(x)=\dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x-2}}$; x > 2

a) <0,4] b) <0,1] c) <0,2] d) <1,2] e) <1,4]

(49) Halle el rango de la función si: $f(x)=\begin{cases} 2x-f(x)\ ; & x\geq 1 \\ xf(x)-x+1\ ; & x<1 \end{cases}$

a) <-1,0> b) <-∞,-100] c) [-50,-20> d) <0,1] e) [1,∞>

(50) Sea " f " la función real de variable real cuya regla de correspondencia es: $f(x)=2^{2-x^2}+\dfrac{1}{4^{x^2}}$, luego halle: $D_f \cap R_f$

a) R b) R^+ c) <0,5] d) <0,5> e) [0,4]

(51) Indicar el dominio de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{3-x}$

a) <0,1] b) [-2,0> c) [0,2] d) [-2,3] – {0} e) <-2,3> ∪ {0}

(52) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1\ ; & -3<x<2 \\ 5\ ; & x\geq 2 \end{cases}$ encuentre el rango de la función "h" dado por h(x) = 2 – f(2 – x).

a) <-∞,1] b) [-8,1> c) [-1,8> d) <-8,1] e) <-1,1>

(53) Halle el dominio de la función f: A → B tal que $f(x)=x^2-x+1$ si el rango es $[\frac{3}{4},1]$

a) [0,1] b) <0,1> c) <-2,3> d) <4,8> e) <-4,4>

(54) Sea f una función real de variable real $f:<-\frac{1}{2},0>\to<-6,9]$ tal que f(x) = ax + 1. Determinar el valor real positiva de "a" para que el rango de f sea <-1,1>

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(55) Determine el rango de la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) <-1,1> b) [1,∞> c) <-1,1] d) <1,∞> e) [-1,∞>

(56) Determine el rango de la siguiente función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

a) <-∞,∞> b) R – {0} c) <0,1] d) [1, ∞> e) [0, ∞>

(57) Calcular el rango de la siguiente función $f(x)=\dfrac{2}{x^2+x+1}$

a) <3,5> b) <-2,7] c) [3,9> d) $<0,\frac{8}{3}]$ e) <-5,7]

(58) Determine el rango de la siguiente función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; x ∈<-1,1>

a) $<\frac{1}{2},\infty>$ b) R c) <-1,2> d) $<0,\frac{1}{2}>$ e) $<-\infty,\frac{1}{2}>$

(59) Sea f una función para los cuales $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, donde $D_f =<-\infty,-1>\cup<1,\infty>$, hallar R_f

a) $<\frac{1}{2},\infty>$ b) $<\frac{1}{2},1>\cup<1,\infty>$ c) R d) <0, ∞> e) <-1, ∞>

(60) Dada la función $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{8-x}+2x^2$, cuyo $D_f=[a,b]$ indique el valor de $\dfrac{ab}{a+b}$

a) 1.2 b) 1.4 c) 1.6 d) 1.8 e) 2.4

(61) Si el rango de la función decreciente $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$ es $<\frac{27}{8},6>$ su dominio es <3,10>. Halle b + a.

a) 0 b) 10 c) 15 d) 16 e) 17

(62) Halle el rango de f, siendo $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$

a) $[0,\sqrt{2}]$ b) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ c) [-2,2] d) [-3,3] e) [0,3]

(63) Halle el rango de f: <-1,1> $\to$ R definida por $f(x)=\frac{1}{x+1}$

a) <1,2> b) <1, ∞> c) $<\frac{1}{2},\infty>$ d) $<\frac{1}{2},2>$ e) $<\frac{1}{2},1>$

(64) Al graficar las funciones $f(x)=x^2-4x+5$; $g(x)=-6x-x^2+10$ calcular $R_f\cap R_g$

a) [1, ∞> c) <-∞,9] c) [1,19] d) [1,9] e) [-5,15]

(65) Dada la función f tal que f(x) = | x + 3 | - | x – 3 | cuyo rango es [a,b], calcule a + b

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

(66) Halle el rango de f(x) = | 2x + 3 | + | x | + | 2x – 1 |

a) [4, ∞> b) <0, ∞> c) <2,11> d) <4,11> e) [11,∞>

(67) Determine el rango de la función $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, donde $D_f=[-2,3]-\{-1\}$

a) $<-3,\frac{1}{2}]$ b) R – {1,2} c) $R-<-3,-\frac{1}{2}>$ d) <-∞,-3> e) <3, ∞>

(68) Al graficar las funciones f(x) = | 2x – 1 | + 3; g(x) = | x + 3 | - 2, halle R_g-R_f

a) <-∞,-2] b) [-2,3> c) <-2,3> d) [2, ∞> e) [-2,2]

(69) Si la función $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$ es constante ∀ x∈ [a,b], calcule "a + b"

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

(70) Hallar el dominio de $f(x)=\sqrt{-\frac{|x-3|-5}{|x-3|+5}}+\frac{5}{9-x^2}$

a) [-2,8] – {3} b) [-2,3> c) <3,8] d) <-∞,3> e) [8, ∞>

(71) Halle el dominio de $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) <-2, ∞> b) <0, ∞> - {2} c) <-∞,0> d) <0,2> e) <-2,2>

(72) Halle el rango de f: <-1,3> → R, si $f(x)=\sqrt{7+x^2}$

a) <4,7] b) [3,4] c) $[\sqrt{7},4>$ d) $[\sqrt{5},3]$ e) $[\sqrt{6},\sqrt{10}]$

(73) Halle el rango de $f(x)=x^2 sig(\dfrac{2+x}{2-x}-3)$

a) <-∞,0] ∪ <1,2> b) <-∞,1> c) <0,2> d) <-∞,2> e) <1,2>

(74) Halle el rango de la función $f(x)=\left[\!\left[\dfrac{7x-15}{x-1}\right]\!\right]$, x ∈ <-1,0>

a) {11,12,13,14} b) {9,10,11,12} c) {7,8,9,10} d) {11,14} e) {7,9,11}

(75) Determine el rango de: $f(x)=\left|x^2\left[\!\left[\dfrac{5-x}{2}\right]\!\right]-4\right|$, si x ∈ <1,3]

a) [0,3] b) [0,4] c) [0,5] d) [0,6] e) [0,7]

(76) Halle el rango de $f(x)=\sqrt{4-x^2}-x^2+|x|-\dfrac{1}{4}$

a) $[-\dfrac{9}{4},5]$ b) $[-\dfrac{9}{4},\dfrac{\sqrt{15}}{2}]$ c) [-9,15] d) [-4,9] e) [0,4]

(77) Hallar el rango y graficar la función $f(x)=\sqrt{x-[\![x]\!]}$

a) [0,1> b) {0,1} c) <0,2] d) [0,2> e) [1,3]

(78) Hallar el rango y la grafica de $f(x)=x+[\![x]\!]$, -1 ≤ x ≤ 2

a) [-2,-1> ∪ [0,1> ∪ [2,3> b) [-2,-1> ∪ {2,3} c) <-1,2>

d) [-2,3> e) [-2,0]

(79) Si $f(x)=x^2-3x+5$, al calcular el valor de f(x + 2) – f(x – 2) se obtiene:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 2x – 3 e) 8x– 12

(80) Sea f una función real creciente definida por f(x) = ax + b, tal que f([1,2]) = [107,901], calcular a – b.

a) 1481 b) 1008 c) 794 d) 687 e) 1381

(81) Sea f una función de proporcionalidad tal que: f(3) + f(7) = 20, entonces el valor del producto $f(\frac{21}{5}).f(5).f(7)$ es:

a) 147 b) 1470 c) 1170 d) 1716 e) 1176

(82) Dada la función f(x) = ax + b, cuya grafica pasa por el punto (-2,-1) y tiene un único punto de contacto con el grafico de la función $g(x)=-x^2+3$. El producto de "a" por "b" es:

a) 22 b) 24 c) 26 d) 28 e) 30

(83) Hallar los valores de a y b para que el conjunto de pares ordenados sea una función $f=\{(1,8),(2,-3),(1,a^2+b^2),(-1,a+b),(a^2+b,b),(b+a^2,b)\}$ dar como respuesta el producto a.b

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(84) Hallar los valores de a y b para que el conjunto de pares ordenados sea una función $f=\{(4,3),(-5,-3),(4,a^2-b^2),(-5,a+b),(a^2+b,a),(a^2+b^2,b)\}$ dar como respuesta a la suma de a + b.

a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 0

(85) Si $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(-1)+f(\frac{1}{2})=\frac{15}{2}$, f(-1) = 0 y f(1) = 8, hallar f(5).

a) 56 b) 66 c) 76 d) 86 e) 96

(86) Si f es una función real de variable real tal que $f(x+2)=x^2+x$, calcular $\dfrac{f(a+3)-f(a-3)}{2a-3}$, $a\neq\dfrac{3}{2}$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

(87) Si f es una función real de variable real tal que $f(x+1)=x^2+3$ calcular $\dfrac{f(a+1)-f(1)}{a}$, $a\neq 0$.

a) a b) a + 2 c) 5a d) 3a + 1 e) 2a + 1

(88) Sea f una función real de variable real definida por f(x)= mx + b tal que 2f(2) + f(4) = 21 y f(-3) – f(1) = -16, hallar el valor de $\dfrac{1}{3}f(1)$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{3}{2}$ e) 1

(89) Sea f la función tal que: $f(x)=\begin{cases} x^2 & , si\ 0\le x<2 \\ 2x+1 & , si\ 2\le x<5 \end{cases}$. Si $1\le x<\dfrac{3}{2}$, hallar el valor de $f(2x-1)-f(2x^2)$

a) x b) 2x c) 3x d) -4x e) -5x

(90) En A = {-2,2,3,4}, se definen las funciones $f=\{(3,a^2),(2,3),(a,2),(3,4),(4,-2)\}$ y g(x) = mx + n. Si f(2) = g(3) y f(3) = g(2), calcular la suma de los elementos del rango de g.

a) 11 b) 17 c) 21 d) 12 e) 13

(91) Si la función: $f(x)=ax^2-bx+c$, verifica f(1) = 0 ∧ f(-1) = 6 y f(0) = 1, calcular f(f(2)).

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

(92) Si se cumple la relación: $xF(x)-(2n+1)x^2=nx[\dfrac{F(x)}{x}-2x]-n^2$, ∀ x ∈ R – {0,n}. Hallar F(-x) + F(x – n) + F(-x + n)

a) 3n – x b) 3n + 2x c) x – 2n d) -3x e) 2x

(93) Si se cumple la relación: F(x) = F(x – 1) + F(x – 2), además F(1) = 3 y F(0) = 5, Hallar "n" en: F[-F(-1)] + n = F(3)

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(94) Dadas las funciones reales de variable real $f(x)=3x^2-12x-15$, $g(x)=-x^2+4x-3$ y los conjuntos A = {x∈R / f(x) > 0}, B = {x∈R / g(x) > 0} el complemento de A ∪ B es:

a) [0,1] ∪ [2,5] b) [-1,1] ∪ [3,5] c) [0,1] ∪ [5, ∞>

d) [1,31] e) <-∞,1] ∪ [5,8>

(95) Sean f: R → R y g: (R – {0}) →R funciones definidas por: f(x) = mx + 12, m ≠ 0, $g(x)=\frac{2}{x}$ ¿Para que valores de m las funciones f y g admiten dos puntos de intersección.

a) $<-\frac{1}{2},\infty>$ b) $<-\frac{1}{18},0>\cup<0,\infty>$ c) $<-\infty,-\frac{1}{18}>$

d) <-∞,∞> e) $<-\frac{1}{18},\frac{1}{18}>$

(96) La función F, que para todo x diferente de 0; 1 y –1, satisface a la ecuación $[F(x)]^2.F(\frac{1-x}{1+x})=64x$ (sug. $z=\frac{1-x}{1+x}$) es:

a) $F(x)=4(\frac{x^2(1+x)}{1-x})^{\frac{1}{3}}$ b) $F(x)=2(\frac{x^2(x+1)}{x-1})^{\frac{1}{3}}$

c) $F(x)=4(\frac{x(1+x)}{1-x})^{\frac{1}{3}}$ d) $F(x)=4\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}$

e) $F(x)=4\sqrt{\frac{x(1+x)}{1-x}}$

(97) Sabiendo que: F = {(1,2),(2,x),(3,x + y),(1,x + 1),(3,-y)} es una función, calcular 5x + 4y

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(98) Halle $f(x-5)$ si $xf(x)-11x^2=5x(\frac{f(x)}{x}-2x)-25$

a) x b) -x c) 5 d) x − 10 e) x + 10

(99) $f(x)=1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+...$, halle $f(\frac{1}{2})$

a) 6 b) 4 c) 2 d) 1 e) infinito

(100) Definimos $P(x)=\begin{cases} x-3 \ , \ x\geq 100 \\ P(P(x+5)) \ , \ x<100 \end{cases}$, calcule P(P(100))

a) 96 b) 100 c) 98 d) 102 e) 200

(101) Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases} x-3 \ , \ x\in<-4,8] \\ x^2+2x \ , \ x\in<8,15] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x+4 \ , \ x\in[4,12> \\ 1 \ , \ x\in[12,16> \end{cases}$

calcular E = (f + g)(10) + (f + g)(12) − (f + g)(6)

a) 282 b) 276 c) 286 d) 279 e) 288

(102) Sean las funciones f(x)=2x−5, x ∈ [0,6] $g(x)=\begin{cases} x^2-2x \ , \ x\in[-1,2] \\ \sqrt{x} \ , \ x\in<2,4] \end{cases}$. Hallar (f + g)(x)

a) $f(x)+g(x)=\begin{cases} x^2+x-5 \ , \ x\in[0,2] \\ 3x+\sqrt{x}-5 \ , \ x\in<2,4] \end{cases}$ b) $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2+x+5 \ , \ x\in[0,2] \\ 3x-\sqrt{x}+5 \ , \ x\in<2,4] \end{cases}$

c) $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2+x-5 \ , \ x\in[0,3] \\ 3x+\sqrt{x}-5 \ , \ x\in<4,5] \end{cases}$ d) $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2-x+5 \ , \ x\in[0,2] \\ 3x+\sqrt{x}+5 \ , \ x\in<2,4] \end{cases}$

e) $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2-5 \ , \ 0\leq x\leq 2 \\ 2x+\sqrt{x}-5 \ , \ 2<x<4 \end{cases}$

(103) Si $g=\{(-2,0),(-\frac{1}{2},3),(2,2),(3,-1),(\frac{4}{3},2),(5,0)\}$, $h(x)=x^2+1$, x ∈ Z. Hallar $h+g^2$

a) {(-2,5),(2,9),(3,11),(5,26)} b) {(2,5),(-2,9),(11,3),(5,26)}

c) {(-1,5),(2,9),(-3,11),(5,-26)} d) {(2,5),(-2,9),(11,3),(5,26)}

e) {(5,1),(9,2),(11,3),(26,5)}

(104) Dadas las funciones: $f(x)=2x^2+x-5$, $x \in \langle -2,3\rangle$; $g(x)=x^2+2x+3$, $x \in \langle 1,5\rangle$ encontrar el rango de f + g

a) <-1,3>   b) <-3,1>   c) $\langle -2,\frac{1}{4}]$ d) [-2,0>   e) $[0,\frac{1}{4}]$

(105) Si $f(x)=x^2-3x$, $x \in \langle -2,5\rangle$; $g(x)=x^2-1$, $x \in \langle -1,8\rangle$. Hallar (f + g)(3) + (f.g)(2)

a) -6   b) -4   c) 2   d) 4   e) 6

(106) Dada la función f: R → R, donde $f(x)=\begin{cases} 2x+a^2-b^2 & , x \geq 3 \\ 2x+b^2-a^2 & , x<3 \end{cases}$, hallar f(3) + f(2)

a) 10   b) 8   c) 6   d) 4   e) 2

(107) Sea $P(x)=ax^2+bx+c$, P(1)=0 ∧ P(2)=0 ∧ P(3)=0, calcular P(a+b) + P(b+c) + P(a+c)

a) 0   b) 1   c) 2   d) 3   e) 4

(108) Dadas las siguientes funciones $f=\{(\frac{1}{2},2),(0,4),(3,9),(7,-2),(-5,-3)\}$,

$g=\{(0,-6),(-3,5),(7,4),(-5,1),(\frac{1}{2},0)\}$, halle (f + g) ∩ (f − g)

a) (0,-2)   b) $(\frac{1}{2},2)$ c) ϕ   d) {(-5,-3)}   e) $\{(\frac{1}{2},2)\}$

(109) Halle (f + g)(3); si f(x) = x + 1, x ∈ R, $g(x)=\begin{cases} 2x-3 & , 5 \leq x \leq 3 \\ 3-x^2 & , 3<x \leq 7 \end{cases}$

a) 3   b) 5   c) 7   d) 9   e) 11

(110) Dadas las funciones: f = {(3,4),(7,8),(9,b)}, b > 0, g = {(1,c),(c,a),(7,16),(10,a + 1)};

$h=\{(3,2),(7,b^2)\}$, tal que $\frac{f^2}{g}=h$, calcule a + b + c

a) 7   b) 9   c) 11   d) 13   e) 15

111 Dadas las funciones: f = {(1,2),(2,-3),(-3,1)}, g = {(2,b),(1,2),(-3,a)} si g o f = f – g, calcule a + b

a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 0

112 Sea f la función definida por $f(x)=\sqrt{x-3}$ y la función g = {(-3,0),(4,2),(5,1),(7,0)}, hallar $\frac{f}{g^2}$

a) $\{(4,\frac{1}{4}),(5,\sqrt{2})\}$ b) $\{(1,4),(3,\sqrt{3})\}$ c) $\{(2,5),(\sqrt{2},4)\}$

d) $\{(1,5),(5,\sqrt{3})\}$ e) $\{(2,4),(\sqrt{2},\sqrt{3})\}$

113 Dadas las funciones: f = {(2,0),(4,1),(-3,11),(0,3),(3,8)}, g(x) = 2x – 1, x ∈ <0,10], hallar f^2+g y dar como respuesta la suma de los elementos del rango de f^2+g

a) 61 b) 48 c) 70 d) 80 e) 16

114 Sean $f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 1 \\ x-2 & , x<0 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} x^2 & , x<1 \\ x-3 & , x\geq 1 \end{cases}$, enconurar $\frac{f}{g}$

a) $(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{x^2} & , x<0 \\ \frac{x}{x-3} & , x\geq 1 \wedge x\neq 3 \end{cases}$

b) $(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} \frac{x+3}{x} & , x<0 \\ \frac{x}{x+1} & , x\geq 1 \wedge x\neq 3 \end{cases}$

c) $(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x^2} & , x<0 \\ \frac{x}{x+3} & , x\geq 0 \wedge x\neq 3 \end{cases}$

d) $(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} \frac{x^2+1}{x} & , x<0 \\ \frac{x-3}{x} & , x\geq 1 \wedge x\neq 3 \end{cases}$

e) $(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} \frac{x+5}{x^2} & , x<0 \\ \frac{x}{x+5} & , x\geq 1 \wedge x\neq -5 \end{cases}$

(115) Dadas las funciones: $f(x)=x^2-5x+5$, $g(x)=-2x+\frac{5}{3}$ indique el dominio de H(x) donde $H(x)=\frac{f^3(x)-4g(x)}{f(x)+3g(x)}$

a) R – {1} b) R – {10} c) R – {1,10} d) R – {1,2} e) R – {2,3}

(116) Halle $D_{(f+g)}\cap R_{(f+g)}$ si $f(x)=\begin{cases} g(x) \ , \ x\in <-1,2> \\ x^2+2 \ , \ x\in [2,\infty > \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} h(x) \ , \ x\in <-\infty,-1> \\ 2x-1 \ , \ x\in <2,\infty > \end{cases}$

a) <1, ∞> b) <2, ∞> c) <7, ∞> d) <9, ∞> e) R

(117) Dada $f(x)=\sqrt{1-x}$; $g(x)=\sqrt{-x^2+4}$, halle h = g o f

a) $h(x)=\sqrt{x+3}$, x ∈ {-3,1} b) $h(x)=\sqrt{x-3}$, <-3,1>

c) $h(x)=\sqrt{x+3}$, x ∈ [-3,1] d) $h(x)=\sqrt{x-3}$, x ∈ {-3,1} e) no existe

(118) Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ ∧ g(x) = 2x + 3, halle $D_{fog}\cap R_{fog}$

a) [-3, ∞> b) [0, ∞> c) <0,1> d) <0,3> e) <-3,3>

(119) Si $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$, $(f\circ g\circ h)(x)=\sqrt{2x^2-1}$, hallar h(1) + h(2)

a) 1 b) $\sqrt{7}$ c) $1+\sqrt{7}$ d) $1-\sqrt{7}$ e) 2

(120) Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$; x ∈ <6,13>, $g(x)=x^2-6x+6$; $x\in <4,\frac{13}{2}>$ halle el complemento del dominio de (f o g)(x)

a) <-∞,6] b) $[\frac{13}{2},\infty>$ c) $<-\infty,6]\cup[\frac{13}{2},\infty>$ d) $[6,\frac{13}{2}]$ e) [2,13]

(121) Si $f(x)=\begin{cases} x^2 \ , \ x\in [5,9> \\ \sqrt{x} \ , \ x\in [10,16> \end{cases}$, g(x) = x + 5, x ∈ [1,12], halle (f o g)(x)

a) $(f\circ g)(x)=\begin{cases} (x+5)^2 \ , \ x\in [1,4> \\ \sqrt{x+5} \ , \ x\in <5,11> \end{cases}$ b) $(f\circ g)(x)=\begin{cases} (x+5)^2 \ , \ x\in [1,4> \\ \sqrt{x+5} \ , \ x\in [5,11> \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x-5)^2 \ , \ x \in <1,4> \\ \sqrt{x+5} \ , \ x \in <5,11> \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x+5)^2 \ , \ x \in <1,4> \\ \sqrt{x+5} \ , \ x \in <5,11> \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x-5)^2 \ , \ x \in <1,4> \\ \sqrt{x-5} \ , \ x \in <5,11> \end{cases}$

(122) Si $f(x) = \dfrac{ax+1-2a}{x+2}$, x ∈ R – {-2}, halle el valor de "a" para que f* = f (f* es la función inversa de f)

a) -3 b) -2 c) 1 d) 2 e) 3

(123) Si la función f = {(a + b,3),(5,3a + 2b),(a – b,3),(5,8)} es inyectiva, calcule 2a + 3b

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 32

(124) Dada la función f: [1,4] → [2,5], si f es lineal, biyectiva y decreciente halle f*(3).

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

(125) Dada la función f: A → B, donde A = [-4,3>. B = [a,b> y $f(x) = x^3 - 4$, si f es biyectiva, halle a + b

a) -45 b) -35 c) 33 d) -41 e) 37

(126) Determine una función lineal f: [0,1] → [2,5], tal que sea biyectiva y creciente.

a) x + 3 b) 3x + 2 c) 2x – 1 d) x + 1 e) x + 5

(127) Sea $f: D_f \to B$ con regla de correspondencia $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; y además f es sobreyectiva, indique el conjunto B

a) <-1,1> b) [-1,1] c) [-2,2] d) R e) ϕ

(128) Dado: $f(x) = 2x^2 + 1$, x∈<-2,20>; $g(x) = \begin{cases} 1-x \ , \ x \in <-\infty,-2> \\ 2x \ , \ x \in <5,\infty> \end{cases}$ Halle dominio de g o f.

a) $<-2,-2\sqrt{2}> \cup <\sqrt{2},20>$ b) $<-2,\sqrt{2}>$ c) <-2,20>

d) $<-\sqrt{2},\sqrt{2}>$ e) <-2,5>

(129) Si $f(x)=\sqrt{x+1}$, x ∈ <-1,9]; $g(x)=[\![x+1]\!]$, x ∈ <3,4]. Halle el dominio de (f o g)

a) <-1,9] b) <3,4] c) <-1,3> d) <-1,4] e) <3,9]

(130) Sean las funciones f(x) = mx + n; mn ≠ 0; g(x) = x – P; P ≠ 0. El valor de "m" para los cuales f(g(x)) = g(f(x)), ∀ x ∈ R es:

a) 0 b) 1 c) 4 d) 9 e) -5

(131) Dada la función $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, x ∈ <1,2>, es cierto que:

I) Es inyectiva II) Es creciente III) Posee inversa

a) solo I b) solo II c) solo III d) todos e) solo I y III

(132) Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I) f: [-1,1> → <-∞,0] tal que $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ es suryectiva

II) $f(x)=5-\sqrt{5-x^2+2x}$, x ∈ <-1,0> es inyectiva.

III) $g(x)=\begin{cases}-x^2 & , x\in<-\infty,0> \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , x\in<0,\infty>\end{cases}$ tiene inversa

a) VVV b) FFF c) VFV d) FVF e) VVF

(133) Dada la función $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$ con x ∈ [-4,4], hallar f*(x) si existe.

a) $\dfrac{x^2-9}{2x}$, x ∈ [-1,9] b) $\dfrac{x^2-9}{2x}$, x ∈ <1,9> c) $\dfrac{x^2-9}{2x}$, x ∈ [1,9]

d) $\dfrac{x^2-9}{x}$, x ∈ <1,9> e) f no es univalente

(134) Sean f y g dos funciones tales que: f = {(3,-1), (2,3), (9,2), (7,4)}, g={(2,3),(7,5),(9,7),(11,-4}. Determine (fog)of* e indique la suma de elementos del rango

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

135 Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+12 \ , \ x\in\langle -6,-4\rangle \\ \sqrt{x+2} \ , \ x\in[-2,1\rangle \\ \frac{x}{3}+\frac{5}{3} \ , \ x\in[1,4] \end{cases}$. Determinar f*(x), si existe

a) $f^*(x)=\begin{cases} 4+\sqrt{x+4} \ , \ x\in\langle -4,0\rangle \\ x^2-2 \ , \ x\in[0,\sqrt{3}\rangle \\ 3x-5 \ , \ x\in[2,3\rangle \end{cases}$

b) $f^*(x)=\begin{cases} -4-\sqrt{x+4} \ , \ x\in\langle -4,0\rangle \\ x^2-2 \ , \ x\in[0,\sqrt{3}\rangle \\ 3x-5 \ , \ x\in[2,3] \end{cases}$

c) $f^*(x)=\begin{cases} -4+\sqrt{x+4} \ , \ x\in\langle -4,0\rangle \\ x^2-2 \ , \ x\in[0,\sqrt{3}\rangle \\ 3x-5 \ , \ x\in[2,3\rangle \end{cases}$

d) $f^*(x)=\begin{cases} -4-\sqrt{x+4} \ , \ x\in\langle -4,-1\rangle \\ x^2+2 \ , \ x\in[0,\sqrt{3}\rangle \\ 3x+5 \ , \ x\in[2,5\rangle \end{cases}$

e) $f^*(x)=\begin{cases} -4+\sqrt{x+4} \ , \ x\in\langle -4,-1\rangle \\ x^2+2 \ , \ x\in\langle 0,\sqrt{3}\rangle \\ 3x+4 \ , \ x\in\langle 2,3\rangle \end{cases}$

136 La inversa de la siguiente función $f(x)=\sqrt{5-x}(|x-5|+1+x)$ es dado por:

a) $\frac{20-x^2}{36}$, x ∈ [0, ∞⟩ b) $\frac{180-x^2}{36}$, x ∈ [0, ∞⟩ c) $\frac{x^2-20}{36}$, x ∈ ⟨0,∞⟩

d) $\frac{x^3-180}{36}$, x ∈ [0, ∞⟩ e) $\frac{36-x^2}{180}$, x ∈ [0, ∞⟩

137 Sean las funciones: G = {(3,9),(4,16),(5,25),(6,36)} y G o F = {(1,9),(2,16),(3,25),(4,36)} obtener F

a) F = {(1,4),(2,3),(3,5),(4,6)} b) F = {(1,2),(2,4),(3,6),(4,5)}

c) F = {(1,3),(2,4),(4,6),(5,5)} d) F = {(1,3),(2,4),(3,5),(4,36)}

e) F = {(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)}

(138) Dada la función F: [-1,1> → <-∞,0] de donde $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ¿Qué clase de función es F?

a) Inyectiva b) Suryectiva c) biyectiva

d) par e) periódica

(139) Si F y G son funciones reales de variable real, tales que $F(x)=\sqrt{x-1}$ y $G(x)=\frac{1}{|x|}$, hallar (F o G)(t – 1) sabiendo que (G o F)(t) = 1

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

(140) Si $F(x)=x^2-1$, G(x) = 2x – b, b ∈ R, calcular la suma de los valores de b tal que: $(F o G)(\frac{1}{2})=(G o F)(b+1)$

a) -6 b) -5 c) 0 d) 5 e) 6

(141) Si F: R → B, es una función suryectiva tal que F(x) = | x – 2 | - x, hallar B

a) [-2, ∞> b) [-2,0> c) <0,2] d) [2, ∞> e) [-2,2]

(142) Si F* representa la inversa de F y ∀ x ∈ R definimos $F(x^2-1)=2x^2-1$, hallar H(x) = F*[F*(x – 3)]

a) $\frac{x-6}{2}$ b) $\frac{x-4}{2}$ c) $\frac{x-3}{4}$ d) $\frac{x-6}{4}$ e) $\frac{x+6}{4}$

(143) Sean las funciones $f=\{(0,0),(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),(6,10)\}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, x ∈ <-2,2>, si $(g^2+f)(n)=3$, hallar n^2+1

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

(144) Si f(x) = -2 | x – 1 | - 2, x ∈ [2,3], Determinar f*(-5) si existe

a) $-\frac{2}{5}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{5}$

145 Sea la función f: [1,4] → [a,b], tal que $f(x) = x^2 - 2x + 3$, demostrar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b para que la función f sea biyectiva y dar respuesta a + b.

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

146 Si se sabe que f(-1) = 4 y f(3) = -2, donde f es una función lineal, hallar la ecuación que define f*(x).

a) $f^*(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$ b) f*(x) = 3x + 5 c) f*(x) = 2x – 3

d) f*(x) = -x – 5 e) f*(x) = 3x – 5

147 Hallar la inversa f*(x) si existe para la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$, x ∈ <-4,-3>

a) $f^*(x) = 2 + \sqrt{x+5}$, x ∈ [-4,-1> b) $f^*(x) = -2 - \sqrt{x+5}$, x ∈ [-4,-1>

c) $f^*(x) = -2 + \sqrt{x+5}$, x ∈ [-4,-2> d) $f^*(x) = 1 + \sqrt{x+3}$, x ∈ [-3,-2>

e) $f^*(x) = 2 - \sqrt{x+5}$, x ∈ [-4,-1>

148 Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \geq 1 \\ x^3 + 4, & x < 1 \end{cases}$, hallar la función inversa f*(x) si existe

a) $f^*(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x-1}, & x \geq 5 \\ \sqrt[3]{x-4}, & x < 5 \end{cases}$ b) $f^*(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-1}, & x \geq 5 \\ \sqrt[3]{x+4}, & x < 5 \end{cases}$

c) $f^*(x) = \begin{cases} -1 - \sqrt{x-1}, & x \geq 5 \\ -\sqrt[3]{x-4}, & x < 5 \end{cases}$ d) $f^*(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{x-1}, & x \geq 5 \\ \sqrt[3]{x+4}, & x < 5 \end{cases}$ e) ∄

149 Dada la función f definida por: $f(x) = \frac{|x-5| + 4x + \sqrt{x-5} - [\![x]\!]x + 5}{\sqrt{6-x}}$. Hallar f*(x) si existe.

a) $f^*(x) = \frac{6x+3}{x+1}$ b) $f^*(x) = \frac{6x^2+5}{x^2+1}$ c) $f^*(x) = \frac{x^2+5}{x+1}$

d) $f^*(x) = \frac{6x^2-5}{x^2-1}$ e) ∄

(150) La función f definida por la regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases}4-\sqrt{x^2+12x+27} \ , \ si \ x\leq -11\\ x^2+6x+6 \ , \ si \ x>0\end{cases}$, demostrar que f es inyectiva, y hallar f*(x).

a) $f^*(x)=\begin{cases}-6-\sqrt{x^2+8x+25} \ , \ x\leq 0\\ \sqrt{x+3}-3 \ , \ x>6\end{cases}$ b) $f^*(x)=\begin{cases}6-\sqrt{x^2+8x+25} \ , \ x\leq 0\\ \sqrt{x+3}-3 \ , \ x>6\end{cases}$

c) $f^*(x)=\begin{cases}-6-\sqrt{x^2+8x+25} \ , \ x\leq 0\\ \sqrt{x+3}+3 \ , \ x>6\end{cases}$ d) $f^*(x)=\begin{cases}6-\sqrt{x^2+8x+25} \ , \ x\leq 0\\ -\sqrt{x+3}+3 \ , \ x>6\end{cases}$

e) $f^*(x)=\begin{cases}-6-\sqrt{x^2+8x+25} \ , \ x\leq 0\\ -\sqrt{x+3}-3 \ , \ x>6\end{cases}$

(151) Si la función f: <-1,1> → R, definida por: $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$, hallar la inversa f*(x) si existe.

a) $f^*(x)=\frac{x}{1+|x|}$ b) $f^*(x)=\frac{x+1}{1-|x|}$ c) $f^*(x)=\frac{1}{1+|x|}$

d) $f^*(x)=\frac{1}{1-|x|}$ e) $\nexists$

(152) Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 \ , \ x<-1\\ -\sqrt{x+1} \ , \ x\geq -1\end{cases}$. Hallar la inversa f*(x) si existe.

a) $f^*(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x-1} \ , \ x>1\\ x^2-1 \ , \ x\leq 0\end{cases}$ b) $f^*(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x-1} \ , \ x>1\\ x^2+1 \ , \ x\leq 0\end{cases}$

c) $f^*(x)=\begin{cases}-1-\sqrt{x-1} \ , \ x>1\\ x^2-1 \ , \ x\leq 0\end{cases}$ d) $f^*(x)=\begin{cases}-1+\sqrt{x-1} \ , \ x>1\\ x^2+1 \ , \ x\leq 0\end{cases}$ e) no existe

153 Hallar la inversa f*(x) si existe de la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$, x ≥2

a) $f^*(x) = 1 - \sqrt{x+2}$, x ≥ 1 b) $f^*(x) = 1 + \sqrt{x+2}$, x ≥-1

c) $f^*(x) = -1 - \sqrt{x+2}$, x ≥ -1 d) $f^*(x) = -1 + \sqrt{x+2}$, x ≥ -1 e) no existe

154 Dada la función $f(x) = \begin{cases} |x^2-4|, & 0 \le x < 2 \\ -\frac{x^2}{4} + x - 1, & x \ge 2 \end{cases}$, hallar f*(x) si existe

a) $f^*(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} + 2, & x \le 0 \\ \sqrt{4-x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$ b) $f^*(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - 2, & x \le 0 \\ \sqrt{4+x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

c) $f^*(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x} + 2, & x \le 0 \\ \sqrt{x-4}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$ d) $f^*(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - 2, & x \le 0 \\ \sqrt{x-4}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$ e) $\nexists$

155 Sea $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$ si $g^*(f^*(0)) = -\frac{4}{3}$. Hallar g*(a + 5)

a) 2 b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 3 e) 4

156 Sea la función f inyectiva, definida por: $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x < 1 \\ x - [\![x]\!], & 1 \le x < 2 \\ 3x - 5, & 2 \le x < 4 \end{cases}$, hallar

$f^*(-2) + 2f^*(\frac{1}{2}) + 3f^*(2)$

a) 3 b) 5 c) 7 d) 8 e) 11

157 Dadas las funciones reales $f(x) = \frac{1+|x|}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \ne 0$, hallar el dominio de f*og*

a) <-1,0>∪ <0,1> b) <-1,1> c) <-1,0> d) <0,1> e) <-1,3]

158 Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y g(x) = 3x – 1, hallar la intersección del dominio f*og con el dominio de f o g.

a) <-∞,0> b) <0, ∞> c) R – {0,2} d) R – [0,2] e) R

(159) Hallar la inversa f*(x) si existe para la función $f(x)=\frac{|x+4|}{|x-1|-1}$, $x \in \langle -2,0\rangle \cup \langle 0,1\rangle$

a) $f^*(x)=-\frac{4}{x+1}$, $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$

b) $f^*(x)=\frac{x}{x+1}$, $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$

c) $f^*(x)=\frac{x}{x-1}$, $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$

d) $f^*(x)=\frac{4}{x+3}$, $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$

e) $\nexists$

(160) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , & x<-1 \\ 4x^2 \ , & -1\le x\le 0 \\ x+4 \ , & x>0 \end{cases}$. Hallar f*(x) si existe:

a) $f^*(x)=\begin{cases} x+1 \ , & x<-3 \\ -\sqrt{x} \ , & 0\le x\le 4 \\ x+4 \ , & x>4 \end{cases}$

b) $f^*(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{2} \ , & x<-3 \\ -\sqrt{\frac{x}{2}} \ , & 0\le x\le 4 \\ x-4 \ , & x>4 \end{cases}$

c) $f^*(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{2} \ , & x<-3 \\ -\sqrt{\frac{x}{2}} \ , & 0\le x\le 4 \\ x+4 \ , & x>4 \end{cases}$

d) $f^*(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{2} \ , & x<-3 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} \ , & 0\le x\le 4 \\ x+4 \ , & x<-3 \end{cases}$

e) $\nexists$

22.22. RESPUESTAS.-

1	a	2	b	3	d	4	d	5	a	6	b	7	c	8	d
9	c	10	d	11	d	12	a	13	e	14	d	15	c	16	a
17	a	18	b	19	d	20	d	21	e	22	b	23	a	24	c
25	c	26	d	27	b	28	a	29	d	30	c	31	c	32	e
33	a	34	c	35	b	36	d	37	b	38	a	39	c	40	b
41	d	42	e	43	d	44	c	45	a	46	c	47	c	48	b
49	e	50	c	51	d	52	d	53	a	54	d	55	b	56	c
57	d	58	a	59	d	60	c	61	a	62	b	63	c	64	c
65	e	66	a	67	c	68	b	69	d	70	a	71	b	72	c
73	a	74	a	75	c	76	b	77	a	78	a	79	e	80	a
81	e	82	d	83	b	84	b	85	e	86	c	87	a	88	c
89	d	90	b	91	b	92	a	93	b	94	b	95	b	96	a
97	c	98	a	99	a	100	c	101	a	102	e	103	a	104	c
105	c	106	a	107	a	108	e	109	c	110	d	111	b	112	a
113	d	114	a	115	c	116	d	117	d	118	b	119	c	120	c
121	b	122	b	123	c	124	b	125	a	126	b	127	c	128	a
129	b	130	b	131	e	132	a	133	c	134	c	135	b	136	b
137	e	138	c	139	b	140	b	141	a	142	d	143	b	144	d
145	e	146	a	147	b	148	a	149	b	150	b	151	a	152	c
153	b	154	a	155	c	156	c	157	a	158	c	159	a	160	b

BIBLIOGRAFÍA

1. Álgebra por Máx A. Sobel – Norbert Lerner.
2. Álgebra y trigonometría por EARL W. SWOKOWSKI.
3. Ejercicios y problemas por M. García Andina.
4. Álgebra por Smith – Charles - Dossey – Keedy.
5. Matemática Básica : Álgebra y trigonometría por Jhon Peterson.
6. Álgebra y trigonometría por Jeffery A. Cole.
7. Ejercicios y problemas de matemática por Dnko Popov.
8. Matemática Básica colección por Marcos Gonzáles Correal.
9. Matemática Moderna Estructurada por Raúl Gómez - Darío Wills.
10. Matemática progresiva por Nelson Noldoño y Hernando Bedoya.
11. Álgebra elemental por may – Knight.
12. Pequeña enciclopedia de matemáticas por B. Renschuch.
13. Álgebra por Rees – Sparts – Rees.
14. Temas selectos de matemática elemental por G. Doro Feiev, M. Potapov, N. Rosov.
15. Precálculo funciones y gráficas por Regumond A. Bernett, Michael R. Ziglar.
16. Álgebra por L. Galdos.
17. Colección de matemáticas por Rojo Sánchez Greco.
18. Álgebra por Charles Lehman.
19. Exámenes de admisión de UNMSM – UNI – UNAC – PUCP – UNFV.
20. Prácticas y exámenes de los centros preuniversitarios y de las universidades UNMSM, UNI, UNAC, PUCP.